ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

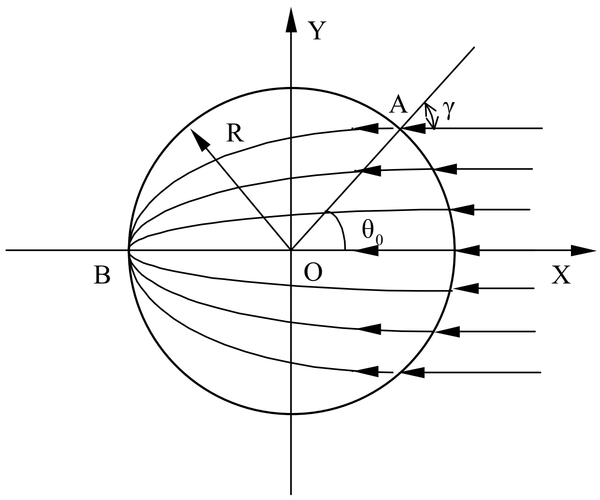
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

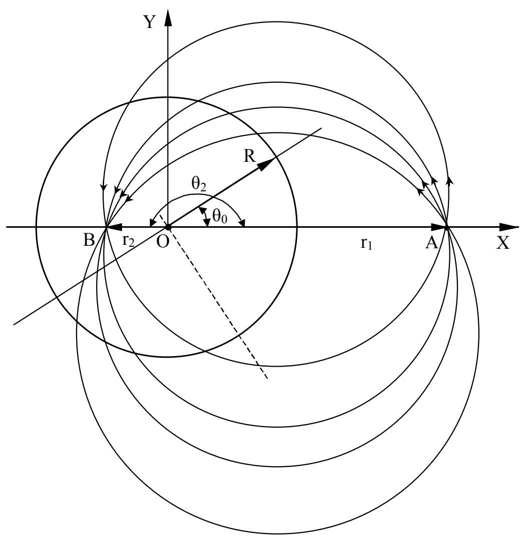
ΤΟΜΕΑΣ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ Η/Μ ΠΕΔΙΟΥ ΣΕ ΟΜΟΚΕΝΤΡΑ ΣΤΡΩΜΑΤΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΣΦΑΙΡΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥΣ ΦΑΚΟΥΣ LUNEBURG ΚΑΙ FISHEYE

Διπλωματική Εργασία

ΑΚΡΙΤΙΔΗ Γ. ΛΕΩΝΙΔΑ





Επίβλεψη: Δ.Π. Χρυσουλίδης

Φεβρουάριος 2003

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το φαινόμενο της σκέδασης της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας από σώματα προκαθορισμένης ή τυχαίας γεωμετρίας, είναι ένα ζήτημα που απασχολεί αρκετούς ερευνητές σε ποικίλους τομείς της επιστήμης. Τέτοιες είναι οι ασύρματες τηλεπικοινωνίες, η ραδιομετεωρολογία, η τηλεπισκόπιση, ο ραδιοεντοπισμός και άλλες.

Ο όρος σκέδαση, περικλείει τις έννοιες της ανάκλασης και της διάθλασης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Τα σώματα που εμπλέκονται στην όλη ανάλυση ονομάζονται σκεδαστές. Συνήθης στόχος μιας έρευνας, είναι ο υπολογισμός του πεδίου που παράγεται μέσα και έξω από τους σκεδαστές και σε μικρές αποστάσεις από αυτούς. Αυτό είναι το λεγόμενο κοντινό πεδίο. Αξίζει να σημειωθεί, ότι οι σχέσεις που αφορούν στον υπολογισμό του μακρινού πεδίου, πηγάζουν από αυτές που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό του κοντινού πεδίου, εφαρμόζοντας κάποιες προσεγγίσεις.

Οι μέθοδοι που εφαρμόζονται για την επίτευξη του στόχου αυτού, είναι κυρίως δύο: Η μια είναι η αναλυτική, που βασίζεται σε νόμους της φυσικής (εξισώσεις Maxwell, νόμος Snell, θεωρήματα οπτικής κτλ.) και των μαθηματικών (επίλυση διαφορικών εξισώσεων, πράξεις πινάκων, κτλ.). Η άλλη είναι η αριθμητική μέθοδος, η οποία στηρίζεται σε διάφορα μοντέλα και παραδοχές οι οποίες προσεγγίζουν με ικανοποιητικό τρόπο την πραγματικότητα. Γίνεται λοιπόν αντιληπτό ότι η πρώτη μέθοδος οδηγεί σε ακριβή αποτελέσματα, ενώ η δεύτερη παρέχει καλές προσεγγίσεις της πρώτης.

Η εργασία αυτή ασχολείται με την πρώτη μέθοδο, την αναλυτική. Βέβαια, η χρήση της αναλυτικής μεθόδου μπορεί να οδηγεί σε ακριβή και γρήγορα αποτελέσματα χωρίς την πληθώρα των πράξεων που επιβάλλονται από την χρήση της αριθμητικής μεθόδου, ωστόσο έχει το μειονέκτημα του περιορισμένου εύρους εφαρμογών. Έτσι είναι πολύ κοπιαστικός ο προσδιορισμός του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στην περίπτωση που στο πρόβλημα εμπλέκονται πολύπλοκες γεωμετρίες εξαιτίας της δυσκολίας που υπάρχει στην επιλογή του συστήματος συντεταγμένων. Τη λύση σε τέτοιου είδους ζητήματα δίνει η χρήση της αριθμητικής μεθόδου.

Η αναλυτική μέθοδος εφαρμόζεται για την επίλυση προβλημάτων της σκέδασης ηλεκτρομαγνητικού κύματος που προσπίπτει σε σφαιρικό σκεδαστή, ο οποίος μάλιστα είναι συμμετρικός. Ειδικότερα, το ενδιαφέρον εστιάζεται στην σκέδαση από σφαίρα της οποίας ο δείκτης διάθλασης μεταβάλλεται με συγκεκριμένο τρόπο. Για την αντιμετώπιση ενός τέτοιου προβλήματος εφαρμόζεται η τεχνική της στρωματοποίησης της σφαίρας και μάλιστα ομόκεντρης. Τα στρώματα είναι βέβαια νοητά, με σταθερό δείκτη διάθλασης, ωστόσο τα αποτελέσματα αποκλίνουν ελάχιστα από τα πραγματικά.

Η όλη ανάλυση στηρίζεται σε τρία θεμελιώδη στάδια. Το πρώτο στάδιο, στηρίζεται στην εισαγωγή των βαθμωτών δυναμικών Debye και στην ιδιότητα που έχουν αυτά, να αποτελούν λύση της βαθμωτής ομογενούς εξίσωσης Helmholtz. Το δεύτερο στάδιο περιλαμβάνει την έκφραση των πεδιακών μεγεθών σε γραμμικούς συνδυασμούς διανυσματικών σφαιρικών κυματοσυναρτήσεων. Ο ορισμός των διανυσματικών σφαιρικών κυματοσυναρτήσεων, καθώς και οι ιδιότητες τους παρουσιάζονται λεπτομερώς στην ενότητα 2.2. Το τρίτο βήμα αποτελείται από την εφαρμογή των οριακών συνθηκών, με σκοπό τον προσδιορισμό των κυματικών συντελεστών που περιγράφουν τα πεδιακά μεγέθη. Υπάρχουν δυο τρόποι για να εφαρμοστούν οι οριακές συνθήκες: ο άμεσος και ο έμμεσος τρόπος, τα αποτελέσματα των οποίων, ταυτίζονται. Πάντως, στην συγκεκριμένη εργασία προτιμήθηκε η δεύτερη μέθοδος, διότι εφαρμόζοντας έμμεσα τις οριακές συνθήκες είναι δυνατό να προσδιοριστεί κάποια αναδρομική εξίσωση σύμφωνα με την οποία οι κυματικοί συντελεστές της πεδιακής έντασης (μαγνητικής ή ηλεκτρικής) σε μια περιοχή, συνδέονται με τους κυματικούς συντελεστές της αμέσως προηγούμενης περιοχής.

Ένα στοιχείο που πρέπει να σημειωθεί, είναι ότι εξαιτίας της συμμετρικής γεωμετρίας του συστήματος σκέδασης, το σύστημα συντεταγμένων είναι ένα και κοινό για όλες τις περιοχές. Σε αντίθετη περίπτωση όπου ο σκεδαστής περιλαμβάνει στο εσωτερικό του ανομοιογένειες σφαιρικής ή οποιασδήποτε άλλης μορφής και τυχαίας θέσης, απαιτείται η κατάλληλη προσαρμογή του συστήματος συντεταγμένων, κάτι που είναι ιδιαίτερα χρονοβόρο και κοπιαστικό.

Τα όσα αναφέρονται περιγραφικά παραπάνω, παρουσιάζονται με μαθηματικές σχέσεις και αποδείξεις στα κεφάλαια 2 και 3. Στο κεφάλαιο 4 δίνονται ορισμένα στοιχεία οπτικής και εισάγονται οι φακοί Fisheye και Luneburg, η μελέτη των οποίων είναι και το ουσιαστικό ζητούμενο. Παρουσιάζονται οι φακοί, η γεωμετρία τους, ο τρόπος που μεταβάλλονται οι δείκτες διάθλασης τους και ο τρόπος που συμπεριφέρονται όταν προσπίπτει σε αυτούς ακτινοβολία με συχνότητες στην οπτική και την μικροκυματική περιοχή.

Τα αριθμητικά αποτελέσματα της εργασίας παρουσιάζονται στο κεφαλαίο 5. Ιδιαίτερη σημασία έχει δοθεί στα παραρτήματα, στα οποία διαλευκαίνονται οι πολύπλοκες αποδείξεις των κεφαλαίων 2 και 4. Επιπλέον, παρατίθενται οι ιδιότητες των σφαιρικών συναρτήσεων Bessel και των προσαρτημένων συναρτήσεων Legendre σε ξεχωριστές ενότητες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΣΚΕΔΑΣΗ ΑΠΟ ΣΦΑΙΡΑ

Equation Chapter 2 Section 2

2.1 Δυναμικά Debye

Η περιγραφή και η αναλυτική θεμελίωση του φαινομένου της σκέδασης ηλεκτρομαγνητικού κύματος από σφαιρικό σκεδαστή διευκολύνεται με την εισαγωγή των βαθμωτών δυναμικών Debye π_e, π_m [*Ishimaru 1978*]. Με την υπόθεση αρμονικής μεταβολής με το χρόνο έστω της μορφής $e^{-j\omega t}$, τα πεδιακά μεγέθη $\vec{E}$, $\vec{H}$ προσδιορίζονται από τα βαθμωτά δυναμικά Debye ως εξής:

$$\vec{E} = \nabla\times\left(\vec{r}\pi_e\right) - \frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla\times\nabla\times\left(\vec{r}\pi_m\right) \tag{2.1}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{j\omega\mu_0}\nabla\times\nabla\times\left(\vec{r}\pi_e\right) + \nabla\times\left(\vec{r}\pi_m\right) \tag{2.2}$$

Με εφαρμογή των εξισώσεων (2.1) και (2.2) στις εξισώσεις Maxwell για ομογενές μέσο χωρίς πήγες

$$\nabla\times\vec{E} = j\omega\mu_0\vec{H} \tag{2.3}$$

$$\nabla\times\vec{H} = -j\omega\varepsilon\vec{E} \tag{2.4}$$

αποδεικνύεται ότι τα δυναμικά Debye ικανοποιούν τη βαθμωτή ομογενή εξίσωση κύματος

$$\left(\nabla^2 + k^2\right) f = 0 \tag{2.5}$$

όπου $k = \omega/c$ είναι ο κυματικός αριθμός.

Η άγνωστη συνάρτηση f στην εξίσωση (2.5) εκφράζεται στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων και εκπροσωπεί οποιοδήποτε από τα δυναμικά Debye.

Αν για παράδειγμα αντικατασταθούν απευθείας οι εξισώσεις ορισμού των δυναμικών Debye (2.1) και (2.2) στην πρώτη εξίσωση Maxwell (2.3) τότε:

$$\nabla \times \left[\nabla \times \left(\vec{r}\pi_e \right) - \frac{1}{j\omega\varepsilon} \nabla \times \nabla \times \left(\vec{r}\pi_m \right) \right] = j\omega\mu_0 \left[\frac{1}{j\omega\mu_0} \nabla \times \nabla \times \left(\vec{r}\pi_e \right) + \nabla \times \left(\vec{r}\pi_m \right) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla \times \nabla \times \left(\vec{r}\pi_e \right) - \frac{1}{j\omega\varepsilon} \nabla \times \nabla \times \nabla \times \left(\vec{r}\pi_m \right) = \nabla \times \nabla \times \left(\vec{r}\pi_e \right) + j\omega\mu_0 \nabla \times \left(\vec{r}\pi_m \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\nabla \times \left(\vec{r}\pi_m \right) \omega^2 \mu_0 \varepsilon + \nabla \times \nabla \times \nabla \times \left(\vec{r}\pi_m \right) = 0 \Rightarrow \nabla \times \nabla \times \left(\vec{r}\pi_m \right) - k^2 \left(\vec{r}\pi_m \right) = \nabla\psi \tag{2.6}$$

Όπου ψ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση. Αν στην τελευταία εξίσωση εφαρμοστούν οι διανυσματικές ταυτότητες $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) - \nabla^2 \vec{A}$, $\nabla \cdot \vec{r} = 3$ τότε αυτή μπορεί να αναλυθεί ως εξής:

$$\nabla\nabla \cdot \left(\vec{r}\pi_m \right) - \nabla^2 \left(\vec{r}\pi_m \right) - k^2 \left(\vec{r}\pi_m \right) = \nabla\psi \Rightarrow \nabla\nabla \cdot \left(\vec{r}\pi_m \right) - \left(\nabla^2 + k^2 \right) \left(\vec{r}\pi_m \right) = \nabla\psi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla\left[\pi_m \nabla \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \nabla\pi_m \right] - \left(\nabla^2 + k^2 \right) \left(\vec{r}\pi_m \right) = \nabla\psi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla\left[3\pi_m + \vec{r} \cdot \hat{r} \frac{\partial\pi_m}{\partial r} \right] - \left(\nabla^2 + k^2 \right) \left(\vec{r}\pi_m \right) = \nabla\psi \Rightarrow \nabla\left[3\pi_m + r \frac{\partial\pi_m}{\partial r} \right] - \left(\nabla^2 + k^2 \right) \left(\vec{r}\pi_m \right) = \nabla\psi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla\left[2\pi_m + \pi_m + r\frac{\partial \pi_m}{\partial r}\right] - \left(\nabla^2 + k^2\right)\left(\vec{r}\pi_m\right) = \nabla\psi \Rightarrow \nabla\left[2\pi_m + \frac{\partial\left(r\pi_m\right)}{\partial r}\right] - \left(\nabla^2 + k^2\right)\left(\vec{r}\pi_m\right) = \nabla\psi$$

(2.7)

Στη σχέση (2.7) καταλήγει κανείς με χρήση της ταυτότητας $\nabla\cdot\left(\Phi\vec{A}\right) = \Phi\nabla\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\nabla\Phi$. Για παραπέρα επεξεργασία απαιτείται η εφαρμογή των διανυσματικών ταυτοτήτων $\nabla^2\left(\Phi\Psi\right) = \Phi\nabla^2\Psi + \Psi\nabla^2\Phi + 2\nabla\Psi\cdot\nabla\Phi$, $\nabla^2\vec{r} = 0$ και $\nabla\pi_m\cdot\nabla\vec{r} = \nabla\pi_m$ (αποδεικνύεται στο παράρτημα IV, παράγραφος IV.1), οπότε:

$$\nabla\left[2\pi_m + \frac{\partial\left(r\pi_m\right)}{\partial r}\right] - \vec{r}\left(\nabla^2 + k^2\right)\pi_m - \pi_m\nabla^2\vec{r} - 2\nabla\pi_m\cdot\nabla\vec{r} = \nabla\psi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r}\left(\nabla^2 + k^2\right)\pi_m = \nabla\left[2\pi_m + \frac{\partial\left(r\pi_m\right)}{\partial r} - 2\pi_m - \psi\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r}\left(\nabla^2 + k^2\right)\pi_m = \nabla\left[\frac{\partial\left(r\pi_m\right)}{\partial r} - \psi\right] \tag{2.8}$$

και εφόσον η συνάρτηση ψ είναι αυθαίρετη είναι δυνατό να τεθεί $\psi = \partial\left(r\pi_m\right)/\partial r$ όποτε η (2.8) εκφυλίζεται στην *ομογενή βαθμωτή εξίσωση Helmholtz*:

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\pi_m = 0 \tag{2.9}$$

Αποδεικνύεται ομοίως ότι την ίδια διαφορική εξίσωση ικανοποιεί και το δυναμικό π_e. Συνεπώς, τη (2.5) επαληθεύουν τόσο το ηλεκτρικό, όσο και για το μαγνητικό δυναμικό Debye. Γίνεται λοιπόν αντιληπτό ότι για τον καθορισμό των πεδιακών μεγεθών $\vec{E}, \vec{H}$ είναι απαραίτητο να επιλυθεί η ομογενής βαθμωτή εξίσωση Helmholtz (2.5) με αγνώστους τα δυναμικά Debye.

Με την υπόθεση $f\left(r,\theta,\phi\right) = R\left(r\right)\Theta\left(\theta\right)\Phi\left(\phi\right)$, η (2.5) εκφράζεται ως εξής στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+k^2\right)f\left(r,\theta,\phi\right)=0 \tag{2.10}$$

Η εξίσωση (2.10) διασπάται σε τρεις απλές διαφορικές εξισώσεις που εκφράζονται επίσης στο σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2}-\mu^2\right]\Phi\left(\phi\right)=0 \tag{2.11α}$$

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right)-\left(\nu^2-\frac{\mu^2}{\sin^2\theta}\right)\right]\Theta\left(\theta\right)=0 \tag{2.11β}$$

$$\left[\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)+\left(k^2r^2+\nu^2\right)\right]R\left(r\right)=0 \tag{2.11γ}$$

όπου μ,ν είναι προσδιοριστέες σταθερές. Με την αντικατάσταση μ=jm, όπου m είναι ακέραιος, η διαφορική εξίσωση (2.11α) έχει τις περιοδικές λύσεις:

$$\Phi\left(\phi\right)=e^{\pm jm\phi} \tag{2.12}$$

Εξάλλου, με τις αντικαταστάσεις v=cosθ και $\nu^2=-n\left(n+1\right)$ η (2.11β) μετασχηματίζεται στη *διαφορική εξίσωση Legendre* [*Gradshteyn & Ryzhik, 1980*]:

$$\left[\left(1-v^2\right)\frac{d^2}{dv^2}-2v\frac{d}{dv}+\left(n\left(n+1\right)-\frac{m^2}{1-v^2}\right)\right]\Theta\left(\theta\right)=0 \tag{2.13}$$

Λύσεις της (2.13) είναι οι *προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre πρώτου* και *δεύτερου είδους,* $P_n^m\left(\cos\theta\right)$ και $Q_n^m\left(\cos\theta\right)$, αντίστοιχα. Οι τελευταίες απορρίπτονται διότι απειρίζονται στους πόλους, δηλαδή για $v=\pm1$. Για να είναι οι $P_n^m\left(\cos\theta\right)$ πεπερασμένες στους πόλους, πρέπει η σταθερά n να είναι μη αρνητικός ακέραιος και επιπλέον ο ακέραιος m να παίρνει μόνο τις τιμές $-n,-\left(n-1\right),...0,...n-1,n$. [*Jackson,* *1975*]. Περισσότερα για τις προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre και τις ιδιότητες τους αναφέρονται στο παράρτημα ΙΙ.

Με τις παραπάνω προϋποθέσεις η (2.11γ) μετασχηματίζεται στη *διαφορική εξίσωση Bessel*

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+\left(k^2-\frac{n(n+1)}{r^2}\right)\right]R(r)=0 \tag{2.14}$$

που έχει σαν λύσεις τις *σφαιρικές συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους*

$$z_n^{(1)}(kr)=j_n(kr) \tag{2.15α}$$

$$z_n^{(2)}(kr)=y_n(kr) \tag{2.15β}$$

ή τις *σφαιρικές συναρτήσεις Hankel πρώτου και δεύτερου είδους* [*Abramowitz & Stegun, 1972*]

$$z_n^{(3)}(kr)=h_n^{(1)}(kr)=j_n(kr)+jy_n(kr) \tag{2.16α}$$

$$z_n^{(4)}(kr)=h_n^{(2)}(kr)=j_n(kr)-jy_n(kr) \tag{2.16β}$$

Για την περιγραφή στάσιμων μορφών επιλέγονται σφαιρικές συναρτήσεις Bessel $j_n(kr), y_n(kr)$. Αν πρέπει η λύση να είναι πεπερασμένη στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων, απορρίπτονται οι συναρτήσεις $y_n(kr)$ επειδή απειρίζονται στο όριο $kr \to 0$. Ακτινοβολούμενες μορφές περιγράφονται με σφαιρικές συναρτήσεις Hankel που για μεγάλο όρισμα, δηλαδή $kr >> 1$, έχουν τη μορφή οδεύοντος σφαιρικού κύματος. Για να ικανοποιείται η συνθήκη ακτινοβολίας, η συνάρτηση $h_n^{(1)}(kr)$ χρησιμοποιείται όταν η εξάρτηση από το χρόνο είναι της μορφής $e^{-j\omega t}$, ενώ η συνάρτηση $h_n^{(2)}(kr)$ συνδυάζεται με χρονική μεταβολή της μορφής $e^{j\omega t}$ [*Χρυσουλίδης 1995*]. Περισσότερα για τις σφαιρικές συναρτήσεις Bessel και Hankel αναφέρονται στο παράρτημα ΙΙΙ.

Με πολλαπλασιασμό των επιμέρους λύσεων των (2.11), προκύπτει για τη (2.5) η εξής γενική μορφή λύσεως

$$f_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right) = z_n^{(i)}\left(kr\right) P_n^m\left(\cos\theta\right) e^{jm\phi} \tag{2.17}$$

και τα δυναμικά Debye περιγράφονται με γραμμικούς συνδυασμούς τέτοιων λύσεων:

$$\pi_e = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} C_{mn}^{e} f_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right) \tag{2.18α}$$

$$\pi_m = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} C_{mn}^{\mu} f_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right) \tag{2.18β}$$

Οι σταθερές C_{mn}^{e} και C_{mn}^{μ} στις (2.18) προσδιορίζονται με εφαρμογή των οριακών συνθηκών του εκάστοτε προβλήματος που εμπλέκει σφαιρική γεωμετρία.

2.2 Διανυσματικές σφαιρικές κυματοσυναρτήσεις

Στην προηγούμενη ενότητα ορίσθηκαν τα βαθμωτά δυναμικά Debye και αποδείχθηκε ότι μπορούν να εκφραστούν σαν γραμμικοί συνδυασμοί των λύσεων της βαθμωτής ομογενούς διαφορικής εξίσωσης Helmholtz (2.5). Όπως τα δυναμικά Debye εκφράζονται με τέτοιους γραμμικούς συνδυασμούς, έτσι η ηλεκτρική και η μαγνητική πεδιακή ένταση είναι δυνατό να γράφουν σα γραμμικοί συνδυασμοί διανυσματικών συναρτήσεων που επιλύουν την ομογενή διανυσματική εξίσωση κύματος. Έτσι, αν στη (2.1) αντικατασταθούν οι (2.18) θα προκύψουν τα εξής:

$$\vec{E} = \nabla\times\left(\vec{r}\pi_e\right) - \frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla\times\nabla\times\left(\vec{r}\pi_m\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \nabla\times\left(\vec{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} C_{mn}^{e} f_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)\right) - \frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla\times\nabla\times\left(\vec{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} C_{mn}^{\mu} f_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} C_{mn}^{e} \nabla \times \left[\vec{r} f_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right) \right] - \frac{Z}{jk} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} C_{mn}^{\mu} \nabla \times \nabla \times \left[\vec{r} f_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \left[C_{mn}^{e} \vec{M}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right) + jZC_{mn}^{\mu} \vec{N}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right) \right] \tag{2.19}$$

Στη (2.19) χρησιμοποιήθηκαν οι συντομογραφίες

$$\vec{M}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right) = \nabla \times \left[\vec{r} f_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right) \right] \tag{2.20}$$

$$\vec{N}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right) = \frac{1}{k} \nabla \times \nabla \times \left[\vec{r} f_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right) \right] = \frac{1}{k} \nabla \times \vec{M}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right) \tag{2.21}$$

Οι (2.20) και (2.21) μαζί με τη συνάρτηση $\vec{L}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)$ που ορίζεται από την

$$\vec{L}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right) = \nabla f_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right) \tag{2.22}$$

συγκροτούν το σύνολο των *διανυσματικών σφαιρικών κυματοσυναρτήσεων* [*Collin 1991; Tai, 1994*], που συνδέονται μεταξύ τους με τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\vec{M}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right) = \vec{L}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right) \times \vec{r} \tag{2.23α}$$

$$\vec{M}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right) = \frac{1}{k} \nabla \times \vec{N}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right) \tag{2.23β}$$

Η απόδειξη των εξισώσεων (2.23) παρατίθεται στο παράρτημα IV (ενότητα IV.2).

Η συνάρτηση $\vec{L}$ δεν συναντάται σε κανένα σημείο της μαθηματικής ανάλυσης του προβλήματος. Αυτό φαίνεται και από τη (2.19) όπου για την έκφραση της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης χρησιμοποιούνται μόνο οι δυο κυματοσυναρτήσεις $\vec{M}$ και $\vec{N}$. Γι' αυτό και όσα αναφέρονται για την $\vec{L}$ παρακάτω παρατίθενται χωρίς απόδειξη. Το ενδιαφέρον θα επικεντρωθεί στον προσδιορισμό των κυματοσυναρτήσεων $\vec{M}$ και $\vec{N}$ με αναφορά το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων

(O;rθφ). Έτσι, αντικαθιστώντας τη (2.17) στη (2.20) προκύπτει για την κυματοσυνάρτηση $\vec{M}$:

$$\vec{M}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)=\nabla\times\left[\vec{r}f_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)\right]=\nabla f_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)\times\vec{r}+f_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)\nabla\times\vec{r} \tag{2.24}$$

Αλλά $\nabla\times\vec{r}=0$, όποτε η (2.24) γράφεται ως εξής:

$$\vec{M}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)=\nabla f_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)\times\vec{r}=\left[\hat{r}\frac{\partial f_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)}{\partial r}+\frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial f_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)}{\partial\theta}+\frac{\hat{\phi}}{r\sin\theta}\frac{\partial f_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)}{\partial\phi}\right]\times\vec{r}=$$

$$=\left[\frac{dz_n^{(i)}\left(kr\right)}{dr}P_n^m\left(\cos\theta\right)e^{jm\phi}\hat{r}+\frac{z_n^{(i)}\left(kr\right)}{r}\frac{dP_n^m\left(\cos\theta\right)}{d\theta}e^{jm\phi}\hat{\theta}+\frac{z_n^{(i)}\left(kr\right)}{r\sin\theta}P_n^m\left(\cos\theta\right)\frac{de^{jm\phi}}{d\phi}\hat{\phi}\right]\times\vec{r}=$$

$$=\frac{dz_n^{(i)}\left(kr\right)}{dr}P_n^m\left(\cos\theta\right)e^{jm\phi}\left(\hat{r}\times\vec{r}\right)+$$

$$+\frac{z_n^{(i)}\left(kr\right)}{r}\frac{dP_n^m\left(\cos\theta\right)}{d\theta}e^{jm\phi}\left(\hat{\theta}\times\vec{r}\right)+jm\frac{z_n^{(i)}\left(kr\right)}{r\sin\theta}P_n^m\left(\cos\theta\right)e^{jm\phi}\left(\hat{\phi}\times\vec{r}\right) \tag{2.25}$$

Και επειδή $\hat{r}\times\vec{r}=0$, $\hat{\theta}\times\vec{r}=-r\hat{\phi}$, $\hat{\phi}\times\vec{r}=r\hat{\theta}$, η (2.25) παίρνει τελικά τη μορφή:

$$\vec{M}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)=jmz_n^{(i)}\left(kr\right)\frac{P_n^m\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta}e^{jm\phi}\hat{\theta}-z_n^{(i)}\left(kr\right)\frac{dP_n^m\left(\cos\theta\right)}{d\theta}e^{jm\phi}\hat{\phi} \tag{2.26}$$

Παρόμοια διαδικασία ακολουθείται και για τον προσδιορισμό της $\vec{N}$. Η (2.21) υποδεικνύει ότι

$$\vec{N}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)=\frac{1}{k}\nabla\times\vec{M}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right) \tag{2.27}$$

Όποτε με αντικατάσταση της (2.26) στη (2.27) προκύπτουν τα εξής:

$$\vec{N}_{mn}^{(i)}(k\vec{r}) = \frac{1}{k}\nabla\times\left[jmz_n^{(i)}(kr)\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}e^{jm\phi}\hat{\theta} - z_n^{(i)}(kr)\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}e^{jm\phi}\hat{\phi}\right] =$$

$$= \frac{1}{kr^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\phi} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} \\ 0 & rjmz_n^{(i)}(kr)\dfrac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}e^{jm\phi} & -r\sin\theta z_n^{(i)}(kr)\dfrac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}e^{jm\phi} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{kr\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\sin\theta z_n^{(i)}(kr)\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}e^{jm\phi}\right) - \frac{\partial}{\partial\phi}\left(jmz_n^{(i)}(kr)\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}e^{jm\phi}\right)\right]\hat{r} +$$

$$+\frac{1}{kr}\frac{\partial}{\partial r}\left(rz_n^{(i)}(kr)\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}e^{jm\phi}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{kr}\frac{\partial}{\partial r}\left(jmrz_n^{(i)}(kr)\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}e^{jm\phi}\right)\hat{\phi} =$$

$$= \frac{1}{kr}z_n^{(i)}(kr)\left[-\frac{d^2P_n^m(\cos\theta)}{d\theta^2} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} + \frac{m^2P_n^m(\cos\theta)}{\sin^2\theta}\right]e^{jm\phi}\hat{r} +$$

$$+\frac{1}{kr}\left[z_n^{(i)}(kr) + kr\left[z_n^{(i)}(kr)\right]'\right]\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}e^{jm\phi}\hat{\theta} + \frac{jm}{kr}\left[z_n^{(i)}(kr) + kr\left[z_n^{(i)}(kr)\right]'\right]\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}e^{jm\phi}\hat{\phi} \tag{2.28}$$

Αν στην παραπάνω σχέση τεθεί $v = \cos\theta$ τότε

$$dv = -\sin\theta d\theta \Rightarrow d\theta = -\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} \tag{2.29}$$

$$\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin^2\theta} = \frac{1}{1-v^2}P_n^m(v) \tag{2.30}$$

$$\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} = -\sqrt{1-v^2}\frac{dP_n^m(v)}{dv} \Rightarrow -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} = v\frac{dP_n^m(v)}{dv} \tag{2.31}$$

$$\frac{d^2P_n^m(\cos\theta)}{d\theta^2}=\left(1-v^2\right)\frac{d^2P_n^m(v)}{dv^2}-v\frac{dP_n^m(v)}{dv} \tag{2.32}$$

οπότε αντικαθιστώντας τις (2.30), (2.31) και (2.32) στη (2.28), η τελευταία μετασχηματίζεται στην παρακάτω:

$$\vec{N}_{mn}^{(i)}(k\vec{r})=-\frac{z_n^{(i)}(kr)}{kr}\left[\left(1-v^2\right)\frac{d^2P_n^m(v)}{dv^2}-2v\frac{dP_n^m(v)}{dv}-\frac{m^2}{1-v^2}P_n^m(v)\right]e^{jm\phi}\hat{r}+$$

$$+\left[\frac{z_n^{(i)}(kr)}{kr}+\left[z_n^{(i)}(kr)\right]'\right]\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}e^{jm\phi}\hat{\theta}+jm\left[\frac{z_n^{(i)}(kr)}{kr}+\left[z_n^{(i)}(kr)\right]'\right]\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}e^{jm\phi}\hat{\phi} \tag{2.33}$$

Ο πρώτος όρος του αθροίσματος της παραπάνω εξίσωσης μπορεί να αντικατασταθεί με βάση τη διαφορική εξίσωση Legendre και να αποκτήσει την παρακάτω μορφή:

$$\vec{N}_{mn}^{(i)}(k\vec{r})=\frac{n(n+1)}{kr}z_n^{(i)}(kr)P_n^m(\cos\theta)e^{jm\phi}\hat{r}+\eta_n^{(i)}(kr)\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}e^{jm\phi}\hat{\theta}+$$

$$+jm\eta_n^{(i)}(kr)\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}e^{jm\phi}\hat{\phi} \tag{2.34}$$

Η συντομογραφία $\eta_n^{(i)}(kr)$ περιγράφει *σφαιρική συνάρτηση Ricatti* που ορίζεται:

$$\eta_n^{(i)}(kr)=\frac{\left[krz_n^{(i)}(kr)\right]'}{kr}=\frac{z_n^{(i)}(kr)}{kr}+\left[z_n^{(i)}(kr)\right]' \tag{2.35}$$

Κατά τη συνήθη σύμβαση, ο τόνος δίπλα στο σύμβολο κάποιας συνάρτησης σημαίνει παραγώγιση ως προς το όρισμα της, στην προκειμένη περίπτωση ως προς kr.

Τέλος, η κυματοσυνάρτηση $\vec{L}$ ορίζεται από τη σχέση:

$$\vec{L}_{mn}^{(i)}(k\vec{r})=\frac{dz_n^{(i)}(kr)}{dr}P_n^m(\cos\theta)e^{jm\phi}\hat{r}+$$

$$+\frac{z_n^{(i)}(kr)}{r}\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}e^{jm\phi}\hat{\theta}+jm\frac{z_n^{(i)}(kr)}{r}\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}e^{jm\phi}\hat{\phi} \tag{2.36}$$

Οι εξισώσεις (2.26), (2.34) και (2.36) αποτελούν τις τελικές εκφράσεις των διανυσματικών σφαιρικών κυματοσυναρτήσεων στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων.

Ιδιότητες των διανυσματικών σφαιρικών κυματοσυναρτήσεων

Ακολουθούν οι ιδιότητες των διανυσματικών σφαιρικών κυματοσυναρτήσεων με τις αναλυτικές αποδείξεις τους.

i) Η συνάρτηση $\vec{L}$ είναι *αστρόβιλη,* δηλαδή $\nabla\times\vec{L}_{mn}^{(i)}(k\vec{r})=0$

Πολλαπλασιάζοντας την (2.22) με το διαφορικό τελεστή $\nabla\times$ έχουμε

$$\nabla\times\vec{L}_{mn}^{(i)}(k\vec{r})=\nabla\times\nabla f_{mn}^{(i)}(k\vec{r}) \tag{2.37}$$

Με χρήση της διανυσματικής ταυτότητας $\nabla\times\nabla\Phi=0$ στη (2.37) προκύπτει αμέσως το ζητούμενο.

ii) Οι συναρτήσεις $\vec{M}_{mn}^{(i)}(k\vec{r})$ και $\vec{N}_{mn}^{(i)}(k\vec{r})$ είναι *σωληνοειδείς*, δηλαδή $\nabla\cdot\vec{M}_{mn}^{(i)}(k\vec{r})=\nabla\cdot\vec{N}_{mn}^{(i)}(k\vec{r})=0$

Οι (2.20) και (2.21) πολλαπλασιαζόμενες με το διαφορικό τελεστή $\nabla\cdot$ και με χρήση της διανυσματικής ταυτότητας $\nabla\cdot\nabla\times\vec{A}=0$ δίνουν:

$$\nabla\cdot\vec{M}_{mn}^{(i)}(k\vec{r})=\nabla\cdot\nabla\times\left[\vec{r}f_{mn}^{(i)}(k\vec{r})\right]=0 \tag{2.38}$$

$$\nabla\cdot\vec{N}_{mn}^{(i)}(k\vec{r})=\nabla\cdot\left[\frac{1}{k}\nabla\times\nabla\times\left[\vec{r}f_{mn}^{(i)}(k\vec{r})\right]\right]=\frac{1}{k}\nabla\cdot\nabla\times\vec{M}_{mn}^{(i)}(k\vec{r})=0 \tag{2.39}$$

iii) Οι κυματοσυναρτήσεις $\vec{M}_{mn}^{(i)}(k\vec{r})$ και $\vec{N}_{mn}^{(i)}(k\vec{r})$ είναι μηδενικά διανύσματα όταν n=m=0. Αυτό γίνεται εύκολα αντιληπτό από τις εκφράσεις (2.26) και (2.34) αν τεθεί σ' αυτές n=m=0. Για το λόγο αυτό τα δίπλα αθροίσματα που περιλαμβάνουν αυτές τις κυματοσυναρτήσεις είναι δυνατό να εκκινούν από την τιμή n=1. Στη συνέχεια της παρουσίασης η τιμή εκκίνησης των διπλών αθροισμάτων θα είναι η n=0.

iv) Οι διανυσματικές σφαιρικές κυματοσυναρτήσεις αποτελούν πλήρες σύνολο συναρτήσεων στο χώρο $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \phi \le 2\pi$, $0 \le r < \infty$, και παρουσιάζουν *ορθογωνικότητα* η οποία περιγράφεται από τις παρακάτω εξισώσεις [*Collin 1991; Tai 1994*].

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \vec{M}_{mn}^{(1)}(k_1\vec{r}) \cdot \vec{N}_{kl}^{(1)}(k_2\vec{r})\, r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\phi = 0 \tag{2.40α}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \vec{M}_{mn}^{(1)}(k_1\vec{r}) \cdot \vec{L}_{kl}^{(1)}(k_2\vec{r})\, r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\phi = 0 \tag{2.40β}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \vec{N}_{mn}^{(1)}(k_1\vec{r}) \cdot \vec{L}_{kl}^{(1)}(k_2\vec{r})\, r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\phi = 0 \tag{2.40γ}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \vec{M}_{mn}^{(1)}(k_1\vec{r}) \cdot \vec{M}_{kl}^{(1)}(k_2\vec{r})\, r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\phi = \pi^2 (-1)^k \frac{2n(n+1)}{2n+1} \frac{\delta(k_1 - k_2)}{k_1^2} \delta_{nl}\delta_{m,-k} \tag{2.41α}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \vec{N}_{mn}^{(1)}(k_1\vec{r}) \cdot \vec{N}_{kl}^{(1)}(k_2\vec{r})\, r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\phi = \pi^2 (-1)^k \frac{2n(n+1)}{2n+1} \frac{\delta(k_1 - k_2)}{k_1^2} \delta_{nl}\delta_{m,-k} \tag{2.41β}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \vec{L}_{mn}^{(1)}(k_1\vec{r}) \cdot \vec{L}_{kl}^{(1)}(k_2\vec{r})\, r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\phi = \pi^2 (-1)^k \frac{2}{2n+1} \delta(k_1 - k_2) \delta_{nl}\delta_{m,-k} \tag{2.41γ}$$

όπου δ_{ij} είναι το *δέλτα του Kronecker* και $\delta(k_1 - k_2)$ *η συνάρτηση Dirac*. Η απόδειξη των (2.40) είναι σχετικά εύκολη. Παρακάτω παρουσιάζονται τα βήματα που οδηγούν στη (2.40α). Οι (2.40β) και (2.40γ) αποδεικνύονται με παρόμοιο τρόπο. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.26) και (2.34) προκύπτει ότι

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \vec{M}_{mn}^{(1)}(k_1\vec{r}) \cdot \vec{N}_{kl}^{(1)}(k_2\vec{r}) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \left[jmj_n(k_1 r)\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} e^{jm\phi}\eta_l^{(1)}(k_2 r)\frac{dP_l^k(\cos\theta)}{d\theta} e^{jk\phi}\left(\hat{\theta}\cdot\hat{\theta}\right) - \right.$$

$$\left. -jkj_n(k_1 r)\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} e^{jm\phi}\eta_l^{(1)}(k_2 r)\frac{P_l^k(\cos\theta)}{\sin\theta} e^{jk\phi}\left(\hat{\phi}\cdot\hat{\phi}\right)\right] r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi =$$

$$= j\int_0^{\infty} j_n(k_1 r)\eta_l^{(1)}(k_2 r) r^2 dr \int_0^{\pi} e^{j(m+k)\phi} d\phi$$

$$\int_0^{2\pi}\left[m\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\frac{dP_l^k(\cos\theta)}{d\theta} - k\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}\frac{P_l^k(\cos\theta)}{\sin\theta}\right]\sin\theta d\theta \tag{2.42}$$

Για την επεξεργασία της (2.42), εισάγεται η συντομογραφία (2.45γ) που σε συνδυασμό με τις ιδιότητες (2.46α,γ) μηδενίζει το δεύτερο μέλος της (2.42) οπότε:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \vec{M}_{mn}^{(1)}(k_1\vec{r}) \cdot \vec{N}_{kl}^{(1)}(k_2\vec{r}) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = 0 \tag{2.43}$$

Η απόδειξη των (2.41) είναι πιο πολύπλοκη και στηρίζεται πάλι στις εξισώσεις (2.26), (2.34) και (2.36). Τα βήματα που οδηγούν στην (2.41β) δίνονται παρακάτω. Με απευθείας αντικατάσταση από τη (2.34) αναπτύσσεται το αριστερό μέλος της (2.41β)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\vec{N}_{mn}^{(1)}\left(k_1\vec{r}\right)\cdot\vec{N}_{kl}^{(1)}\left(k_2\vec{r}\right)r^2\sin\theta drd\theta d\phi=\left(\int_0^{2\pi}e^{j(m+k)\phi}d\phi\right)\times$$

$$\times\left\{\left(\int_0^{\pi}P_n^m\left(\cos\theta\right)P_l^k\left(\cos\theta\right)\sin\theta d\theta\right)\left(\int_0^{\infty}\frac{n\left(n+1\right)}{k_1r}j_n\left(k_1r\right)\frac{l\left(l+1\right)}{k_2r}j_l\left(k_2r\right)r^2dr\right)+\right.$$

$$+\left(\int_0^{\pi}\left[\frac{dP_n^m\left(\cos\theta\right)}{d\theta}\frac{dP_l^k\left(\cos\theta\right)}{d\theta}-mk\frac{P_n^m\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta}\frac{P_l^k\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right]\sin\theta d\theta\right)\times$$

$$\left.\times\left(\int_0^{\infty}\eta_n^{(1)}\left(k_1r\right)\eta_l^{(1)}\left(k_2r\right)r^2dr\right)\right\}\tag{2.44}$$

Για την επεξεργασία των (2.44) εισάγονται οι συντομογραφίες

$$\Phi_{mk}\left(\phi\right)=e^{j(m+k)\phi}\tag{2.45α}$$

$$^1\Theta_{nl}^{mk}\left(\theta\right)=\frac{dP_n^m\left(\cos\theta\right)}{d\theta}\frac{dP_l^k\left(\cos\theta\right)}{d\theta}-mk\frac{P_n^m\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta}\frac{P_l^k\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta}\tag{2.45β}$$

$$^2\Theta_{nl}^{mk}\left(\theta\right)=k\frac{dP_n^m\left(\cos\theta\right)}{d\theta}\frac{P_l^k\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta}-m\frac{P_n^m\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta}\frac{dP_l^k\left(\cos\theta\right)}{d\theta}\tag{2.45γ}$$

Για τις οποίες αποδεικνύονται οι ιδιότητες

$$\int_0^{2\pi}\Phi_{mk}\left(\phi\right)d\phi=2\pi\delta_{m,-k}\tag{2.46α}$$

$$\int_0^{\pi}{}^1\Theta_{nl}^{-kk}\left(\theta\right)\sin\theta d\theta=2\left(-1\right)^k\frac{n\left(n+1\right)}{2n+1}\delta_{nl}\tag{2.46β}$$

$$\int_0^{\pi}{}^2\Theta_{nl}^{-kk}\left(\theta\right)\sin\theta d\theta=0\tag{2.46γ}$$

Οι (2.46β,γ) αποδεικνύονται στο παράρτημα ΙΙ. Με εφαρμογή των (2.46α,β) η (2.44) συμπτύσσεται στην παρακάτω μορφή :

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\vec{N}_{mn}^{(1)}\left(k_1\vec{r}\right)\cdot\vec{N}_{kl}^{(1)}\left(k_2\vec{r}\right)r^2\sin\theta drd\theta d\phi=2\pi\delta_{m,-k}\times$$

$$\times\left\{\left(-1\right)^k\frac{\left(n-k\right)!}{\left(n+k\right)!}\frac{2}{2n+1}\frac{\left(n+k\right)!}{\left(n-k\right)!}\delta_{nl}\left(\int_0^{\infty}\frac{n\left(n+1\right)}{k_1r}j_n\left(k_1r\right)\frac{l\left(l+1\right)}{k_2r}j_l\left(k_2r\right)r^2dr\right)+\right.$$

$$\left.+2\left(-1\right)^k\frac{n\left(n+1\right)}{2n+1}\delta_{nl}\left(\int_0^{\infty}\eta_n^{(1)}\left(k_1r\right)\eta_l^{(1)}\left(k_2r\right)r^2dr\right)\right\}\qquad(2.47)$$

Για την απόδειξη της (2.47) χρησιμοποιήθηκε επίσης η εξίσωση (ΙΙ.12). Η (2.47) μπορεί να απλοποιηθεί περαιτέρω:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\vec{N}_{mn}^{(1)}\left(k_1\vec{r}\right)\cdot\vec{N}_{kl}^{(1)}\left(k_2\vec{r}\right)r^2\sin\theta drd\theta d\phi=4\pi\left(-1\right)^k\frac{n\left(n+1\right)}{2n+1}\delta_{nl}\delta_{m,-k}\times$$

$$\times\left\{\frac{n\left(n+1\right)}{k_1k_2}\int_0^{\infty}j_n\left(k_1r\right)j_n\left(k_2r\right)dr+\int_0^{\infty}\eta_n^{(1)}\left(k_1r\right)\eta_n^{(1)}\left(k_2r\right)r^2dr\right\}\qquad(2.48)$$

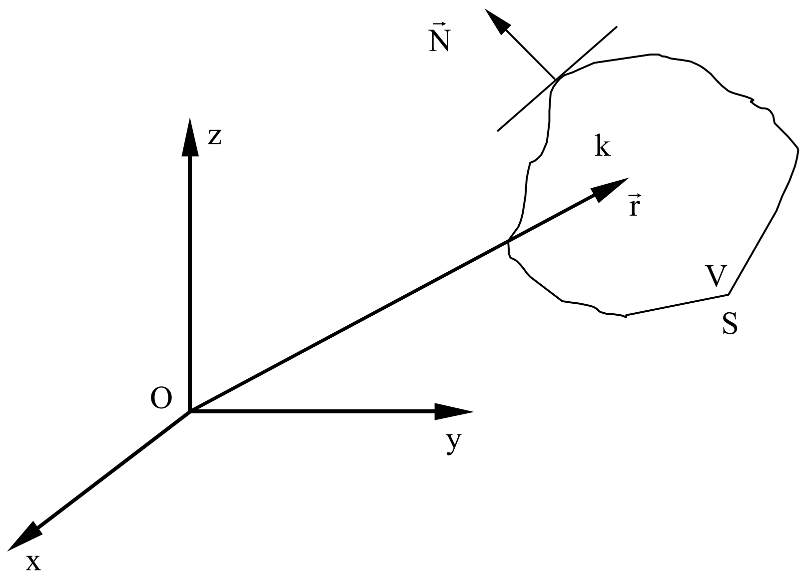
Με εφαρμογή των ιδιοτήτων $j_{n-1}\left(k_1r\right)+j_{n+1}\left(k_1r\right)=\left(2n+1\right)j_n\left(k_1r\right)/k_1r$ και $nj_{n-1}\left(k_1r\right)-\left(n+1\right)j_{n+1}\left(k_1r\right)=\left(2n+1\right)\left[j_n\left(k_1r\right)\right]'$, που προκύπτουν από τις (ΙΙΙ.15) και (ΙΙΙ.16) καθώς και της εξίσωσης πληρότητας των σφαιρικών συναρτήσεων Bessel πρώτου είδους

$$\int_0^{\infty}j_n\left(k_1r\right)j_n\left(k_2r\right)r^2dr=\frac{\pi}{2k_1k_2}\delta\left(k_1-k_2\right)\qquad(2.49)$$

προκύπτει τελικά από τη (2.48) η (2.41β). Η απόδειξη των (2.41α,γ) γίνεται με παρόμοιο τρόπο.

2.3 Έμμεση εφαρμογή οριακών συνθηκών

Για την αντιμετώπιση των προβλημάτων σκέδασης με σφαιρική γεωμετρία είναι απαραίτητη η εφαρμογή των οριακών συνθηκών σε κάθε σημείο της επιφάνειας του σκεδαστή. Οι οριακές συνθήκες είναι δυνατό να εφαρμοστούν συνολικά σ' όλη την επιφάνεια του σκεδαστή μέσω του δεύτερου διανυσματικού θεωρήματος Green.



Σχήμα 2.1 Η κλειστή επιφάνεια S και ο χώρος V

Η μέθοδος αυτή, που αναλύεται παρακάτω, χαρακτηρίζεται στο εξής *σαν μέθοδος έμμεσης εφαρμογής οριακών συνθηκών* και χρησιμοποιείται γι' αυτήν η συντομογραφία *IMM* [*Skaropoulos et al., 1994c; Ioannidou et al., 1995*].

Το δεύτερο διανυσματικό θεώρημα περιγράφεται από την ταυτότητα [*Stratton, 1941*]

$$\int_V \left(\vec{Q}\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{P}-\vec{P}\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{Q}\right)dv=\int_S \left(\vec{P}\times\nabla\times\vec{Q}-\vec{Q}\times\nabla\times\vec{P}\right)\cdot\hat{N}ds \qquad (2.50)$$

όπου V είναι ο όγκος που περικλείεται από την κλειστή επιφάνεια S (σχ.2.1) και $\vec{P}$, $\vec{Q}$ είναι δυο συνεχείς διανυσματικές συναρτήσεις της θέσης $\vec{r}$ με συνεχείς πρώτες και δεύτερες παραγωγούς σε όλα τα σημεία του χώρου V και της επιφάνειας S. Το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{N}$ είναι κάθετο στην S και κατευθύνεται προς το εξωτερικό της. Αν οι δυο συναρτήσεις $\vec{P}$ και $\vec{Q}$ ικανοποιούν την ομογενή εξίσωση Helmholtz [*Τσιμπούκης, 1991*], η ολοκληρωτέα ποσότητα του ολοκληρώματος όγκου μηδενίζεται. Επομένως, αν γίνει η αντικατάσταση $\vec{P}=\vec{E}^1$ όπου $\vec{E}^1$ είναι η ηλεκτρική πεδιακή ένταση στο χώρο V, και χρησιμοποιηθεί σαν συνάρτηση δόκιμης $\vec{Q}$ μια σφαιρική διανυσματική κυματοσυνάρτηση $\vec{M}$ ή $\vec{N}$ ορισμένη στον ίδιο χώρο, που έχει κυματικό αριθμό k_1 προκύπτει:

$$\int_V \left(\vec{Q}\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{E}^1-\vec{E}^1\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{Q}\right)dv=\int_V\left[\vec{Q}\cdot\left(k_1^2\vec{E}^1\right)-\vec{E}^1\cdot\left(k_1^2\vec{Q}\right)\right]dv=0 \qquad (2.51)$$

με την προϋπόθεση ότι στο χώρο V δεν υπάρχουν πήγες.
Με τις αντικαταστάσεις αυτές η (2.50) παίρνει την απλούστερη μορφή:

$$\int_S \left(\vec{E}^1\times\nabla\times\vec{Q}-\vec{Q}\times\nabla\times\vec{E}^1\right)\cdot\hat{N}ds=0 \qquad (2.52)$$

Η συνεχεία των εφαπτομενικών συνιστωσών της ηλεκτρικής και της μαγνητικής πεδιακής έντασης πάνω στην S, εφαρμόζεται αντικαθιστώντας στη (2.52) το μέγεθος $\vec{E}^1$ με το μέγεθος $\vec{E}^0$, δηλαδή την ηλεκτρική πεδιακή ένταση στο εξωτερικό της κλειστής επιφάνειας S. Η εξίσωση που προκύπτει είναι η εξής :

$$\int_S \left(\vec{E}^0\times\nabla\times\vec{Q}-\vec{Q}\times\nabla\times\vec{E}^0\right)\cdot\hat{N}ds=0 \qquad (2.53)$$

Η (2.53) χαρακτηρίζεται σαν *εξίσωση IMM πρώτου είδους*. Έμμεση εφαρμογή των οριακών συνθηκών μπορεί να γίνει και με την *εξίσωση IMM δεύτερου είδους*.

$$\int_S \left(\vec{E}^0\times\nabla\times\vec{Q}-\vec{Q}\times\nabla\times\vec{E}^0\right)\cdot\hat{N}ds=\int_S \left(\vec{E}^1\times\nabla\times\vec{Q}-\vec{Q}\times\nabla\times\vec{E}^1\right)\cdot\hat{N}ds \qquad (2.54)$$

που συνδέει δυο επιφανειακά ολοκληρώματα όμοια με εκείνα που εμφανίζονται στο δεξιό μέλος της (2.50). Πράγματι, αν ληφθεί υπόψη η συνεχεία των εφαπτομενικων συνιστωσών της ηλεκτρικής και της μαγνητικής πεδιακής έντασης πάνω στην επιφάνεια S

$$\left[\hat{N}\times\vec{E}^1\right]_S = \left[\hat{N}\times\vec{E}^0\right]_S \tag{2.55α}$$

$$\left[\hat{N}\times\vec{H}^1\right]_S = \left[\hat{N}\times\vec{H}^0\right]_S \tag{2.55β}$$

το δεξί μέλος της (2.54) γράφεται ως εξής:

$$\int_S\left(\vec{E}^1\times\nabla\times\vec{Q}-\vec{Q}\times\nabla\times\vec{E}^1\right)\cdot\hat{N}ds = \int_S\left[\left(\nabla\times\vec{Q}\right)\cdot\left(\hat{N}\times\vec{E}^1\right)-\vec{Q}\cdot\left(\nabla\times\vec{E}^1\right)\times\hat{N}\right]ds =$$

$$=\int_S\left[\left(\nabla\times\vec{Q}\right)\cdot\left(\hat{N}\times\vec{E}^1\right)+j\omega\mu_0\vec{Q}\cdot\left(\hat{N}\times\vec{H}^1\right)\right]ds =$$

$$=\int_S\left[\left(\nabla\times\vec{Q}\right)\cdot\left(\hat{N}\times\vec{E}^0\right)+j\omega\mu_0\vec{Q}\cdot\left(\hat{N}\times\vec{H}^0\right)\right]ds =$$

$$=\int_S\left(\vec{E}^0\times\nabla\times\vec{Q}-\vec{Q}\times\nabla\times\vec{E}^0\right)\cdot\hat{N}ds \tag{2.56}$$

Με τις (2.53) και (2.54) είναι δυνατό, όπως θα γίνει αντιληπτό παρακάτω, να αντιμετωπισθούν προβλήματα σκέδασης που εμπλέκουν σφαιρική γεωμετρία.

2.4 Υπολογισμός ολοκληρωμάτων IMM

Είναι φανερό από την προηγούμενη παράγραφο, ότι για να εφαρμοσθούν έμμεσα οι οριακές συνθήκες απαιτείται ο υπολογισμός επιφανειακών ολοκληρωμάτων της μορφής

$$I = \int_S \left(\vec{P} \times \nabla \times \vec{Q} - \vec{Q} \times \nabla \times \vec{P} \right) \cdot \hat{N} ds \tag{2.57}$$

σε σφαιρική επιφάνεια S με ακτίνα, έστω α. Το διάνυσμα $\vec{P}$ θεωρείται εδώ ότι εκπροσωπεί την ηλεκτρική πεδιακή ένταση, που αναπτύσσεται σε άθροισμα διανυσματικών σφαιρικών κυματοσυναρτήσεων, σύμφωνα με τη (2.19). Η συνάρτηση δόκιμης $\vec{Q}$ μπορεί να είναι οποιαδήποτε από τις σφαιρικές διανυσματικές κυματοσυναρτήσεις $\vec{M}$ και $\vec{N}$. Είναι συνεπώς απαραίτητο να υπολογισθεί η ακτινική συνιστώσα του εξωτερικού γινόμενου δύο διανυσματικών σφαιρικών κυματοσυναρτήσεων.

Με εφαρμογή των (2.26) και (2.34) προκύπτουν εύκολα τα εξής:

$$\vec{M}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right) \times \vec{M}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right) \cdot \hat{r} =$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\phi} \\ 0 & jmz_n^{(i_1)}\left(k_1 r\right) \dfrac{P_n^m\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta} e^{jm\phi} & -z_n^{(i_1)}\left(k_1 r\right) \dfrac{dP_n^m\left(\cos\theta\right)}{d\theta} e^{jm\phi} \\ 0 & jkz_l^{(i_2)}\left(k_2 r\right) \dfrac{P_l^k\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta} e^{jk\phi} & -z_l^{(i_2)}\left(k_2 r\right) \dfrac{dP_l^k\left(\cos\theta\right)}{d\theta} e^{jk\phi} \end{vmatrix} \cdot \hat{r} \tag{2.58}$$

Η (2.58) προέκυψε από τον ορισμό του εξωτερικού γινόμενου δυο διανυσμάτων εκφρασμένα στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων και όπως γίνεται αντιληπτό περιλαμβάνει τα εσωτερικά γινόμενα $\hat{r} \cdot \hat{r}$, $\hat{\theta} \cdot \hat{r}$ και $\hat{\phi} \cdot \hat{r}$ εκ των οποίων τα δυο τελευταία είναι ίσα με το μηδέν λόγω της καθετότητας των διανυσμάτων $\hat{r}, \hat{\theta}$ και $\hat{\phi}$, ενώ $\hat{r} \cdot \hat{r} = 1$. Άρα η (2.58) συμπτύσσεται στην

$$\vec{M}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right) \times \vec{M}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right) \cdot \hat{r} = -jmz_n^{(i_1)}\left(k_1 r\right) z_l^{(i_2)}\left(k_2 r\right) \frac{P_n^m\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta} \frac{dP_l^k\left(\cos\theta\right)}{d\theta} e^{jm\phi} e^{jk\phi} +$$

$$+jkz_n^{(i_1)}\left(k_1 r\right) z_l^{(i_2)}\left(k_2 r\right) \frac{dP_n^m\left(\cos\theta\right)}{d\theta} \frac{P_l^k\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta} e^{jm\phi} e^{jk\phi} =$$

$$= jz_n^{(i_1)}\left(k_1 r\right) z_l^{(i_2)}\left(k_2 r\right)\left[-m\frac{P_n^m\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta}\frac{dP_l^k\left(\cos\theta\right)}{d\theta}+k\frac{dP_n^m\left(\cos\theta\right)}{d\theta}\frac{P_l^k\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right]e^{j(k+m)\phi}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{M}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right)\times\vec{M}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right)\cdot\hat{r} = jz_n^{(i_1)}\left(k_1 r\right) z_l^{(i_2)}\left(k_2 r\right){}^2\Theta_{nl}^{mk}\left(\theta\right)\Phi_{mk}\left(\phi\right) \qquad (2.59)$$

Στη (2.59) χρησιμοποιήθηκαν οι συντομογραφίες που ορίζονται από τις (2.45α,γ). Ολοκληρώνοντας τα δυο μέλη της (2.59) και με χρήση των (2.46α,γ), τελικά προκύπτει ότι

$$\int_S \vec{M}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right)\times\vec{M}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right)\cdot\hat{r}ds = j\alpha^2 z_n^{(i_1)}\left(k_1\alpha\right) z_l^{(i_2)}\left(k_2\alpha\right)\int_0^{\pi}{}^2\Theta_{nl}^{mk}\left(\theta\right)\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}\Phi_{mk}\left(\phi\right)d\phi\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_S \vec{M}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right)\times\vec{M}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right)\cdot\hat{r}ds = 0 \qquad (2.60)$$

Ακολουθώντας ακριβώς τα ίδια βήματα προκύπτει κάτι ανάλογο για το εξωτερικό γινόμενο δυο κυματοσυναρτήσεων $\vec{N}$.

$$\int_S \vec{N}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right)\times\vec{N}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right)\cdot\hat{r}ds = 0 \qquad (2.61)$$

Για τον υπολογισμό του γινόμενου δυο κυματοσυναρτήσεων $\vec{M}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)\times\vec{N}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)\cdot\hat{r}$, ακολουθείται η εξής διαδικασία:

$$\vec{M}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right)\times\vec{N}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right)\cdot\hat{r} =$$

$$=\begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\phi} \\ 0 & jmz_n^{(i_1)}\left(k_1 r\right)\dfrac{P_n^m\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta}e^{jm\phi} & -z_n^{(i_1)}\left(k_1 r\right)\dfrac{dP_n^m\left(\cos\theta\right)}{d\theta}e^{jm\phi} \\ \dfrac{l\left(l+1\right)}{k_2 r}z_l^{(i_2)}\left(k_2 r\right)P_l^k\left(\cos\theta\right)e^{jk\phi} & \eta_l^{(i_2)}\left(k_2 r\right)\dfrac{dP_l^k\left(\cos\theta\right)}{d\theta}e^{jk\phi} & jk\eta_l^{(i_2)}\left(k_2 r\right)\dfrac{P_l^k\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta}e^{jk\phi}\end{vmatrix}\cdot\hat{r}$$

(2.62)

Η παραπάνω εξίσωση μετά την εκτέλεση των εσωτερικών γινόμενων μεταξύ των διανυσμάτων $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ μετατρέπεται στην ακόλουθη

$$\vec{M}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right)\times\vec{N}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right)\cdot\hat{r} = j^2 mk z_n^{(i_1)}\left(k_1 r\right)\eta_l^{(i_2)}\left(k_2 r\right)\frac{P_n^m\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta}\frac{P_l^k\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta}e^{j(m+k)\phi} +$$

$$+z_n^{(i_1)}\left(k_1 r\right)\eta_l^{(i_2)}\left(k_2 r\right)\frac{dP_n^m\left(\cos\theta\right)}{d\theta}\frac{dP_l^k\left(\cos\theta\right)}{d\theta}e^{j(m+k)\phi} =$$

$$= z_n^{(i_1)}\left(k_1 r\right)\eta_l^{(i_2)}\left(k_2 r\right)\left[-mk\frac{P_n^m\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta}\frac{P_l^k\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta}+\frac{dP_n^m\left(\cos\theta\right)}{d\theta}\frac{dP_l^k\left(\cos\theta\right)}{d\theta}\right]e^{j(m+k)\phi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{M}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right)\times\vec{N}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right)\cdot\hat{r} = z_n^{(i_1)}\left(k_1 r\right)\eta_l^{(i_2)}\left(k_2 r\right){}^1\Theta_{nl}^{mk}\left(\theta\right)\Phi_{mk}\left(\phi\right) \qquad (2.63)$$

Η (2.63) περιλαμβάνει τις συντομογραφίες που έχουν ήδη ορισθεί στις (2.45α,β) και έχουν τις ιδιότητες (2.46α,β) αντίστοιχα. Αν εκτελεστεί ολοκλήρωση κατά μήκος της επιφάνειας S του σκεδαστή και στα δυο μέλη της (2.63), τότε η τελευταία εξελίσσεται σύμφωνα με τα παρακάτω :

$$\int_S \vec{M}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right)\times\vec{N}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right)\cdot\hat{r}ds = \alpha^2 z_n^{(i_1)}\left(k_1\alpha\right)\eta_l^{(i_2)}\left(k_2\alpha\right)\int_0^{\pi}{}^1\Theta_{nl}^{mk}\left(\theta\right)\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}\Phi_{mk}\left(\phi\right)d\phi \qquad (2.64)$$

Με χρήση των ιδιοτήτων (2.46α,β) η (2.64) παίρνει την τελική της μορφή:

$$\int_S \vec{M}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right)\times\vec{N}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right)\cdot\hat{r}ds = 4\pi\alpha^2\left(-1\right)^k\frac{n\left(n+1\right)}{2n+1}z_n^{(i_1)}\left(k_1\alpha\right)\eta_l^{(i_2)}\left(k_2\alpha\right)\delta_{m,-k}\delta_{nl} \qquad (2.65)$$

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα της (2.57) θα προσδιοριστεί για τις παρακάτω μορφές διανυσματικών μεγεθών $\vec{P}$, $\vec{Q}$

$$\vec{P}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}C_{mn}\vec{p}_{mn} \quad \mu\varepsilon \quad \vec{p}_{mn}=\vec{M}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right) \text{ ή } \vec{p}_{mn}=\vec{N}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right) \tag{2.66}$$

και

$$\vec{Q}=\vec{M}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right) \text{ ή } \vec{Q}=\vec{N}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right) \tag{2.67}$$

Ανάλογα με το είδος των διανυσματικών σφαιρικών κυματοσυναρτήσεων που χρησιμοποιούνται στη (2.66) και το είδος της συνάρτησης δόκιμης $\vec{Q}$, προκύπτει για το εν λόγω ολοκλήρωμα η έκφραση του πίνακα 2.1.

Για την περιγραφή του συντελεστή F_l στον πίνακα 2.1 χρησιμοποιούνται οι συντομογραφίες

$$U_n^{(i_1,i_2)}\left(u,v,r\right)=\frac{2n\left(n+1\right)}{2n+1}\left[vz_n^{(i_1)}\left(ur\right)\eta_n^{(i_2)}\left(vr\right)-u\eta_n^{(i_1)}\left(ur\right)z_n^{(i_2)}\left(vr\right)\right] \tag{2.68}$$

$$V_n^{(i_1,i_2)}\left(u,v,r\right)=\frac{2n\left(n+1\right)}{2n+1}\left[uz_n^{(i_1)}\left(ur\right)\eta_n^{(i_2)}\left(vr\right)-v\eta_n^{(i_1)}\left(ur\right)z_n^{(i_2)}\left(vr\right)\right] \tag{2.69}$$

Πίνακας 2.1

$I=\int_S\left(\vec{P}\times\nabla\times\vec{Q}-\vec{Q}\times\nabla\times\vec{P}\right)\cdot\hat{r}ds=2\pi\alpha^2\left(-1\right)^k C_{-kl}F_l$

$\vec{p}_{mn}$	$\vec{Q}$	F_l
$\vec{M}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right)$	$\vec{M}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right)$	$U_l^{(i_1,i_2)}\left(k_1,k_2,\alpha\right)$
$\vec{N}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right)$	$\vec{N}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right)$	$V_l^{(i_1,i_2)}\left(k_1,k_2,\alpha\right)$
$\vec{M}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right)$	$\vec{N}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right)$	0
$\vec{N}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right)$	$\vec{M}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right)$	0

Αν στις εκφράσεις (2.68) και (2.69), τεθεί $u=v$ και $i_1=i_2$ ισχύει ότι $V_n^{(i_1,i_1)}\left(u,u,r\right)=U_n^{(i_1,i_1)}\left(u,u,r\right)=0$. Η ιδιότητα αυτή χρησιμοποιείται αργότερα κατά την εφαρμογή των οριακών συνθηκών για τον προσδιορισμό των κυματικών συντελεστώ του σκεδαζόμενου κύματος.

Παρακάτω επιχειρείται η απόδειξη της πρώτης και της τρίτης γραμμής του πίνακα 2.1. Η απόδειξη της δεύτερης και της τέταρτης γραμμής του πίνακα πραγματοποιείται με τον ίδιο τρόπο.

Θέτοντας λοιπόν $\vec{p}_{mn}=\vec{M}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right)$ και $\vec{Q}=\vec{M}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right)$ το ολοκλήρωμα της (2.57) γράφεται ως εξής:

$$I=\int_S\left(\vec{P}\times\nabla\times\vec{Q}-\vec{Q}\times\nabla\times\vec{P}\right)\cdot\hat{r}ds=$$

$$\int_S\left[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}C_{mn}\vec{M}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right)\times\nabla\times\vec{M}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right)-\vec{M}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right)\times\nabla\times\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}C_{mn}\vec{M}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right)\right]\cdot\hat{r}ds=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\int_S\left[k_2C_{mn}\vec{M}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right)\times\vec{N}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right)-\vec{M}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right)\times k_1C_{mn}\vec{N}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right)\right]\cdot\hat{r}ds \tag{2.70}$$

Η εξίσωση (2.70) προήλθε από την χρήση των εξισώσεων (2.21) και (2.23β) που συνδέουν τις σφαιρικές διανυσματικές κυματοσυναρτήσεις σύμφωνα με τις οποίες ισχύει ότι $\nabla\times\vec{M}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)=k\vec{N}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)$ και $\nabla\times\vec{N}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)=k\vec{M}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)$. Για περαιτέρω επεξεργασία της (2.70) απαιτείται η εισαγωγή της (2.65) όποτε:

$$I=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}C_{mn}\left[\int_S k_2\vec{M}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right)\times\vec{N}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right)\cdot\hat{r}ds-\int_S k_1\vec{M}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right)\times\vec{N}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right)\cdot\hat{r}ds\right]=$$

$$=4\pi\alpha^2k_2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}C_{mn}\left(-1\right)^k\frac{n\left(n+1\right)}{2n+1}z_n^{(i_1)}\left(k_1\alpha\right)\eta_l^{(i_2)}\left(k_2\alpha\right)\delta_{m,-k}\delta_{nl}-$$

$$-4\pi\alpha^2 k_1 \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} C_{mn}\left(-1\right)^m \frac{l\left(l+1\right)}{2l+1} z_l^{(i_2)}\left(k_2\alpha\right)\eta_n^{(i_1)}\left(k_1\alpha\right)\delta_{k,-m}\delta_{ln} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = 2\pi\alpha^2\left(-1\right)^k C_{-kl}\frac{2l\left(l+1\right)}{2l+1}\left[k_2 z_l^{(i_1)}\left(k_1\alpha\right)\eta_l^{(i_2)}\left(k_2\alpha\right)-k_1 z_l^{(i_2)}\left(k_2\alpha\right)\eta_l^{(i_1)}\left(k_1\alpha\right)\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = 2\pi\alpha^2\left(-1\right)^k C_{-kl} U_l^{(i_1,i_2)}\left(k_1,k_2,\alpha\right) \tag{2.71}$$

Η (2.71) ταυτίζεται με την πρώτη γραμμή του πίνακα 2.1. Αν χρησιμοποιηθούν οι συναρτήσεις $\vec{p}_{mn} = \vec{M}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right)$ και $\vec{Q} = \vec{N}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right)$ τότε το επιφανειακό ολοκλήρωμα της (2.57) γράφεται ως εξής :

$$I = \int_S \left(\vec{P}\times\nabla\times\vec{Q} - \vec{Q}\times\nabla\times\vec{P}\right)\cdot\hat{r}ds =$$

$$\int_S \left[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} C_{mn}\vec{M}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right)\times\nabla\times\vec{N}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right) - \vec{N}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right)\times\nabla\times\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} C_{mn}\vec{M}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right)\right]\cdot\hat{r}ds =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\int_S \left[k_2 C_{mn}\vec{M}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right)\times\vec{M}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right) - k_1 C_{mn}\vec{N}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right)\times\vec{N}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right)\right]\cdot\hat{r}ds \tag{2.72}$$

Όμοια, η εξίσωση (2.72) προήλθε από τις (2.21) και (2.23β). Αν ληφθούν υπόψη οι (2.60) και (2.61) που αναφέρονται εδώ για λόγους συντομίας

$$\int_S \vec{M}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right)\times\vec{M}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right)\cdot\hat{r}ds = 0$$

$$\int_S \vec{N}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right)\times\vec{N}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right)\cdot\hat{r}ds = 0$$

η εξίσωση (2.72) δίνει αμέσως το ζητούμενο

$$I=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}C_{mn}\left[k_2\int_S \vec{M}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right)\times\vec{M}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right)\cdot\hat{r}ds-k_1\int_S \vec{N}_{kl}^{(i_2)}\left(k_2\vec{r}\right)\times\vec{N}_{mn}^{(i_1)}\left(k_1\vec{r}\right)\cdot\hat{r}ds\right]\Rightarrow$$

$$I=0 \tag{2.73}$$

Η (2.73) αποδεικνύει την τρίτη γραμμή του πίνακα 2.1. Όπως ήδη αναφέρθηκε, η απόδειξη της δεύτερης και τέταρτης γραμμής στηρίζεται στα ίδια βήματα.

2.5 *Επιφανειακές διανυσματικές συναρτήσεις*

Για την μελέτη του φαινομένου σκέδασης ενός επιπέδου και γραμμικά πολωμένου ηλεκτρομαγνητικού κύματος από διηλεκτρική σφαίρα, εισάγονται οι *επιφανειακές διανυσματικές συναρτήσεις* [*Morse & Feshbach, 1953*] που ορίζονται από τις παρακάτω εξισώσεις

$$\vec{P}_{mn}\left(\theta,\phi\right)=\hat{r}X_n^m\left(\theta,\phi\right) \tag{2.74α}$$

$$\vec{B}_{mn}\left(\theta,\phi\right)=\frac{r}{\sqrt{n\left(n+1\right)}}\nabla X_n^m\left(\theta,\phi\right) \tag{2.74β}$$

$$\vec{C}_{mn}\left(\theta,\phi\right)=\frac{1}{\sqrt{n\left(n+1\right)}}\nabla\times\left[\vec{r}X_n^m\left(\theta,\phi\right)\right] \tag{2.74γ}$$

όπου

$$X_n^m\left(\theta,\phi\right)=P_n^m\left(\cos\theta\right)e^{jm\phi} \tag{2.75}$$

είναι οι *βαθμωτές σφαιρικές αρμονικές*. Οι $\vec{P}_{mn}$, $\vec{B}_{mn}$, $\vec{C}_{mn}$ αποτελούν πλήρες σύνολο συναρτήσεων στο χώρο $0\le\theta\le\pi$, $0\le\phi\le 2\pi$ και συνδέονται με τις διανυσματικές σφαιρικές κυματοσυναρτήσεις με τρόπο που υποδεικνύουν οι παρακάτω εξισώσεις.

$$\hat{r}\left[\hat{r}\cdot\vec{L}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)\right]=k\left[z_n^{(i)}\left(kr\right)\right]'\vec{P}_{mn}\left(\theta,\phi\right) \tag{2.76α}$$

$$\hat{r}\times\vec{M}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)=\sqrt{n\left(n+1\right)}z_n^{(i)}\left(kr\right)\vec{B}_{mn}\left(\theta,\phi\right) \tag{2.76β}$$

$$\hat{r}\times\vec{N}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)=-\sqrt{n\left(n+1\right)}\eta_n^{(i)}\left(kr\right)\vec{C}_{mn}\left(\theta,\phi\right) \tag{2.76γ}$$

Παρακάτω επιχειρείται ο υπολογισμός των συνιστωσών των $\vec{B}_{mn}$ και $\vec{C}_{mn}$ στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων, μια και όπως θα φανεί παρακάτω, είναι αυτές που τελικά χρησιμοποιούνται για την ανάπτυξη των πεδιακών μεγεθών σε διανυσματικές σφαιρικές κυματοσυναρτήσεις. Έτσι με χρήση της εξίσωσης ορισμού της $\vec{B}_{mn}$ (2.74β), αλλά και της (2.75) προκύπτουν τα εξής

$$\vec{B}_{mn}\left(\theta,\phi\right)=\frac{r}{\sqrt{n\left(n+1\right)}}\nabla\left[P_n^m\left(\cos\theta\right)e^{jm\phi}\right]=$$

$$=\frac{r}{\sqrt{n\left(n+1\right)}}\left[\hat{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[P_n^m\left(\cos\theta\right)e^{jm\phi}\right]+\hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[P_n^m\left(\cos\theta\right)e^{jm\phi}\right]+\hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[P_n^m\left(\cos\theta\right)e^{jm\phi}\right]\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\vec{B}_{mn}\left(\theta,\phi\right)=\frac{e^{jm\phi}}{\sqrt{n\left(n+1\right)}}\left[\hat{\theta}\frac{dP_n^m\left(\cos\theta\right)}{d\theta}+jm\hat{\phi}\frac{P_n^m\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right] \tag{2.77}$$

Τα ίδια βήματα ακολουθούνται και για τον υπολογισμό της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{C}_{mn}$. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2.74γ) και (2.75) και με χρήση των διανυσματικών ταυτοτήτων $\nabla\times\left(\Phi\vec{A}\right)=\nabla\Phi\times\vec{A}+\Phi\nabla\times\vec{A}$ και $\nabla\times\vec{r}=0$ αποδεικνύονται εύκολα τα εξής:

$$\vec{C}_{mn}\left(\theta,\phi\right)=\frac{1}{\sqrt{n\left(n+1\right)}}\nabla\times\left[\vec{r}P_n^m\left(\cos\theta\right)e^{jm\phi}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\left[\nabla P_n^m(\cos\theta)e^{jm\phi}\times\vec{r}+P_n^m(\cos\theta)e^{jm\phi}\nabla\times\vec{r}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\vec{C}_{mn}(\theta,\phi)=\frac{1}{r}\vec{B}_{mn}(\theta,\phi)\times\vec{r}=$$

$$=\frac{e^{jm\phi}}{r\sqrt{n(n+1)}}\left[\hat{\theta}\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}+jm\hat{\phi}\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\right]\times\vec{r}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\vec{C}_{mn}(\theta,\phi)=\frac{e^{jm\phi}}{r\sqrt{n(n+1)}}\left[\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}\left(\hat{\theta}\times\vec{r}\right)+jm\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\left(\hat{\phi}\times\vec{r}\right)\right]\qquad(2.78)$$

και επειδή $\hat{\theta}\times\vec{r}=-r\hat{\phi}$ και $\hat{\phi}\times\vec{r}=r\hat{\theta}$ η (2.78) παίρνει τελικά τη μορφή:

$$\vec{C}_{mn}(\theta,\phi)=\frac{e^{jm\phi}}{\sqrt{n(n+1)}}\left[jm\hat{\theta}\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}-\hat{\phi}\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}\right]\qquad(2.79)$$

2.6 Σκέδαση από διηλεκτρική σφαίρα

Έστω διηλεκτρική σφαίρα με (μιγαδικό) δείκτη διάθλασης n_1, ακτίνα α και κέντρο την αρχή του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων (O;xyz) (σχ.2.2). Στην ανάλυση που ακολουθεί χρησιμοποιούνται οι παραδοχές ότι ο σκεδαστής περιβάλλεται από κενό χώρο και ότι το προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι επίπεδο και γραμμικά πολωμένο με κυματικό διάνυσμα:

$$\vec{k}_{inc}=k_0\left(\hat{x}\sin\theta_{inc}+\hat{z}\cos\theta_{inc}\right)\qquad(2.80)$$

Όπου $k_0 = 2\pi/\lambda$ είναι ο *κυματικός αριθμός του ελεύθερου χώρου*, $\lambda = 2\pi\big/\omega\sqrt{\mu_o \varepsilon_0}$ είναι το *μήκος κύματος* και θ_{inc} η γωνία που σχηματίζει η διεύθυνση πρόσπτωσης $\hat{i}$ με τον άξονα z.

Με αναφορά στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων (O; rθφ) η ηλεκτρική και η μαγνητική πεδιακή ένταση του προσπίπτοντος κύματος εκφράζονται ως εξής:

$$\vec{E}^{\iota}_{inc}\left(\vec{r}\right) = \hat{e}_{\iota} e^{j\vec{k}_{inc}\cdot\vec{r}} \tag{2.81α}$$

$$\vec{H}^{\iota}_{inc}\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{j\omega\mu_0}\nabla\times\vec{E}^{\iota}_{inc}\left(\vec{r}\right) \tag{2.81β}$$

Η (2.81α) υποδηλώνει ότι η ηλεκτρική πεδιακή ένταση του προσπίπτοντος κύματος έχει μοναδιαίο πλάτος στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Στις παραπάνω εκφράσεις, καθώς και σε όλη την υπόλοιπη μαθηματική ανάλυση, θεωρείται ότι τα πεδιακά μεγέθη έχουν αρμονική εξάρτηση από το χρόνο της μορφής $e^{-j\omega t}$ η οποία και παραλείπεται παντού. Η συχνότητα διέγερσης είναι $f = \omega/2\pi$. Το διάνυσμα $\hat{e}_{\iota}$ με ι=1 ή 2, εκπροσωπεί την πόλωση του προσπίπτοντος κύματος, που μπορεί να είναι *κάθετη (οριζόντια)*

$$\hat{e}_1 = \hat{y} = \hat{\varphi} \tag{2.82α}$$

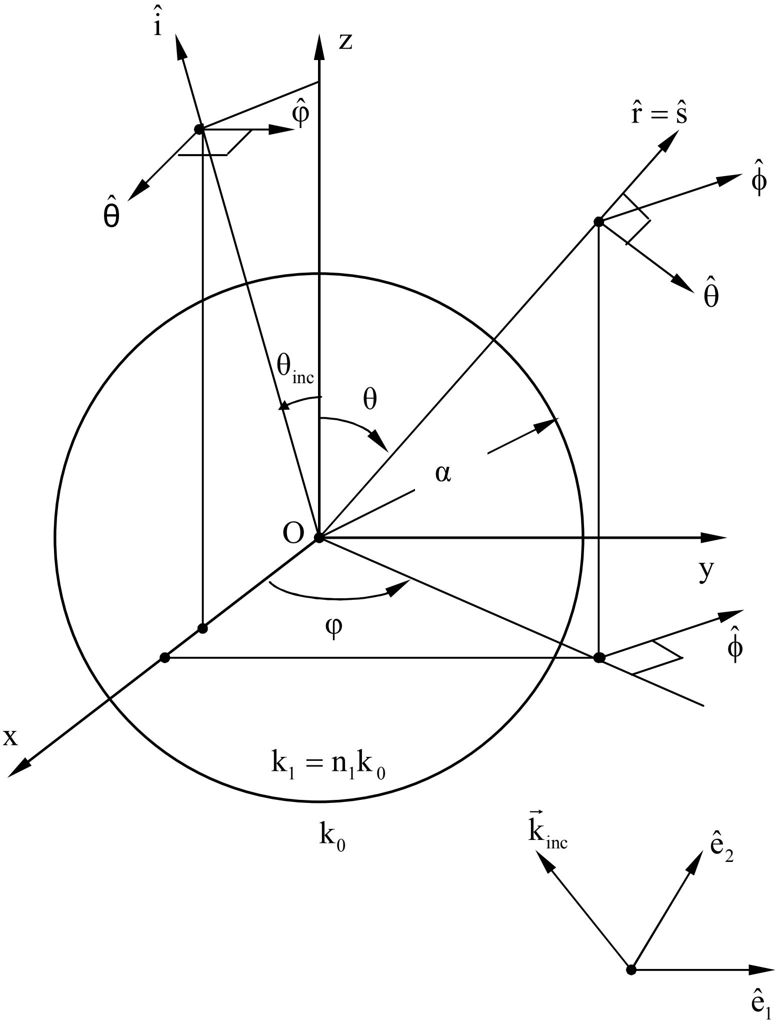
ή *παράλληλη (κατακόρυφη)*

$$\hat{e}_2 = -\hat{x}\cos\theta_{inc} + \hat{z}\sin\theta_{inc} = -\hat{\theta} \tag{2.82β}$$

ως προς το καρτεσιανό επίπεδο xOz που θεωρείται σαν επίπεδο πρόσπτωσης.

Όπως είναι ήδη γνωστό τα πεδιακά μεγέθη του προσπίπτοντος κύματος είναι δυνατό να αναπτυχθούν σε γραμμικό συνδυασμό διανυσματικών σφαιρικών κυματοσυναρτήσεων όπως υποδεικνύει η παρακάτω εξίσωση

$$\vec{E}^{\iota}_{inc}\left(\vec{r}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[C_{1,mn}\vec{M}^{(1)}_{mn}\left(k_0\vec{r}\right) + C_{2,mn}\vec{N}^{(1)}_{mn}\left(k_0\vec{r}\right)\right] \tag{2.83α}$$



Σχήμα 2.2 Σκέδαση από διηλεκτρική σφαίρα

Με την ίδια λογική το ίδιο μπορεί να αποδειχθεί και για την μαγνητική πεδιακή ένταση που αναπτύσσεται σε διανυσματικές σφαιρικές κυματοσυναρτήσεις ως εξής

$$\vec{H}^{\iota}_{inc}\left(\vec{r}\right)=\frac{1}{jZ_0}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[C_{1,mn}\vec{N}^{(1)}_{mn}\left(k_0\vec{r}\right)+C_{2,mn}\vec{M}^{(1)}_{mn}\left(k_0\vec{r}\right)\right] \quad (2.83\beta)$$

όπου

$$Z_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad (2.84)$$

είναι η *χαρακτηριστική αντίσταση του ελευθέρου χώρου.* Υπενθυμίζεται ότι οι $C_{1,mn}$ και $C_{2,mn}$ είναι προσδιοριστέες σταθερές. Στις εκφράσεις (2.83) τίθεται $i=1$ επειδή οι κυματοσυναρτήσεις που περιγράφουν το προσπίπτον, πρέπει να περιλαμβάνουν μόνο σφαιρικές συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους. (βλ. επίλυση διαφορικής εξίσωσης Bessel (2.14)).

Το ενδιαφέρον μετατοπίζεται τώρα στον προσδιορισμό των άγνωστων σταθερών $C_{1,mn}$ και $C_{2,mn}$. Με μεθοδολογία που αναπτύσσεται στο παράρτημα IV (παράγραφος IV.5A) αποδεικνύεται ότι οι τελευταίες προσδιορίζονται από τις παρακάτω σχέσεις.

$$C_{1,mn}=\xi_{mn}\lambda_{mn}^{\iota} \tag{2.85}$$

$$C_{2,mn}=-j\xi_{mn}\mu_{mn}^{\iota} \tag{2.86}$$

Στις (2.85) και (2.86) χρησιμοποιήθηκαν οι συντομογραφίες

$$\xi_{mn}=j^{n}\left(-1\right)^{m}\frac{2n+1}{\sqrt{n\left(n+1\right)}} \tag{2.87α}$$

$$\lambda_{mn}^{\iota}=\hat{e}_{\iota}\cdot\vec{C}_{-mn}\left(\theta_{inc},\phi_{inc}\right) \tag{2.87β}$$

$$\mu_{mn}^{\iota}=\hat{e}_{\iota}\cdot\vec{B}_{-mn}\left(\theta_{inc},\phi_{inc}\right) \tag{2.87γ}$$

Οπότε οι εκφράσεις των πεδιακών μεγεθών ανεπτυγμένων σε διανυσματικές σφαιρικές κυματοσυναρτήσεις και με βάση τις (2.83α,β), τροποποιούνται ως εξής:

$$\vec{E}_{inc}^{\iota}\left(\vec{r}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\xi_{mn}\left[\lambda_{mn}^{\iota}\vec{M}_{mn}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)-j\mu_{mn}^{\iota}\vec{N}_{mn}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)\right] \tag{2.88α}$$

$$\vec{H}_{inc}^{\iota}\left(\vec{r}\right)=\frac{1}{jZ_0}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\xi_{mn}\left[\lambda_{mn}^{\iota}\vec{N}_{mn}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)-j\mu_{mn}^{\iota}\vec{M}_{mn}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)\right] \tag{2.88β}$$

Οι συμβολισμοί $\vec{B}$ και $\vec{C}$ εκπροσωπούν τις επιφανειακές διανυσματικές συναρτήσεις που ορίσθηκαν από τις εξισώσεις (2.77) και (2.79), ενώ το σύμβολο ι παριστάνει την πόλωση του γραμμικά πολωμένου κύματος και μπορεί να παίρνει τιμές 1 ή 2 όπως φαίνεται και από τις σχέσεις (2.82α,β). Αντικαθιστώντας λοιπόν τις (2.77) και (2.79) στις (2.87β,γ), προκύπτουν οι παρακάτω εκφράσεις για τους συντελεστές του αναπτύγματος

$$\lambda_{mn}^{1} = \mu_{mn}^{2} = -\frac{e^{-jm\phi_{inc}}}{\sqrt{n(n+1)}}\left[\frac{dP_n^{-m}(\cos\theta)}{d\theta}\right]_{\theta=\theta_{inc}} \tag{2.89α}$$

$$\lambda_{mn}^{2} = -\mu_{mn}^{1} = jm\frac{e^{-jm\phi_{inc}}}{\sqrt{n(n+1)}}\left[\frac{P_n^{-m}(\cos\theta)}{\sin\theta}\right]_{\theta=\theta_{inc}} \tag{2.89β}$$

Οι εξισώσεις (2.83α,β) σε συνδυασμό με τις (2.87α) και (2.89α,β) ορίζουν πλήρως την προσπίπτουσα ακτινοβολία στο σφαιρικό διηλεκτρικό σκεδαστή.

Παρακάτω επιχειρείται ο υπολογισμός της ακτινοβολίας τόσο στο εξωτερικό όσο και στο εσωτερικό του σκεδαστή. Η ηλεκτρική πεδιακή ένταση του σκεδαζόμενου πεδίου $\vec{E}_{sca}^{\iota}(\vec{r})$, καθώς και εκείνη του πεδίου στο εσωτερικό του σφαιρικού σκεδαστή $\vec{E}^{1}(\vec{r})$, αναπτύσσονται επίσης σε αθροίσματα διανυσματικών σφαιρικών κυματοσυναρτήσεων :

$$\vec{E}_{sca}^{\iota}(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[a_{mn}^{\iota}\vec{M}_{mn}^{(3)}(k_0\vec{r}) + b_{mn}^{\iota}\vec{N}_{mn}^{(3)}(k_0\vec{r})\right] \tag{2.90}$$

$$\vec{E}^{1}(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[c_{mn}^{\iota}\vec{M}_{mn}^{(1)}(k_1\vec{r}) + d_{mn}^{\iota}\vec{N}_{mn}^{(1)}(k_1\vec{r})\right] \tag{2.91}$$

Οι κυματικοί συντελεστές a_{mn}^{ι}, b_{mn}^{ι}, c_{mn}^{ι}, d_{mn}^{ι} των παραπάνω αναπτυγμάτων θα προσδιοριστούν με έμμεση εφαρμογή των οριακών συνθηκών στη σφαιρική επιφάνεια.

Η συνολική ηλεκτρική πεδιακή ένταση στο εξωτερικό της σφαίρας είναι:

$$\vec{E}^0(\vec{r}) = \vec{E}^1_{sca}(\vec{r}) + \vec{E}^1_{inc}(\vec{r}) \tag{2.92}$$

Συνδυάζοντας τη (2.92) με τις (2.90) και (2.91) προκύπτει η ηλεκτρική πεδιακή ένταση στο εξωτερικό του σκεδαστή αναπτυγμένη σε γραμμικό συνδυασμό διανυσματικών σφαιρικών κυματοσυναρτήσεων και σειρών που περιλαμβάνουν τους κυματικούς συντελεστές όπως διαπιστώνεται από την παρακάτω εξίσωση

$$\vec{E}^0(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[a^1_{mn}\vec{M}^{(3)}_{mn}(k_0\vec{r}) + b^1_{mn}\vec{N}^{(3)}_{mn}(k_0\vec{r}) + \xi_{mn}\lambda^1_{mn}\vec{M}^{(1)}_{mn}(k_0\vec{r}) - j\xi_{mn}\mu^1_{mn}\vec{N}^{(1)}_{mn}(k_0\vec{r})\right] \tag{2.93}$$

Αν εφαρμοστεί το διανυσματικό θεώρημα Green στο χώρο που περικλείει η σφαιρική επιφάνεια, προκύπτει η εξής ολοκληρωτική εξίσωση

$$\int_S \left(\vec{E}^1 \times \nabla \times \vec{Q}^1 - \vec{Q}^1 \times \nabla \times \vec{E}^1\right)\cdot \hat{r}ds = 0 \tag{2.94}$$

Η έμμεση εφαρμογή των οριακών συνθηκών, όπως ήδη αποδείχθηκε στην ενότητα 2.3, μετατρέπει τη (2.94) σε εξίσωση IMM πρώτου είδους

$$\int_S \left(\vec{E}^0 \times \nabla \times \vec{Q}^1 - \vec{Q}^1 \times \nabla \times \vec{E}^0\right)\cdot \hat{r}ds = 0 \tag{2.95}$$

Η συνάρτηση δόκιμης $\vec{Q}^1$ μπορεί να είναι κάποια από τις διανυσματικές σφαιρικές κυματοσυναρτήσεις $\vec{M}^{(1)}_{kl}(k_1\vec{r})$ ή $\vec{N}^{(1)}_{kl}(k_1\vec{r})$, δηλαδή ικανοποιεί την ομογενή διανυσματική εξίσωση Helmholtz στο εσωτερικό της s.

Συγκεκριμένα, η συνάρτηση δοκιμής τίθεται αρχικά $\vec{Q}^1 = \vec{M}^{(1)}_{kl}(k_1\vec{r})$. Με εφαρμογή του αλγόριθμου που αναπτύχθηκε στον πίνακα 2.1, καθώς και της ιδιότητας $U^{(i,i)}_n(k,k,\alpha) = V^{(i,i)}_n(k,k,\alpha) = 0$ που αναφέρθηκε παραπάνω (βλ. ενότητα 2.5), η (2.95) σε συνδυασμό με τη (2.93) οδηγεί στην παρακάτω γραμμική εξίσωση.

$$2\pi\alpha^2\left(-1\right)^k\left[\xi_{-kl}\lambda^{\iota}_{-kl}U_l^{(1,1)}\left(k_0,k_1,\alpha\right)+a^{\iota}_{-kl}U_l^{(3,1)}\left(k_0,k_1,\alpha\right)\right]=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\xi_{-kl}\lambda^{\iota}_{-kl}U_l^{(1,1)}\left(k_0,k_1,\alpha\right)+a^{\iota}_{-kl}U_l^{(3,1)}\left(k_0,k_1,\alpha\right)=0 \qquad (2.96\alpha)$$

Για $\vec{Q}^1=\vec{N}_{kl}^{(1)}\left(k_1\vec{r}\right)$ η εφαρμογή του αλγόριθμου του πίνακα 2.1 οδηγεί τη (2.95) στη δεύτερη γραμμική εξίσωση

$$2\pi\alpha^2\left(-1\right)^k\left[-j\xi_{-kl}\mu^{\iota}_{-kl}V_l^{(1,1)}\left(k_0,k_1,\alpha\right)+b^{\iota}_{-kl}V_l^{(3,1)}\left(k_0,k_1,\alpha\right)\right]=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-j\xi_{-kl}\mu^{\iota}_{-kl}V_l^{(1,1)}\left(k_0,k_1,\alpha\right)+b^{\iota}_{-kl}V_l^{(3,1)}\left(k_0,k_1,\alpha\right)=0 \qquad (2.96\beta)$$

Από τις εξισώσεις (2.96α,β) προσδιορίζονται αμέσως οι άγνωστοι κυματικοί συντελεστές της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης του σκεδαζόμενου πεδίου

$$a^{\iota}_{mn}=-\xi_{mn}\lambda^{\iota}_{mn}\frac{U_n^{(1,1)}\left(k_0,k_1,\alpha\right)}{U_n^{(3,1)}\left(k_0,k_1,\alpha\right)} \qquad (2.97\alpha)$$

$$b^{\iota}_{mn}=j\xi_{mn}\mu^{\iota}_{mn}\frac{V_n^{(1,1)}\left(k_0,k_1,\alpha\right)}{V_n^{(3,1)}\left(k_0,k_1,\alpha\right)} \qquad (2.97\beta)$$

Επιπλέον, με έμμεση εφαρμογή της συνέχειας των πεδιακών μεγεθών στη σφαιρική επιφάνεια S προκύπτει η εξίσωση IMM δεύτερου είδους

$$\int_S\left(\vec{E}^0\times\nabla\times\vec{Q}^0-\vec{Q}^0\times\nabla\times\vec{E}^0\right)\cdot\hat{r}ds=\int_S\left(\vec{E}^1\times\nabla\times\vec{Q}^0-\vec{Q}^0\times\nabla\times\vec{E}^1\right)\cdot\hat{r}ds=0$$

(2.98)

Αν στη (2.98) χρησιμοποιηθούν οι συναρτήσεις δόκιμης $\vec{Q}^0=\vec{M}_{kl}^{(3)}\left(k_0\vec{r}\right)$ και $\vec{Q}^0=\vec{N}_{kl}^{(3)}\left(k_0\vec{r}\right)$ και εφαρμοστεί πάλι ο αλγόριθμος του πίνακα 2.1 καθώς και της γνωστής ιδιότητας $U_n^{(i,i)}\left(k,k,\alpha\right)=V_n^{(i,i)}\left(k,k,\alpha\right)=0$ τότε θα προκύψουν δυο νέες γραμμικές εξισώσεις.

Συγκεκριμένα, για συνάρτηση δόκιμης $\vec{Q}^0 = \vec{M}_{kl}^{(3)}\left(k_0\vec{r}\right)$ η (2.98) οδηγεί στην

$$2\pi\alpha^2\left(-1\right)^k\left[\xi_{-kl}\lambda_{-kl}^{\iota}U_l^{(1,3)}\left(k_0,k_0,\alpha\right)-c_{-kl}^{\iota}U_l^{(1,3)}\left(k_1,k_0,\alpha\right)\right]=0\Rightarrow$$

$$\xi_{-kl}\lambda_{-kl}^{\iota}U_l^{(1,3)}\left(k_0,k_0,\alpha\right)-c_{-kl}^{\iota}U_l^{(1,3)}\left(k_1,k_0,\alpha\right)=0 \tag{2.99α}$$

Όμοια, η χρήση της συνάρτησης δόκιμης $\vec{Q}^0 = \vec{N}_{kl}^{(3)}\left(k_0\vec{r}\right)$ μετατρέπει τη (2.98) στην παρακάτω εξίσωση

$$2\pi\alpha^2\left(-1\right)^k\left[-j\xi_{-kl}\mu_{-kl}^{\iota}V_l^{(1,3)}\left(k_0,k_0,\alpha\right)-d_{-kl}^{\iota}V_l^{(1,3)}\left(k_1,k_0,\alpha\right)\right]=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -j\xi_{-kl}\mu_{-kl}^{\iota}V_l^{(1,3)}\left(k_0,k_0,\alpha\right)-d_{-kl}^{\iota}V_l^{(1,3)}\left(k_1,k_0,\alpha\right)=0 \tag{2.99β}$$

Από τις (2.99α,β) προσδιορίζονται οι άγνωστοι κυματικοί συντελεστές της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης στο εσωτερικό της σφαίρας:

$$c_{mn}^{\iota}=\xi_{mn}\lambda_{mn}^{\iota}\frac{U_n^{(1,3)}\left(k_0,k_0,\alpha\right)}{U_n^{(1,3))}\left(k_1,k_0,\alpha\right)} \tag{2.100α}$$

$$d_{mn}^{\iota}=-j\xi_{mn}\mu_{mn}^{\iota}\frac{V_n^{(1,3)}\left(k_0,k_0,\alpha\right)}{V_n^{(1,3))}\left(k_1,k_0,\alpha\right)} \tag{2.100β}$$

Είναι απαραίτητο να αναφερθεί ότι η παραπάνω λύση ταυτίζεται με εκείνη που προκύπτει με τη θεωρία του Mie, δηλαδή με άμεση εφαρμογή των οριακών συνθηκών [*Van de Hulst, 1957, Ishimaru, 1978*].

2.7. Πηγές περιορισμένων διαστάσεων.

Στις προηγούμενες ενότητες εξετάστηκε και αναλύθηκε ο τρόπος που σκεδάζεται ένα επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα όταν προσπίπτει σε σφαιρικό σκεδαστή και προσδιορίσθηκαν με ακρίβεια οι κυματικοί συντελεστές του προσπίπτοντος, του σκεδαζόμενου και του διαθλώμενου κύματος. Στην παράγραφο αυτή μελετάται το φαινόμενο της σκέδασης από σφαίρα όταν η προέλευση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος είναι μια πηγή περιορισμένων διαστάσεων και επιχειρείται ο ακριβής υπολογισμός των πεδιακών μεγεθών μέσα και έξω από τη σφαίρα. Στη συνέχεια, τα αποτελέσματα αυτά εφαρμόζονται στην συγκεκριμένη περίπτωση που το ηλεκτρομαγνητικό κύμα προέρχεται από ένα δίπολο Hertz.

Δίπολο Hertz ονομάζεται η στοιχειώδης κεραία, η οποία συνίσταται από ένα στοιχειώδη κυλινδρικό αγωγό, που έχει αμελητέα διατομή. Το δίπολο διαρρέεται σε όλο το μήκος του από σταθερό ρεύμα, το οποίο όμως μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο δηλαδή συναρτήσει το όρου $e^{-j\omega t}$. Η πυκνότητα ρεύματος είναι έστω $\vec{J}(\vec{r})$ και η πυκνότητα επιφανειακών φορτίων που δίνεται από την εξίσωση συνέχειας, είναι $\rho(\vec{r}) = \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}) / j\omega$. Τα δυο αυτά μεγέθη εκφράζονται με βάση το τοπικό σύστημα συντεταγμένων $(O; r\theta\phi)$. Οι εκφράσεις της ηλεκτρικής και της μαγνητικής πεδιακής έντασης μπορούν να εκφραστούν και πάλι σαν συνδυασμοί γραμμικών διανυσματικών σφαιρικών κυματοσυναρτήσεων, αν επιλυθεί η μη ομογενής βαθμωτή εξίσωση Helmholtz.

Οι εξισώσεις Maxwell για μέσο στο οποίο υπάρχει πηγή έχουν τη μορφή:

$$\nabla \times \vec{E} = j\omega\mu_0 \vec{H} \tag{2.101}$$

$$\nabla \times \vec{H} = -j\omega\varepsilon \vec{E} + \vec{J} \tag{2.102}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} = \frac{\nabla \cdot \vec{J}}{j\omega\varepsilon} \tag{2.103}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \tag{2.104}$$

Οι εξισώσεις 2.103 και 2.104 φανερώνουν ότι παρουσία πηγών, η ηλεκτρική πεδιακή ένταση δεν είναι σωληνοειδής, δηλαδή $\nabla\cdot\vec{E}\neq 0$. Αντίθετα, για τη μαγνητική πεδιακή ένταση ισχύει $\nabla\cdot\vec{H}=0$. Για την περαιτέρω ανάλυση είναι σκόπιμο να χρησιμοποιηθούν σωληνοειδή πεδιακά μεγέθη. Για το λόγο αυτό εισάγονται οι πεδιακές μεταβλητές $\vec{H}'=\vec{H}$ και

$$\vec{E}'=\vec{E}-\frac{1}{j\omega\varepsilon}\vec{J} \tag{2.105}$$

Η (2.105) φανερώνει ότι στην περιοχή εκτός των πηγών, η ηλεκτρική πεδιακή ένταση $\vec{E}'$ γίνεται ίση με $\vec{E}$. Για τις μεταβλητές αυτές ισχύει ότι

$$\nabla\cdot\vec{H}'=\nabla\cdot\vec{H}=0 \tag{2.106}$$

$$\nabla\cdot\vec{E}'=\nabla\cdot\vec{E}-\frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla\cdot\vec{J}=\frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla\cdot\vec{J}-\frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla\cdot\vec{J}\Rightarrow\nabla\cdot\vec{E}'=0 \tag{2.107}$$

Η εισαγωγή των μεταβλητών αυτών τροποποιεί τις δυο πρώτες εξισώσεις Maxwell (2.101) και (2.102) ως εξής

$$\nabla\times\vec{E}=j\omega\mu_0\vec{H}\Rightarrow\nabla\times\left(\vec{E}'+\frac{1}{j\omega\varepsilon}\vec{J}\right)=j\omega\mu_0\vec{H}'\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\nabla\times\vec{E}'=j\omega\mu_0\vec{H}'-\frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla\times\vec{J} \tag{2.108}$$

και

$$\nabla\times\vec{H}=-j\omega\varepsilon\vec{E}+\vec{J}\Rightarrow\nabla\times\vec{H}'=-j\omega\varepsilon\left(\vec{E}'+\frac{1}{j\omega\varepsilon}\vec{J}\right)+\vec{J}=-j\omega\varepsilon\vec{E}'-\frac{j\omega\varepsilon}{j\omega\varepsilon}\vec{J}+\vec{J}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\nabla\times\vec{H}'=-j\omega\varepsilon\vec{E}' \tag{2.109}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (2.108) επί τον τελεστή $\nabla\times$, με αντικατάσταση της (2.109), αλλά και με εφαρμογή της διανυσματικής ταυτότητας $\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\nabla\nabla\cdot\vec{A}-\nabla^2\vec{A}$, προκύπτει ότι

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}'=j\omega\mu_0\nabla\times\vec{H}'-\frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla\times\nabla\times\vec{J}\Rightarrow\nabla\times\nabla\times\vec{E}'=j\omega\mu_0\left(-j\omega\varepsilon\vec{E}'\right)-\frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla\times\nabla\times\vec{J}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\nabla\nabla\cdot\vec{E}'-\nabla^2\vec{E}'=k^2\vec{E}'-\frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla\times\nabla\times\vec{J}\xrightarrow{\nabla\cdot\vec{E}'=0}-\nabla^2\vec{E}'=k^2\vec{E}'-\frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla\times\nabla\times\vec{J}$$

(2.110)

Εν συνεχεία, η (2.110) πολλαπλασιάζεται εσωτερικά και από αριστερά με το διάνυσμα $\vec{r}$. Με ταυτόχρονη εφαρμογή της διανυσματικής ταυτότητας $\nabla^2\left(r\cdot\vec{A}\right)=r\cdot\nabla^2\vec{A}-2\nabla\cdot\vec{A}$, που αποδεικνύεται στο παράρτημα Ι, η (2.110) μετατρέπεται στην παρακάτω

$$-\vec{r}\cdot\nabla^2\vec{E}'=k^2\left(\vec{r}\cdot\vec{E}'\right)-\frac{1}{j\omega\varepsilon}\vec{r}\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{J}\xrightarrow[r\cdot\nabla^2\vec{E}'=\nabla^2\left(r\cdot\vec{E}'\right)-2\nabla\cdot\vec{E}']{\nabla\cdot\vec{E}'=0}$$

$$\Rightarrow\nabla^2\left(\vec{r}\cdot\vec{E}'\right)+2\nabla\cdot\vec{E}'+k^2\left(\vec{r}\cdot\vec{E}'\right)=\frac{1}{j\omega\varepsilon}\vec{r}\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{J}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\nabla^2+k^2\right)\vec{r}\cdot\vec{E}'=-\frac{j}{\omega\varepsilon}\vec{r}\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{J} \qquad (2.111)$$

Όμοια, πολλαπλασιάζοντας εξωτερικά την (2.109) επί τον τελεστή $\nabla\times$ και ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, προκύπτει ότι

$$\nabla\times\vec{H}'=-j\omega\varepsilon\vec{E}'\Rightarrow\nabla\times\nabla\times\vec{H}'=-j\omega\varepsilon\nabla\times\vec{E}'\xrightarrow[\nabla\times\vec{r}=0]{\nabla\left(\vec{r}\times\vec{J}\right)=\vec{J}\cdot\nabla\times\vec{r}-\vec{r}\cdot\nabla\times\vec{J}}$$

$$\Rightarrow\nabla\nabla\cdot\vec{H}'-\nabla^2\vec{H}'=-j\omega\varepsilon\left(j\omega\mu_0\vec{H}'-\frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla\times\vec{J}\right)\Rightarrow-\nabla^2\vec{H}'=k^2\vec{H}'+\nabla\times\vec{J}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\vec{r}\cdot\nabla^2\vec{H}' = k^2\left(\vec{r}\cdot\vec{H}'\right) + \vec{r}\cdot\nabla\times\vec{J} \Rightarrow \vec{r}\cdot\nabla^2\vec{H}' + k^2\left(\vec{r}\cdot\vec{H}'\right) = -\vec{r}\cdot\nabla\times\vec{J} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla^2\left(\vec{r}\cdot\vec{H}'\right) + 2\nabla\cdot\vec{H} + k^2\left(\vec{r}\cdot\vec{H}'\right) = \nabla\cdot\left(\vec{r}\times\vec{J}\right) - \vec{J}\cdot\nabla\times\vec{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\nabla^2 + k^2\right)\vec{r}\cdot\vec{H}' = \nabla\cdot\left(\vec{r}\times\vec{J}\right) \tag{2.112}$$

Οι (2.111) και (2.112) κατά το παράρτημα IV(παράγραφος IV.4) έχουν λύσεις

$$\vec{r}\cdot\vec{E}' = \frac{j}{\omega\varepsilon}\int_{V'} \frac{e^{jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\vec{r}'\cdot\nabla'\times\nabla'\times\vec{J}\left(\vec{r}'\right)dv' \tag{2.113}$$

$$\vec{r}\cdot\vec{H}' = -\int_{V'} \frac{e^{jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\nabla'\cdot\left[\vec{r}'\times\vec{J}\left(\vec{r}'\right)\right]dv' \tag{2.114}$$

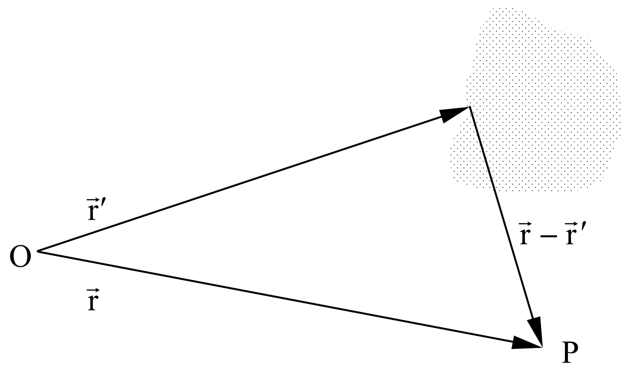
όπου $\frac{e^{jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}$ είναι η *συνάρτηση Green* για την οποία χρησιμοποιείται η παρακάτω προσεγγιστική σχέση [*Classical Electrodynamics ; J.D. Jackson, 1975*]:

$$\frac{e^{jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = jk\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=-l}^{l}\frac{(2l+1)(l-k)!}{(l+k)!}j_l\left(kr'\right)h_l^{(1)}\left(kr\right)P_l^k\left(\cos\theta'\right)P_l^k\left(\cos\theta\right)e^{-jk\phi'}e^{jk\phi} \tag{2.115}$$

Περισσότερα για τη συνάρτηση Green αναφέρονται στο παράρτημα IV.

Όπως κάθε μη ομογενής διαφορική εξίσωση, έτσι και η μη ομογενής βαθμωτή εξίσωση Helmholtz έχει λύσεις τις λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς. Η λύση της ομογενούς εξίσωσης Helhmholtz έχει ήδη προσδιοριστεί στην παράγραφο 2.2 και δίνεται από την σχέση

$$f_{mn}^{(i)}\left(kr\right) = z_n^{(i)}\left(kr\right)P_n^m\left(\cos\theta\right)e^{jm\phi} \tag{2.116}$$



Σχήμα 2.3. Σχετική θέση των διανυσμάτων θέσης $\vec{r}$ και $\vec{r}'$.
Το γραμμοσκιασμένο τμήμα δηλώνει την ύπαρξη πηγής

Οι τόνοι στις (2.113), (2.114) και (2.115) υποδηλώνουν ότι τα συγκεκριμένα μεγέθη ορίζονται στην περιοχή εντός της περιορισμένης πηγής, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.3.

Τα διανυσματικά πεδιακά μεγέθη του προσπίπτοντος κύματος μπορούν να γραφούν σαν γραμμικοί συνδυασμοί διανυσματικών σφαιρικών κυματοσυναρτήσεων με την εξής μορφή:

$$\vec{E}(\vec{r})=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[C_{1,mn}\vec{M}_{mn}^{(1)}(k_0\vec{r})+C_{2,mn}\vec{N}_{mn}^{(1)}(k_0\vec{r})\right] \tag{2.117}$$

$$\vec{H}(\vec{r})=\frac{1}{jZ_0}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[C_{1,mn}\vec{N}_{mn}^{(1)}(k_0\vec{r})+C_{2,mn}\vec{M}_{mn}^{(1)}(k_0\vec{r})\right] \tag{2.118}$$

Η ανάλυση πλέον εστιάζεται στον προσδιορισμό των κυματικών συντελεστών $C_{1,mn}$ και $C_{2,mn}$. Με μεθοδολογία που αναπτύσσεται στο παράρτημα IV(παράγραφος IV.5B.), προκύπτει ότι οι κυματικοί συντελεστές του προσπίπτοντος κύματος δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$C_{1,mn}=\frac{Z_0k_0^2}{4\pi}\frac{2n+1}{n(n+1)}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_V \nabla\cdot\left(\vec{r}\times\vec{J}(\vec{r})\right)\left[j_n(k_0r)P_n^m(\cos\theta)e^{-jm\phi}\right]dv$$

(2.119)

$$C_{2,mn} = j\frac{k_0^2}{4\pi}\frac{2n+1}{n(n+1)}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_V\left[\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{d}{dr}\left[rj_n(k_0r)\right]+j\omega\mu_0\left(\vec{r}\cdot\vec{J}(\vec{r})\right)j_n(k_0r)\right]P_n^m(\cos\theta)e^{-jm\phi}dv$$

(2.120)

2.8.Διηλεκτρική Σφαίρα και Δίπολο Hertz.

Στην παράγραφο αυτή μελετάται ο τρόπος που αντιμετωπίζεται το φαινόμενο της σκέδασης από διηλεκτρική σφαίρα, όταν προσπίπτει σε αυτή ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία παραγόμενη από πηγή περιορισμένων διαστάσεων.

Ας θεωρηθεί μια γραμμική διπολική κεραία μήκους l, το κέντρο της οποίας ταυτίζεται με το σημείο O (σχ. 2.4). Η διπολική κεραία είναι τοποθετημένη σε διεύθυνση ταυτίζεται με τη διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος πόλωσης του κύματος $\hat{e}$ (αυθαίρετη επιλογή) και σε απόσταση d από το κέντρο της σφαίρας (σχ.2.4). Αυτή η περιορισμένη πηγή αναπαρίσταται από μια σφαιρική επιφάνεια που συμβολίζεται με V και έχει ακτίνα $l/2$. Στο εσωτερικό αυτής της νοητής σφαίρας η πυκνότητα της ρευματικής κατανομής δίνεται από την εξίσωση

$$\vec{J}(\vec{r}) = \frac{I(r)}{2\pi r^2}\left[\delta(\theta-\theta_e)\delta(\phi-\phi_e)-\delta(\theta-\pi+\theta_e)\delta(\phi-\pi-\phi_e)\right]\hat{r} \qquad (2.121)$$

Αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση αυτή (παράρτημα IV, παράγραφος IV.5B) ότι οι κυματικοί συντελεστές δίνονται από απλοποιημένες εκφράσεις των (2.119) και (2.120) αντίστοιχα.

$$C_{1,mn} = 0 \qquad (2.122)$$

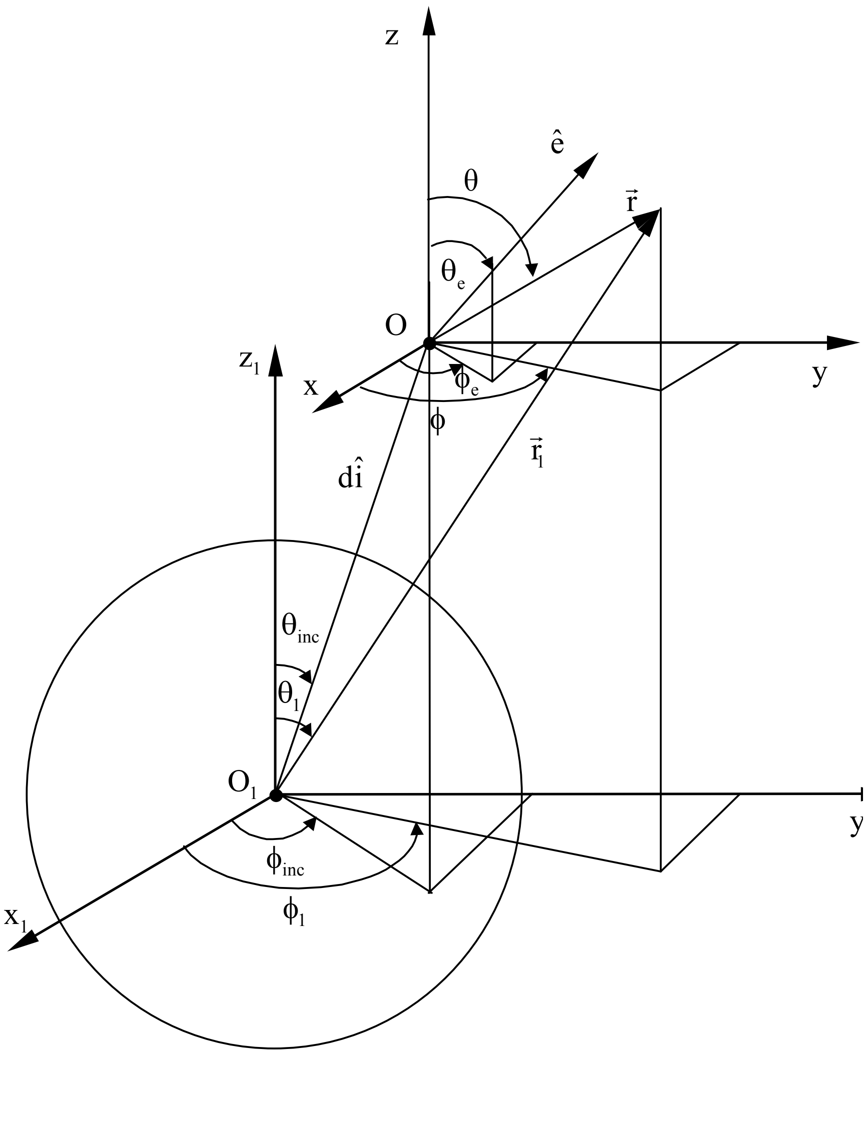
$$C_{2,mn} = -30k_0^2I_0l\left[1-\cos(n\pi)\right]\frac{2n+1}{2n(n+1)}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}j_n\left(\frac{k_0l}{2}\right)P_n^m(\cos\theta_e)e^{-jm\phi_e}$$

(2.123)

Στην περίπτωση που το μοναδιαίο διάνυσμα πόλωσης ταυτίζεται με τον άξονα των z $\hat{e}_\iota = z$, οι παραπάνω εξισώσεις απλοποιούνται ακόμη περισσότερο

$$C_{1,mn} = 0 \tag{2.124}$$

$$C_{2,mn} = -30k_0^2 I_0 l\left[1-\cos\left(n\pi\right)\right]\frac{2n+1}{2n\left(n+1\right)}j_n\left(\frac{k_0 l}{2}\right)\delta_{m,0} \tag{2.125}$$



Σχήμα 2.4. Δίπολο Hertz και διηλεκτρική σφαίρα

Είναι προφανές πλέον, ότι στην περίπτωση αυτή, τα συστήματα συντεταγμένων που απαιτούνται για την αντιμετώπιση του προβλήματος είναι δυο. Το πρώτο, είναι το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων με αρχή το κέντρο του δίπολου $(O;r\theta\phi)$, ενώ το δεύτερο έχει αρχή το κέντρο της διηλεκτρικής σφαίρας $(O_1;r_1\theta_1\phi_1)$.

Οι κυματικοί συντελεστές του προσπίπτοντος κύματος a^0_{mn}, c^0_{mn} είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των συντελεστών $C_{1,mn}$, $C_{2,mn}$ που προσδιορίσθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο και κάποιων άλλων συντελεστών $A^{\mu\nu}_{mn,3}$, $B^{\mu\nu}_{mn,3}$ που βοηθούν στην μετατροπή των συστημάτων συντεταγμένων όπως υποδεικνύεται παρακάτω

$$a^0_{mn} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\nu}^{\nu}\left[C_{1,\mu\nu}A^{\mu\nu}_{mn,3} + C_{2,\mu\nu}B^{\mu\nu}_{mn,3}\right] \tag{2.126α}$$

$$c^0_{mn} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\nu}^{\nu}\left[C_{1,\mu\nu}B^{\mu\nu}_{mn,3} + C_{2,\mu\nu}A^{\mu\nu}_{mn,3}\right] \tag{2.126β}$$

Οι συντελεστές $A^{\mu\nu}_{mn,3}$ και $B^{\mu\nu}_{mn,3}$ είναι οι συντελεστές σύζευξης που προσδιορίζονται από την εφαρμογή του προσθετικού θεωρήματος και σχετίζονται με την μεταφορά των διανυσματικών σφαιρικών κυματοσυναρτήσεων από το σύστημα $(O;r\theta\phi)$ στο $(O_1;r_1\theta_1\phi_1)$. Ο τρόπος προσδιορισμού τους περιγράφεται στο Παράρτημα IV

Οι σχέσεις (2.126α,β) ισχύουν για οποιαδήποτε πηγή περιορισμένων διαστάσεων και εφόσον $r_1 \le d$ όπου d είναι η απόσταση του σημείου O_1 από το σημείο O.

2.9 Διατομές Σκέδασης

Η ηλεκτρική πεδιακή ένταση του σκεδαζόμενου κύματος σε μεγάλη απόσταση από το σκεδαστή, δηλαδή για $k_0 r \gg 1$, έχει τη μορφή [*Χρυσουλίδης, 1995*]

$$\vec{E}^{\iota}_{sca}(\vec{r}) = \vec{f}^{\iota}\left(\hat{i},\hat{s}\right)\frac{e^{jk_0 r}}{r} \tag{2.127}$$

όπου $\hat{s}=\vec{r}/r$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση σκέδασης και $\vec{f}^{\iota}\left(\hat{i},\hat{s}\right)$ είναι το *πλάτος σκέδασης* που εξαρτάται από τις διευθύνσεις πρόσπτωσης $\hat{i}$ και σκέδασης $\hat{s}$. Επιπλέον, η ηλεκτρική πεδιακή ένταση του σκεδαζόμενου κύματος αναπτύσσεται σε γραμμικό συνδυασμό διανυσματικών σφαιρικών κυματοσυναρτήσεων όπως υποδεικνύει η (2.90)

$$\vec{E}^{\iota}_{sca}\left(\vec{r}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[a^{\iota}_{mn}\vec{M}^{(3)}_{mn}\left(k_0\vec{r}\right)+b^{\iota}_{mn}\vec{N}^{(3)}_{mn}\left(k_0\vec{r}\right)\right] \tag{2.128}$$

Ο τελευταίος παράγων στο δεξιό μέλος της (2.127) έχει τη μορφή αποκλίνοντος σφαιρικού κύματος κάτι το οποίο εξηγεί το δείκτη 3 στις σφαιρικές διανυσματικές κυματοσυναρτήσεις της (2.128). Αντικαθιστώντας στη (2.128) τις εκφράσεις των κυματοσυναρτήσεων που δίνονται από τις (2.26) και (2.34) και για $i=3$ προκύπτει:

$$\vec{E}^{\iota}_{sca}\left(\vec{r}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[a^{\iota}_{mn}\vec{M}^{(3)}_{mn}\left(k_0\vec{r}\right)+b^{\iota}_{mn}\vec{N}^{(3)}_{mn}\left(k_0\vec{r}\right)\right]=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left\{a^{\iota}_{mn}\left[jmh^{(1)}_{n}\left(k_0r\right)\frac{P^m_n\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta}e^{jm\phi}\hat{\theta}-h^{(1)}_{n}\left(k_0r\right)\frac{dP^m_n\left(\cos\theta\right)}{d\theta}e^{jm\phi}\hat{\phi}\right]\right\}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left\{b^{\iota}_{mn}\left[\frac{n\left(n+1\right)}{k_0r}h^{(1)}_{n}\left(k_0r\right)P^m_n\left(\cos\theta\right)e^{jm\phi}\hat{r}+\eta^{(3)}_{n}\left(k_0r\right)\frac{dP^m_n\left(\cos\theta\right)}{d\theta}e^{jm\phi}\hat{\theta}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+jm\eta^{(3)}_{n}\left(k_0r\right)\frac{P^m_n\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta}e^{jm\phi}\hat{\phi}\right]\right\}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}b^{\iota}_{mn}\frac{n\left(n+1\right)}{k_0r}h^{(1)}_{n}\left(k_0r\right)P^m_n\left(\cos\theta\right)e^{jm\phi}\hat{r}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left\{\left[jma^{\iota}_{mn}h^{(1)}_{n}\left(k_0r\right)\frac{P^m_n\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta}+b^{\iota}_{mn}\eta^{(3)}_{n}\left(k_0r\right)\frac{dP^m_n\left(\cos\theta\right)}{d\theta}\right]e^{jm\phi}\hat{\theta}\right\}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left\{\left[-a^{\iota}_{mn}h_n^{(1)}\left(k_0 r\right)\frac{dP_n^m\left(\cos\theta\right)}{d\theta}+jmb^{\iota}_{mn}\eta_n^{(3)}\left(k_0 r\right)\frac{P_n^m\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right]e^{jm\phi}\hat{\phi}\right\}$$

(2.129)

Αν χρησιμοποιηθεί η ασυμπτωτική έκφραση (ΙΙΙ.3γ) των συναρτήσεων Hankel πρώτου είδους (βλ. Παράρτημα ΙΙΙ), για μεγάλα ορίσματα και απορριφθούν οι όροι εκείνοι που περιέχουν τον παράγοντα $1/r^2$ (προσέγγιση μακρινού πεδίου), προκύπτουν τα εξής για τη σφαιρική συνάρτηση Hankel, την παράγωγο της και τη συνάρτηση Ricatti:

$$z_n^{(3)}\left(k_0 r\right)=h_n^{(1)}\left(k_0 r\right)=\frac{1}{k_0}\left(-j\right)^{n+1}\frac{e^{jk_0 r}}{r} \tag{2.130}$$

$$\left[z_n^{(3)}\left(k_0 r\right)\right]'=\left[h_n^{(1)}\left(k_0 r\right)\right]'=\left(-j\right)^{n+1}\frac{jk_0 r e^{jk_0 r}-e^{jk_0 r}}{k_0^2 r^2}=\left(-j\right)^{n+1}\left[\frac{je^{jk_0 r}}{k_0 r}-\frac{e^{jk_0 r}}{k_0^2 r^2}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[h_n^{(1)}\left(k_0 r\right)\right]'\approx\frac{1}{k_0}j\left(-j\right)^{n+1}\frac{e^{jk_0 r}}{r} \tag{2.131}$$

$$\eta_n^{(3)}\left(k_0 r\right)=\left[h_n^{(1)}\left(k_0 r\right)\right]'+\frac{h_n^{(1)}\left(k_0 r\right)}{k_0 r}=\frac{1}{k_0}j\left(-j\right)^{n+1}\frac{e^{jk_0 r}}{r}+\left(-j\right)^{n+1}\frac{e^{jk_0 r}}{k_0^2 r^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\eta_n^{(3)}\left(k_0 r\right)\approx\frac{1}{k_0}j\left(-j\right)^{n+1}\frac{e^{jk_0 r}}{r} \tag{2.132}$$

Αν οι παραπάνω εκφράσεις τεθούν στην (2.129) την τροποποιούν ως εξής

$$\vec{E}^{\iota}_{sca}\left(\vec{r}\right)=\frac{1}{k_0}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left(-j\right)^{n+1}b^{\iota}_{mn}\frac{n\left(n+1\right)}{k_0 r^2}e^{jk_0 r}P_n^m\left(\cos\theta\right)e^{jm\phi}\hat{r}+$$

$$+\frac{1}{k_0}\frac{e^{jk_0 r}}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}j\left(-j\right)^{n+1}\left[ma^{\iota}_{mn}\frac{P_n^m\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta}+b^{\iota}_{mn}\frac{dP_n^m\left(\cos\theta\right)}{d\theta}\right]e^{jm\phi}\hat{\theta}+$$

$$+\frac{1}{k_0}\frac{e^{jk_0r}}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(-j)^{n+1}\left[j^2a^{\iota}_{mn}\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}+j^2mb^{\iota}_{mn}\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\right]e^{jm\phi}\hat{\phi}$$

(2.133)

Ισχύουν επίσης τα εξής

$$j(-j)^{n+1}=j(-j)(-j)^n=-j^2(-j)^n=(-j)^n=j^{-n}$$

Οπότε τελικά η έκφραση της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης του σκεδαζόμενου κύματος θα είναι

$$\vec{E}^{\iota}_{sca}(\vec{r})=\frac{1}{k_0}\frac{e^{jk_0r}}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}j^{-n}\left\{\left[ma^{\iota}_{mn}\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}+b^{\iota}_{mn}\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}\right]e^{jm\phi}\hat{\theta}+\right.$$

$$\left.+\left[ja^{\iota}_{mn}\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}+jmb^{\iota}_{mn}\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\right]e^{jm\phi}\hat{\phi}\right\} \tag{2.134}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2.134),και (2.127) τελικά εξάγεται το πλάτος σκέδασης

$$\vec{f}^{\iota}(\hat{i},\hat{s})\frac{e^{jk_0r}}{r}=\frac{1}{k_0}\frac{e^{jk_0r}}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}j^{-n}\left\{\left[ma^{\iota}_{mn}\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}+b^{\iota}_{mn}\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}\right]e^{jm\phi}\hat{\theta}+\right.$$

$$\left.+j\left[a^{\iota}_{mn}\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}+mb^{\iota}_{mn}\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\right]e^{jm\phi}\hat{\phi}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\vec{f}^{\iota}(\hat{i},\hat{s})=\frac{1}{k_0}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}j^{-n}\left[\left(ma^{\iota}_{mn}\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}+b^{\iota}_{mn}\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}\right)\hat{\theta}+\right.$$

$$\left.+j\left(mb^{\iota}_{mn}\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}+a^{\iota}_{mn}\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}\right)\hat{\phi}\right]e^{jm\phi} \tag{2.135}$$

Στην (2.135) έχουν χρησιμοποιηθεί οι κυματικοί συντελεστές του αναπτύγματος της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης του σκεδαζόμενου πεδίου.

Μέσω του πλάτους σκέδασης ορίζεται η *διαφορική διατομή σκέδασης* [*Ishimaru, 1978*]

$$\sigma^{\iota}\left(\hat{i},\hat{s}\right)=\left|\vec{f}^{\iota}\left(\hat{i},\hat{s}\right)\right|^{2} \tag{2.136}$$

Η διαφορική διατομή σκέδασης εκφράζει μια κανονικοποιημένη μορφή της ηλεκτρομαγνητικής ισχύος που σκεδάζεται κατά τη διεύθυνση $\hat{s}$.

Η ανίχνευση σκεδαστών με ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία στηρίζεται στην σχέση που υπάρχει ανάμεσα στη μορφή του σκεδαζόμενου κύματος και στις ιδιότητες του σκεδαστή και πραγματοποιείται κυρίως με συσκευές που είναι γνωστές σαν *radar*. Ένα radar χρησιμοποιεί *διστατική γεωμετρία,* όταν ο πομπός και ο δέκτης βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία και οπωσδήποτε μακριά από το σκεδαστή. Συνήθως όμως τα συστήματα ενεργητικής ανίχνευσης έχουν πομπό και δεκτή εγκατεστημένους στο ίδιο σημείο και μάλιστα χρησιμοποιούν την ίδια κεραία για εκπομπή και λήψη. Μια τέτοια γεωμετρία καλείται *μονοστατική*. Συστήματα *ενεργητικής ανίχνευσης* λέγονται εκείνα στα οποία περιλαμβάνεται και η πηγή ακτινοβολίας. Στην αντίθετη περίπτωση, (*παθητική ανίχνευση*), το σήμα στο δέκτη είναι ένας πολύπλοκος συνδυασμός θερμικής εκπομπής και δευτερεύουσας ακτινοβολίας από το σκεδαστή.

Η μονοστατική διατομή radar (ή απλούστερα μονοστατική διατομή, ή *διατομή οπισθοσκέδασης*) δίνεται από την έκφραση

$$\sigma^{\iota}_{mo}=4\pi\sigma^{\iota}\left(\hat{i},-\hat{i}\right)=4\pi\left|\vec{f}^{\iota}\left(\hat{i},-\hat{i}\right)\right|^{2} \tag{2.137}$$

Το μέγεθος αυτό εκφράζει τη σκεδαζόμενη ισχύ που επιστρέφει προς την πηγή του προσπίπτοντος κύματος.

Για την περιγραφή της σκέδασης προς όλες τις διευθύνσεις γύρω από το σκεδαστή χρησιμοποιείται η *διατομή σκέδασης*

$$\sigma^{\iota}_{s}=\int_{4\pi}\sigma^{\iota}\left(\hat{i},\hat{s}\right)d\Omega=\int_{4\pi}\left|\vec{f}^{\iota}\left(\hat{i},\hat{s}\right)\right|^{2}d\Omega \tag{2.138}$$

όπου $d\Omega = ds/r^2$ είναι η *διαφορική στέρεα γωνία*. Αντίστοιχα, για την περιγραφή της απορροφώμενης ισχύος στο εσωτερικό του σκεδαστή χρησιμοποιείται *η διατομή απορρόφησης* σ_a^{ι}. Το άθροισμα

$$\sigma_e^{\iota} = \sigma_s^{\iota} + \sigma_a^{\iota} \tag{2.139}$$

είναι *η διατομή εξάλειψης*. Η διατομή εξάλειψης εκφράζει, σε κανονικοποιημένη μορφή, τη συνολική ισχύ που αποσπά ο σκεδαστής από το προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Αν ο σκεδαστής είναι τέλεια αγώγιμος ή τέλεια διηλεκτρικός (πραγματικός κυματικός αριθμός), δεν απορροφάται ισχύς στο εσωτερικό του και η (2.139) εκφυλίζεται στην παρακάτω εξίσωση:

$$\sigma_e^{\iota} = \sigma_s^{\iota} \tag{2.140}$$

Η (2.140) ισχύει για σκεδαστή του οποίου ο κυματικός αριθμός είναι πραγματικός αριθμός.

Για την περιγραφή της απορρόφησης χρησιμοποιείται και η *λευκότητα* του σκεδαστή που ορίζεται από την παρακάτω έκφραση

$$W_0^{\iota} = \frac{\sigma_s^{\iota}}{\sigma_e^{\iota}} = 1 - \frac{\sigma_a^{\iota}}{\sigma_e^{\iota}} \tag{2.141}$$

Είναι προφανές ότι οι τιμές του μεγέθους αυτού κυμαίνονται από 0 μέχρι 1. Η τιμή 0 αντιστοιχεί στο *μέλαν σώμα*, δηλαδή το (υποθετικό) σώμα που απορροφά το σύνολο της ακτινοβολίας και επομένως, δεν σκεδάζει καθόλου. Εξάλλου, η τιμή 1 αντιστοιχεί σε *λευκό σώμα* με μηδενική αγωγιμότητα που σκεδάζει αλλά δεν απορροφά την προσπίπτουσα ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Αυτό ισχύει για σκεδαστές των οποίων ο δείκτης διάθλασης δεν έχει φανταστικό μέρος, δηλαδή ανήκει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Η απορρόφηση από σώμα πεπερασμένης αγωγιμότητας εμφανίζεται σαν ελάττωση της λευκότητας από την οριακή τιμή 1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

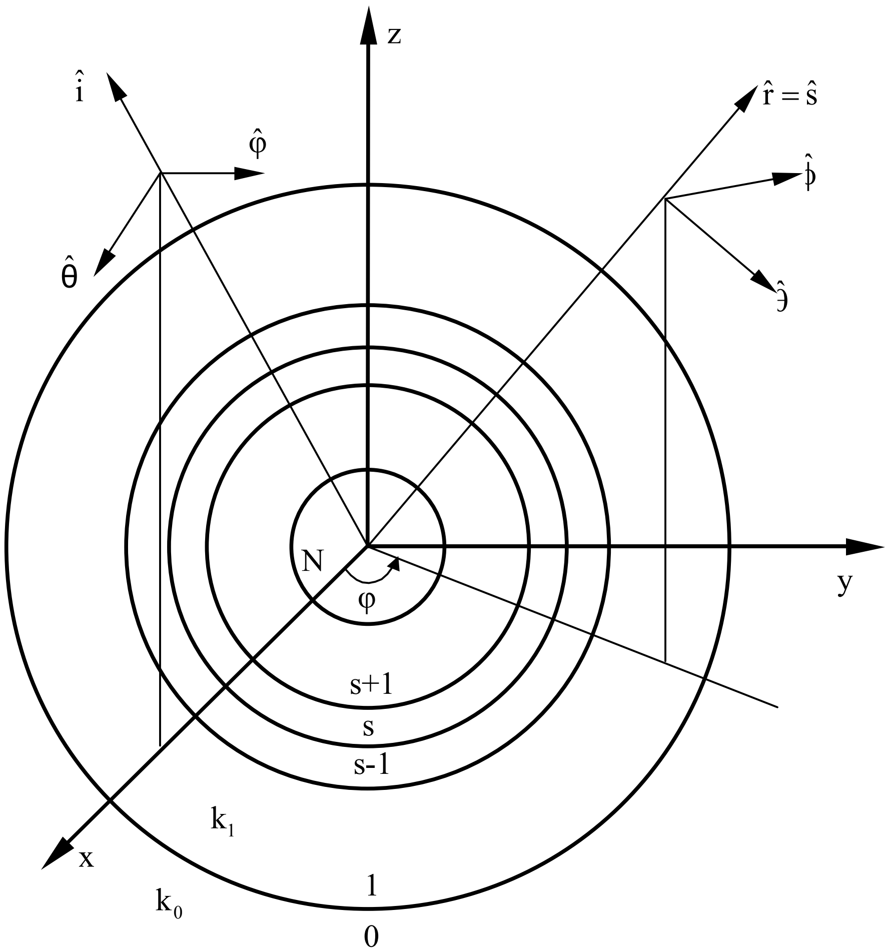
ΣΚΕΔΑΣΗ ΑΠΟ ΣΦΑΙΡΑ ΜΕ ΟΜΟΚΕΝΤΡΕΣ ΣΤΡΩΜΑΤΩΣΕΙΣ

3.1 Αναλυτική θεμελίωση

Η αναλυτική θεμελίωση που αναπτύχθηκε στο δεύτερο κεφαλαίο με την έμμεση εφαρμογή των οριακών συνθηκών και τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων IMM πρώτου και δεύτερου είδους, εφαρμόζεται εδώ στη γεωμετρία σκέδασης που παρουσιάζεται στο σχήμα 3.1. Ο σκεδαστής είναι διηλεκτρική σφαίρα που εγκλείει N ομόκεντρες διηλεκτρικές σφαίρες. Το εξωτερικό του σκεδαστή (χώρος 0) θεωρείται κενός χώρος.

Η εσώτατη σφαίρα συμβολίζεται με N και έχει ακτίνα r_N. Στο κοινό κέντρο όλων των σφαιρών προσαρτάται το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (O;xyz), που αποτελεί και το σύστημα αναφοράς. Οι χώροι που καταλαμβάνουν οι σφαίρες αριθμούνται από 1 έως N. Κάθε σφαίρα χαρακτηρίζεται από την ακτίνα της r_S και τον κυματικό της αριθμό που είναι $k_S = n_S k_0$ με s=1,…,N όπου $k_0 = 2\pi/\lambda$ είναι ο κυματικός αριθμός του ελευθέρου χώρου.

Στο σκεδαστή αυτό θεωρείται ότι προσπίπτει επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα το οποίο είναι γραμμικά πολωμένο και έχει κυματικό διάνυσμα που δίνεται από την (2.80). Η πόλωση του προσπίπτοντος κύματος υποδηλώνεται από το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{e}_\iota$ και μπορεί να είναι κάθετη (ι = 1) ή παράλληλη (ι =2) όπως καθορίζουν οι εξισώσεις (2.82). Η διεύθυνση σκέδασης καθορίζεται από τις γωνίες θ και φ.



Σχημα 3.1 Σφαίρα με ομόκεντρες εσωτερικές στρωματώσεις

Σύμφωνα με τη θεωρία που αναπτύχθηκε στο κεφαλαίο 2 η ηλεκτρική πεδιακή ένταση σε κάθε χώρο μπορεί να αναπτυχθεί σε άθροισμα διανυσματικών σφαιρικών κυματοσυναρτήσεων. Η ηλεκτρική πεδιακή ένταση του προσπίπτοντος κύματος θεωρείται ότι έχει μοναδιαίο πλάτος στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων και δίνεται από τη (2.88α) σε συνδυασμό με τις (2.87α) και (2.89α,β) αν το προσπίπτον είναι επίπεδο ομοιόμορφο κύμα, ή από τις (2.111), (2.113) και (2.114) αν το κύμα προέρχεται από κάποια πηγή περιορισμένων διαστάσεων. Το ίδιο ισχύει και για την ηλεκτρική πεδιακή ένταση του σκεδαζόμενου κύματος η οποία δίνεται από την (2.90). Με βάση τα παραπάνω, στον εξωτερικό χώρο (χώρος 0) η ηλεκτρική πεδιακή ένταση είναι το άθροισμα της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης του προσπίπτοντος και του σκεδαζόμενου κύματος που συγχωνεύονται στην παρακάτω έκφραση.

$$\vec{E}^{0}\left(\vec{r}\right)=\vec{E}_{inc}\left(\vec{r}\right)+\vec{E}^{\iota}_{sca}\left(\vec{r}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}C^{0}_{mn}W^{T}_{mn}\left(k_0\vec{r}\right) \tag{3.1}$$

Ο πίνακας $W^{T}_{mn}\left(k_0\vec{r}\right)$ αποτελείται από τέσσερις διανυσματικές σφαιρικές κυματοσυναρτήσεις και ορίζεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$W_{mn}\left(k_0\vec{r}\right)=\left[\vec{M}^{(1)}_{mn}\left(k_0\vec{r}\right)\quad \vec{M}^{(3)}_{mn}\left(k_0\vec{r}\right)\quad \vec{N}^{(1)}_{mn}\left(k_0\vec{r}\right)\quad \vec{N}^{(3)}_{mn}\left(k_0\vec{r}\right)\right] \tag{3.2}$$

Ο άνω δείκτης T στην (3.1) δηλώνει ανάστροφη του πίνακα. Ο πίνακας C^{0}_{mn} περιλαμβάνει τους κυματικούς συντελεστές του προσπίπτοντος a^{0}_{mn} και c^{0}_{mn} καθώς και του σκεδαζόμενου κύματος b^{0}_{mn} και d^{0}_{mn}

$$C^{0}_{mn}=\left[a^{0}_{mn}\quad b^{0}_{mn}\quad c^{0}_{mn}\quad d^{0}_{mn}\right] \tag{3.3}$$

με a^{0}_{mn}, b^{0}_{mn}, c^{0}_{mn} και d^{0}_{mn} να εξαρτώνται από την πηγή του ηλεκτρομαγνητικού κύματος και την εμπλεκόμενη σφαιρική γεωμετρία του σκεδαστή.

Η ηλεκτρική πεδιακή ένταση στο εσωτερικό κάθε ομόκεντρης σφαίρας s αναπτύσσεται επίσης σαν γραμμικός συνδυασμός διανυσματικών σφαιρικών κυματοσυναρτήσεων ως προς το κοινό σύστημα συντεταγμένων. Το ανάπτυγμα αυτό εκφράζεται με χρήση πινάκων ως εξής:

$$\vec{E}^{s}\left(\vec{r}_s\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}C^{s}_{mn}W^{T}_{mn}\left(k_s\vec{r}_s\right) \tag{3.4}$$

Οι πίνακες C^{s}_{mn} και $W_{mn}\left(k_s\vec{r}_s\right)$ δίνονται από τις παρακάτω εξισώσεις

$$C^{s}_{mn}=\left[a^{s}_{mn}\quad b^{s}_{mn}\quad c^{s}_{mn}\quad d^{s}_{mn}\right] \tag{3.5}$$

$$W_{mn}\left(k_s\vec{r}_s\right)=\left[\vec{M}_{mn}^{(1)}\left(k_s\vec{r}_s\right)\quad \vec{M}_{mn}^{(3)}\left(k_s\vec{r}_s\right)\quad \vec{N}_{mn}^{(1)}\left(k_s\vec{r}_s\right)\quad \vec{N}_{mn}^{(3)}\left(k_s\vec{r}_s\right)\right] \tag{3.6}$$

Γίνεται αντιληπτό ότι η ηλεκτρική πεδιακή ένταση του κύματος σε κάθε περιοχή του σκεδαστή s, εξαρτάται από τέσσερις κυματικούς συντελεστές, πέρα από την προφανή εξάρτηση από τις διανυσματικές σφαιρικές κυματοσυναρτήσεις. Ο προσδιορισμός αυτών των κυματικών συντελεστών θα γίνει με έμμεση εφαρμογή των οριακών συνθηκών και με την μεθοδολογία που περιγράφεται στην ενότητα 2.3. Συνολικά, θα δημιουργηθούν $2+4\left(N-1\right)+2=4N$ ομάδες απείρων αγνώστων και απαιτούνται ισάριθμες εξισώσεις για τον υπολογισμό τους.

3.2 *Έμμεση εφαρμογή των οριακών συνθηκών*

Οι οριακές συνθήκες είναι δυνατό να εφαρμοστούν είτε με εφαρμογή του δεύτερου διανυσματικού θεωρήματος Green, είτε μέσω των επιφανειακών ολοκληρωμάτων του θεωρήματος Green στις επιφάνειες των ομόκεντρων σφαιρικών στρωματώσεων.

Από την εφαρμογή του δεύτερου διανυσματικού θεωρήματος Green στη σφαίρα προκύπτει η παρακάτω εξίσωση

$$\int_{S_s}\left(\vec{E}^{s-1}\times\nabla\times\vec{Q}-\vec{Q}\times\nabla\times\vec{E}^{s-1}\right)\cdot\hat{r}ds=$$

$$=\int_{S_s}\left(\vec{E}^{s}\times\nabla\times\vec{Q}-\vec{Q}\times\nabla\times\vec{E}^{s}\right)\cdot\hat{r}ds \tag{3.7}$$

Στην ολοκληρωτική εξίσωση (3.7) η έμμεση εφαρμογή των οριακών συνθηκών στηρίζεται στην αντικατάσταση της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης της εξωτερικής σφαίρας από εκείνη του εσωτερικού κάθε ομόκεντρης σφαίρας. Η συνάρτηση δόκιμης ορίζεται στο χώρο s, και εκφράζεται ως προς το σύστημα συντεταγμένων του οποίου η αρχή βρίσκεται στο κέντρο της σφαίρας και που είναι κοινό, εξαιτίας της συμμετρικής γεωμετρίας του προβλήματος και της ομόκεντρης στρωματοποίησης του σκεδαστή. Η συνάρτηση δόκιμης μπορεί να χρησιμοποιεί είτε σφαιρικές συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους, είτε σφαιρικές συναρτήσεις Hankel πρώτου είδους :

$$\vec{Q}^s = \vec{M}_{kl}^{(i)}\left(k_s \vec{r}_s\right) \text{ ή } \vec{Q}^s = \vec{N}_{kl}^{(i)}\left(k_s \vec{r}_s\right) \quad i=1 \text{ ή } 3 \tag{3.8}$$

Με έμμεση εφαρμογή της συνέχειας στην επιφάνεια της κάθε σφαίρας προκύπτουν N εξισώσεις IMM δευτέρου είδους:

$$\int_{S_s}\left[\vec{E}^{s-1}\times\nabla\times\vec{Q}-\vec{Q}\times\nabla\times\vec{E}^{s-1}\right]\cdot\hat{r}ds=\int_{S_s}\left[\vec{E}^{s}\times\nabla\times\vec{Q}-\vec{Q}\times\nabla\times\vec{E}^{s}\right]\cdot\hat{r}ds \tag{3.9}$$

όπου $s=1,...,N$.

Ο υπολογισμός των οριακών συνθηκών που γίνεται παρακάτω βασίζεται στην εξίσωση (3.9). Η συνάρτηση δόκιμης $\vec{Q}$ μπορεί να είναι οποιαδήποτε από τις διανυσματικές σφαιρικές κυματοσυναρτήσεις των χωρών s ή $s-1$.

Αν επιλεγεί για την $\vec{Q}$ ο χώρος $s-1$ τότε με χρήση του αλγόριθμου του πίνακα 2.1 προκύπτουν συνοπτικά τα εξής:

Με συνάρτηση δόκιμης την $\vec{Q}=\vec{M}_{kl}^{(1)}\left(k_{s-1}\vec{r}_s\right)$ προκύπτει:

$$2\pi r_s^2\left(-1\right)^k\left[a_{-kl}^{s}U_l^{(1,1)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right)+b_{-kl}^{s}U_l^{(3,1)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right)\right]=$$

$$=2\pi r_s^2\left(-1\right)^k\left[a_{-kl}^{s-1}U_l^{(1,1)}\left(k_{s-1},k_{s-1},r_s\right)+b_{-kl}^{s-1}U_l^{(3,1)}\left(k_{s-1},k_{s-1},r_s\right)\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_{-kl}^{s-1}=a_{-kl}^{s}\frac{U_l^{(1,1)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right)}{U_l^{(3,1)}\left(k_{s-1},k_{s-1},r_s\right)}+b_{-kl}^{s}\frac{U_l^{(3,1)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right)}{U_l^{(3,1)}\left(k_{s-1},k_{s-1},r_s\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_{-kl}^{s-1}=a_{-kl}^{s}I_l^{(1,3,1)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right)+b_{-kl}^{s}I_l^{(3,3,1)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_{mn}^{s-1}=a_{mn}^{s}I_n^{(1,3,1)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right)+b_{mn}^{s}I_n^{(3,3,1)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right) \tag{3.10α}$$

Με συνάρτηση δόκιμης την $\vec{Q}=\vec{M}_{kl}^{(3)}\left(k_{s-1}\vec{r}_s\right)$ προκύπτει:

$$2\pi r_s^2\left(-1\right)^k\left[a_{-kl}^{s}U_l^{(1,3)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right)+b_{-kl}^{s}U_l^{(3,3)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right)\right]=$$

$$=2\pi r_s^2\left(-1\right)^k\left[a_{-kl}^{s-1}U_l^{(1,3)}\left(k_{s-1},k_{s-1},r_s\right)+b_{-kl}^{s-1}U_l^{(3,3)}\left(k_{s-1},k_{s-1},r_s\right)\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{-kl}^{s-1}=a_{-kl}^{s}\frac{U_l^{(1,3)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right)}{U_l^{(1,3)}\left(k_{s-1},k_{s-1},r_s\right)}+b_{-kl}^{s}\frac{U_l^{(3,3)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right)}{U_l^{(1,3)}\left(k_{s-1},k_{s-1},r_s\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{-kl}^{s-1}=a_{-kl}^{s}I_l^{(1,1,3)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right)+b_{-kl}^{s}I_l^{(3,1,3)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{mn}^{s-1}=a_{mn}^{s}I_n^{(1,1,3)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right)+b_{mn}^{s}I_n^{(3,1,3)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right) \tag{3.10β}$$

Με συνάρτηση δόκιμης την $\vec{Q}=\vec{N}_{kl}^{(1)}\left(k_{s-1}\vec{r}_s\right)$ προκύπτει

$$2\pi r_s^2\left(-1\right)^k\left[c_{-kl}^{s}V_l^{(1,1)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right)+d_{-kl}^{s}V_l^{(3,1)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right)\right]=$$

$$=2\pi r_s^2\left(-1\right)^k\left[c_{-kl}^{s-1}V_l^{(1,1)}\left(k_{s-1},k_{s-1},r_s\right)+d_{-kl}^{s-1}V_l^{(3,1)}\left(k_{s-1},k_{s-1},r_s\right)\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{-kl}^{s-1}=c_{-kl}^{s}\frac{V_l^{(1,1)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right)}{V_l^{(3,1)}\left(k_{s-1},k_{s-1},r_s\right)}+d_{-kl}^{s}\frac{V_l^{(3,1)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right)}{V_l^{(3,1)}\left(k_{s-1},k_{s-1},r_s\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{-kl}^{s-1}=c_{-kl}^{s}J_l^{(1,3,1)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right)+d_{-kl}^{s}J_l^{(3,3,1)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{mn}^{s-1}=c_{mn}^{s}J_n^{(1,3,1)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right)+d_{mn}^{s}J_n^{(3,3,1)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right) \tag{3.10γ}$$

Με συνάρτηση δοκιμής την $\vec{Q}=\vec{N}_{kl}^{(3)}\left(k_{s-1}\vec{r}_s\right)$ προκύπτει:

$$2\pi r_s^2\left(-1\right)^k\left[c_{-kl}^{s}V_l^{(1,3)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right)+d_{-kl}^{s}V_l^{(3,3)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right)\right]=$$

$$=2\pi r_s^2\left(-1\right)^k\left[c_{-kl}^{s-1}V_l^{(1,3)}\left(k_{s-1},k_{s-1},r_s\right)+b_{-kl}^{s-1}V_l^{(3,3)}\left(k_{s-1},k_{s-1},r_s\right)\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_{-kl}^{s-1}=c_{-kl}^{s}\frac{V_l^{(1,3)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right)}{V_l^{(1,3)}\left(k_{s-1},k_{s-1},r_s\right)}+b_{-kl}^{s}\frac{V_l^{(3,3)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right)}{V_l^{(1,3)}\left(k_{s-1},k_{s-1},r_s\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_{-kl}^{s-1}=c_{-kl}^{s}J_l^{(1,1,3)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right)+d_{-kl}^{s}J_l^{(3,1,3)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_{mn}^{s-1}=c_{mn}^{s}J_n^{(1,1,3)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right)+d_{mn}^{s}J_n^{(3,1,3)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right)\qquad(3.10\delta)$$

Στις εξισώσεις (3.10α,β,γ,δ) χρησιμοποιήθηκαν οι ήδη γνωστές από τις (2.68) και (2.69) συντομογραφίες των συναρτήσεων U και V. Αυτές, αναγράφονται και πάλι εδώ για λόγους ευκολίας.

$$U_n^{(i_1,i_2)}\left(u,v,r\right)=\frac{2n\left(n+1\right)}{2n+1}\left[vz_n^{(i_1)}\left(ur\right)\eta_n^{(i_2)}\left(vr\right)-u\eta_n^{(i_1)}\left(ur\right)z_n^{(i_2)}\left(vr\right)\right]\qquad(3.11)$$

$$V_n^{(i_1,i_2)}\left(u,v,r\right)=\frac{2n\left(n+1\right)}{2n+1}\left[uz_n^{(i_1)}\left(ur\right)\eta_n^{(i_2)}\left(vr\right)-v\eta_n^{(i_1)}\left(ur\right)z_n^{(i_2)}\left(vr\right)\right]\qquad(3.12)$$

Με προσεκτική εξέταση των (3.11) και (3.12) προκύπτει η εξής ιδιότητα

$$U_n^{(i_1,i_1)}\left(u,u,r\right)=V_n^{(i_1,i_1)}\left(u,u,r\right)=0\qquad(3.13)$$

που χρησιμοποιήθηκε για τον σχηματισμό των (3.10). Σ' αυτές εισάγονται δυο νέοι συμβολισμοί:

$$I_n^{(i_1,i_2,i_3)}\left(k_1,k_2,r\right)=\frac{U_n^{(i_1,i_3)}\left(k_1,k_2,r\right)}{U_n^{(i_2,i_3)}\left(k_2,k_2,r\right)}\qquad(3.14\alpha)$$

$$J_n^{(i_1,i_2,i_3)}\left(k_1,k_2,r\right)=\frac{V_n^{(i_1,i_3)}\left(k_1,k_2,r\right)}{V_n^{(i_2,i_3)}\left(k_2,k_2,r\right)} \qquad (3.14\beta)$$

Όπως γίνεται αντιληπτό, οι εξισώσεις (3.10) αποτελούν γραμμικό σύστημα 4N εξισώσεων με 4N αγνώστους. Το σύστημα αυτό με χρήση του πίνακα

$$T_n^{s-1,s}=\begin{bmatrix} I_n^{(1,1,3)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right) & I_n^{(1,3,1)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right) & 0 & 0 \\ I_n^{(3,1,3)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right) & I_n^{(3,3,1)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_n^{(1,1,3)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right) & J_n^{(1,3,1)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right) \\ 0 & 0 & J_n^{(3,1,3)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right) & J_n^{(3,3,1)}\left(k_s,k_{s-1},r_s\right) \end{bmatrix}$$

(3.15)

μπορεί να γράφει με την παρακάτω μορφή

$$C_{mn}^{s-1}=C_{mn}^{s}T_n^{s-1,s} \qquad (3.16)$$

Οι πίνακες C_{mn}^{s-1} και C_{mn}^{s} περιέχουν τους κυματικούς συντελεστές στις περιοχές $s-1$ και s, αντίστοιχα. Είναι φανερό ότι η (3.16) είναι μια αναδρομική εξίσωση: οι κυματικοί συντελεστές του πεδίου σε μια περιοχή $s-1$, προσδιορίζονται από τους κυματικούς συντελεστές του πεδίου στην επόμενη περιοχή s.

Θέτοντας s=N,N-1,N-2,…,3,2,1 η (3.16) δίνει

$$C_{mn}^{N-1}=C_{mn}^{N}T_n^{N-1,N} \qquad \text{για } s=N$$

$$C_{mn}^{N-2}=C_{mn}^{N-1}T_n^{N-2,N-1}=C_{mn}^{N}T_n^{N-1,N}T_n^{N-2,N-1} \qquad \text{για } s=N-1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$C_{mn}^{0}=C_{mn}^{1}T_n^{0,1}=C_{mn}^{N}T_n^{N-1,N}T_n^{N-2,N-1}\ldots T_n^{1,2}T_n^{0,1} \qquad \text{για } s=1$$

(3.17)

Η (3.17) περιλαμβάνει διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς πινάκων $T_n^{s-1,s}$. Το αποτέλεσμα αυτού του πολλαπλασιασμού των πινάκων είναι γνωστό, αφού όλα τους τα στοιχεία ουσιαστικά εκπροσωπούν συναρτήσεις Bessel, Hankel ή Ricatti στις διάφορες περιοχές εντός και εκτός του σκεδαστή. Χρησιμοποιώντας την συντομογραφία:

$$O_n = T_n^{N-1,N} T_n^{N-2,N-1} \ldots T_n^{1,2} T_n^{0,1} \tag{3.18}$$

η (3.17) απλοποιείται στην παρακάτω έκφραση:

$$C_{mn}^0 = C_{mn}^N O_n \tag{3.19}$$

η οποία συνδέει τους κυματικούς συντελεστές του πεδίου στον χώρο 0 (εξωτερική περιοχή) με αυτούς στον χώρο N (εσωτερική σφαίρα).

Η σειρά C_{mn}^N γράφεται σύμφωνα με τα γνωστά :

$$C_{mn}^N = \left[a_{mn}^N \quad b_{mn}^N \quad c_{mn}^N \quad d_{mn}^N \right] \tag{3.20}$$

Ωστόσο, επειδή το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο πρέπει να είναι πεπερασμένο στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων, που περιέχεται στη σφαίρα N τίθεται:

$$b_{mn}^N = d_{mn}^N = 0 \tag{3.21}$$

ώστε να αποφευχθεί η χρήση των κυματοσυναρτήσεων $\vec{M}_{mn}^{(3)}(k\vec{r})$, $\vec{N}_{mn}^{(3)}(k\vec{r})$ που δεν ορίζονται σε αυτό το σημείο, λόγω των σφαιρικών συναρτήσεων Hankel.

Οι κυματικοί συντελεστές στην περιοχή 0 είναι οι κυματικοί συντελεστές της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης του προσπίπτοντος και του σκεδαζόμενου κύματος, οι οποίοι υπολογίσθηκαν στο δεύτερο κεφαλαίο και δίνονται συνοπτικά από την (3.3).
Η (3.19) μπορεί να αναπτυχθεί, ώστε να βρεθεί η σχέση των μεταξύ των κυματικών συντελεστών στις περιοχές 0 και N.

$$\begin{bmatrix} a_{mn}^{0} & b_{mn}^{0} & c_{mn}^{0} & d_{mn}^{0} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{mn}^{N} & 0 & c_{mn}^{N} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_n^{(1,1)} & O_n^{(1,2)} & 0 & 0 \\ O_n^{(2,1)} & O_n^{(2,2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & O_n^{(3,3)} & O_n^{(3,4)} \\ 0 & 0 & O_n^{(4,3)} & O_n^{(4,4)} \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

Οι δείκτες των στοιχείων O_n εκπροσωπούν απλά ο μεν πρώτος τη γραμμή του πίνακα στην οποία ανήκει το συγκεκριμένο στοιχείο, ο δε δεύτερος τη στήλη. Η (3.22) μπορεί να αναλυθεί σε τέσσερις γραμμικές εξισώσεις από τις οποίες προκύπτουν αμέσως οι σχέσεις οι οποίες προσδιορίζουν τους κυματικούς συντελεστές του πεδίου στις περιοχές 0 και Ν. Άρα:

$$a_{mn}^{N} = a_{mn}^{0} / O_n^{(1,1)} \tag{3.23α}$$

$$b_{mn}^{0} = a_{mn}^{0} O_n^{(1,2)} / O_n^{(1,1)} \tag{3.23β}$$

$$c_{mn}^{N} = c_{mn}^{0} / O_n^{(3,3)} \tag{3.23γ}$$

$$d_{mn}^{0} = c_{mn}^{0} O_n^{(3,4)} / O_n^{(3,3)} \tag{3.23δ}$$

Από τις (3.23) προκύπτουν απευθείας οι άγνωστοι κυματικοί συντελεστές του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στις περιοχές 0 και Ν. Με βάση την εξίσωση (3.16) και τον τρόπο που αυτή αναλύεται για s=N,N-1,N-2,…,3,2,1 μπορούν να υπολογισθούν οι τέσσερις άγνωστοι κυματικοί συντελεστές του πεδίου σε οποιαδήποτε περιοχή εντός και εκτός του σκεδαστή.

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορεί κάποιος να καταλήξει χρησιμοποιώντας διαφορετικό ζευγάρι συναρτήσεων δόκιμης, συγκεκριμένα των $\vec{Q}^s = \vec{M}_{kl}^{(i)}\left(k_s \vec{r}_s\right)$ ή $\vec{Q}^s = \vec{N}_{kl}^{(i)}\left(k_s \vec{r}_s\right)$ με i=1 ή 3. Με τον τρόπο που υποδεικνύεται παρακάτω, είναι δυνατό να υπολογισθούν οι κυματικοί συντελεστές του πεδίου σε όλες τις περιοχές του σκεδαστή. Αυτοί θα προέρχονται από τους κυματικούς συντελεστές του εξωτερικού πεδίου (περιοχή 0), και όχι αυτού της περιοχής N όπως δείχθηκε παραπάνω.

Με έμμεση εφαρμογή της συνέχειας στην επιφάνεια της κάθε σφαίρας, προκύπτουν N εξισώσεις IMM δευτέρου είδους:

$$\int_{S_s}\left[\vec{E}^{s-1}\times\nabla\times\vec{Q}-\vec{Q}\times\nabla\times\vec{E}^{s-1}\right]\cdot\hat{r}ds=\int_{S_s}\left[\vec{E}^{s}\times\nabla\times\vec{Q}-\vec{Q}\times\nabla\times\vec{E}^{s}\right]\cdot\hat{r}ds \qquad (3.24)$$

Θέτοντας στην (3.24) τις τέσσερις διαφορετικές διανυσματικές σφαιρικές κυματοσυναρτήσεις (δυο κυματοσυναρτήσεις $\vec{M}_{mn}^{(i)}\left(k_s\vec{r}_s\right)$ με i = 1 και 3 και δυο κυματοσυναρτήσεις $\vec{N}_{mn}^{(i)}\left(k_s\vec{r}_s\right)$ με i = 1 και 3) και με χρήση του αλγορίθμου του πίνακα 2.1 προκύπτουν τέσσερις διαφορετικές γραμμικές εξισώσεις. Αναλυτικά :
Με χρήση της συνάρτησης δόκιμης $\vec{Q}=\vec{M}_{mn}^{(1)}\left(k_s\vec{r}_s\right)$ η (3.24) καταλήγει :

$$2\pi r_s^2\left(-1\right)^k\left[a_{-kl}^{s}U_l^{(1,1)}\left(k_s,k_s,r_s\right)+b_{-kl}^{s}U_l^{(3,1)}\left(k_s,k_s,r_s\right)\right]=$$

$$=2\pi r_s^2\left(-1\right)^k\left[a_{-kl}^{s-1}U_l^{(1,1)}\left(k_{s-1},k_s,r_s\right)+b_{-kl}^{s-1}U_l^{(3,1)}\left(k_{s-1},k_s,r_s\right)\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_{-kl}^{s}=a_{-kl}^{s-1}\frac{U_l^{(1,1)}\left(k_{s-1},k_s,r_s\right)}{U_l^{(3,1)}\left(k_s,k_s,r_s\right)}+b_{-kl}^{s-1}\frac{U_l^{(3,1)}\left(k_{s-1},k_s,r_s\right)}{U_l^{(3,1)}\left(k_s,k_s,r_s\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_{-kl}^{s}=a_{-kl}^{s-1}I_l^{(1,3,1)}\left(k_{s-1},k_s,r_s\right)+b_{-kl}^{s-1}I_l^{(3,3,1)}\left(k_{s-1},k_s,r_s\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_{mn}^{s}=a_{mn}^{s-1}I_n^{(1,3,1)}\left(k_{s-1},k_s,r_s\right)+b_{mn}^{s-1}I_n^{(3,3,1)}\left(k_{s-1},k_s,r_s\right) \qquad (3.25\alpha)$$

Ενώ με συνάρτηση δόκιμης την $\vec{Q}=\vec{M}_{kl}^{(3)}\left(k_s\vec{r}_s\right)$ προκύπτει:

$$2\pi r_s^2\left(-1\right)^k\left[a_{-kl}^{s}U_l^{(1,3)}\left(k_s,k_s,r_s\right)+b_{-kl}^{s}U_l^{(3,3)}\left(k_s,k_s,r_s\right)\right]=$$

$$= 2\pi r_s^2 \left(-1\right)^k \left[a_{-kl}^{s-1} U_l^{(1,3)}\left(k_{s-1}, k_s, r_s\right) + b_{-kl}^{s-1} U_l^{(3,3)}\left(k_{s-1}, k_s, r_s\right) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{-kl}^{s} = a_{-kl}^{s-1} \frac{U_l^{(1,3)}\left(k_{s-1}, k_s, r_s\right)}{U_l^{(1,3)}\left(k_s, k_s, r_s\right)} + b_{-kl}^{s-1} \frac{U_l^{(3,3)}\left(k_{s-1}, k_s, r_s\right)}{U_l^{(1,3)}\left(k_s, k_s, r_s\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{-kl}^{s} = a_{-kl}^{s-1} I_l^{(1,1,3)}\left(k_{s-1}, k_s, r_s\right) + b_{-kl}^{s-1} I_l^{(3,1,3)}\left(k_{s-1}, k_s, r_s\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{mn}^{s} = a_{mn}^{s-1} I_n^{(1,1,3)}\left(k_{s-1}, k_s, r_s\right) + b_{mn}^{s-1} I_n^{(3,1,3)}\left(k_{s-1}, k_s, r_s\right) \qquad (3.25\beta)$$

Επίσης, η χρήση της $\vec{Q} = \vec{N}_{kl}^{(1)}\left(k_s \vec{r}_s\right)$ δίνει:

$$2\pi r_s^2 \left(-1\right)^k \left[c_{-kl}^{s} V_l^{(1,1)}\left(k_s, k_s, r_s\right) + d_{-kl}^{s} V_l^{(3,1)}\left(k_s, k_s, r_s\right) \right] =$$

$$= 2\pi r_s^2 \left(-1\right)^k \left[c_{-kl}^{s-1} V_l^{(1,1)}\left(k_{s-1}, k_s, r_s\right) + d_{-kl}^{s-1} V_l^{(3,1)}\left(k_{s-1}, k_s, r_s\right) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{-kl}^{s} = c_{-kl}^{s-1} \frac{V_l^{(1,1)}\left(k_{s-1}, k_s, r_s\right)}{V_l^{(3,1)}\left(k_s, k_s, r_s\right)} + d_{-kl}^{s-1} \frac{V_l^{(3,1)}\left(k_{s-1}, k_s, r_s\right)}{V_l^{(3,1)}\left(k_s, k_s, r_s\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{-kl}^{s} = c_{-kl}^{s-1} J_l^{(1,3,1)}\left(k_{s-1}, k_s, r_s\right) + d_{-kl}^{s-1} J_l^{(3,3,1)}\left(k_{s-1}, k_s, r_s\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{mn}^{s} = c_{mn}^{s-1} J_n^{(1,3,1)}\left(k_{s-1}, k_s, r_s\right) + d_{mn}^{s-1} J_n^{(3,3,1)}\left(k_{s-1}, k_s, r_s\right) \qquad (3.25\gamma)$$

Τέλος με συνάρτηση δόκιμης την $\vec{Q} = \vec{M}_{kl}^{(3)}\left(k_s \vec{r}_s\right)$ προκύπτει:

$$2\pi r_s^2 \left(-1\right)^k \left[c_{-kl}^{s} V_l^{(1,3)}\left(k_s, k_s, r_s\right) + d_{-kl}^{s} V_l^{(3,3)}\left(k_s, k_s, r_s\right) \right] =$$

$$= 2\pi r_s^2 \left(-1\right)^k \left[c_{-kl}^{s-1} V_l^{(1,3)}\left(k_{s-1}, k_s, r_s\right) + d_{-kl}^{s-1} V_l^{(3,3)}\left(k_{s-1}, k_s, r_s\right) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_{-kl}^{s} = c_{-kl}^{s-1}\frac{V_l^{(1,3)}\left(k_{s-1},k_s,r_s\right)}{V_l^{(1,3)}\left(k_s,k_s,r_s\right)} + d_{-kl}^{s-1}\frac{V_l^{(3,3)}\left(k_{s-1},k_s,r_s\right)}{V_l^{(1,3)}\left(k_s,k_s,r_s\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_{-kl}^{s} = c_{-kl}^{s-1}J_l^{(1,1,3)}\left(k_{s-1},k_s,r_s\right) + d_{-kl}^{s-1}J_l^{(3,1,3)}\left(k_{s-1},k_s,r_s\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_{mn}^{s} = c_{mn}^{s-1}J_n^{(1,1,3)}\left(k_{s-1},k_s,r_s\right) + d_{mn}^{s-1}J_n^{(3,1,3)}\left(k_{s-1},k_s,r_s\right) \tag{3.25δ}$$

όπου U_n και V_n είναι οι γνωστές από τις (3.11) και (3.12) συντομογραφίες. Επίσης, οι συμβολισμοί I_n και J_n δίνονται από τις εκφράσεις (3.14).

Οι εξισώσεις (3.25) αποτελούν γραμμικό σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τέσσερις άγνωστους που μπορεί να γράφει με τη χρήση πινάκων ως εξής:

$$C_{mn}^{s} = C_{mn}^{s-1}T_n^{s,s-1} \tag{3.26}$$

Οι πίνακες C_{mn}^{s} και C_{mn}^{s-1} περιέχουν τους κυματικούς συντελεστές του πεδίου στις περιοχές s και $s-1$ αντίστοιχα και δίνονται από τις παρακάτω εκφράσεις:

$$C_{mn}^{s} = \begin{bmatrix} a_{mn}^{s} & b_{mn}^{s} & c_{mn}^{s} & d_{mn}^{s} \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

$$C_{mn}^{s-1} = \begin{bmatrix} a_{mn}^{s-1} & b_{mn}^{s-1} & c_{mn}^{s-1} & d_{mn}^{s-1} \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

ενώ ο πίνακας $T_n^{s,s-1}$ γράφεται κατ' αντιστοιχία της (3.15) ως εξής:

$$T_n^{s,s-1} = \begin{bmatrix} I_n^{(1,1,3)}\left(k_{s-1},k_s,r_s\right) & I_n^{(1,3,1)}\left(k_{s-1},k_s,r_s\right) & 0 & 0 \\ I_n^{(3,1,3)}\left(k_{s-1},k_s,r_s\right) & I_n^{(3,3,1)}\left(k_{s-1},k_s,r_s\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_n^{(1,1,3)}\left(k_{s-1},k_s,r_s\right) & J_n^{(1,3,1)}\left(k_{s-1},k_s,r_s\right) \\ 0 & 0 & J_n^{(3,1,3)}\left(k_{s-1},k_s,r_s\right) & J_n^{(3,3,1)}\left(k_{s-1},k_s,r_s\right) \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

Η σχέση (3.26) αποτελεί επίσης μια αναδρομική εξίσωση παρόμοια με αυτή που προέκυψε με χρήση του αλλού ζεύγους συναρτήσεων δόκιμης και που δίνεται από την (3.16). Η συγκεκριμένη όμως, συσχετίζει τους κυματικούς συντελεστές της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης στον χώρο s με αυτούς του πεδίου στην προηγούμενη περιοχή $s-1$.

Θέτοντας στην (3.26) όπου $s=1,2,3,...,N-2,N-1,N$ προκύπτουν τα εξής:

$$C_{mn}^{1}=C_{mn}^{0}T_{n}^{1,0} \qquad \text{για s=1}$$

$$C_{mn}^{2}=C_{mn}^{1}T_{n}^{2,1}=C_{mn}^{0}T_{n}^{1,0}T_{n}^{2,1} \qquad \text{για s=2}$$

. .
. .
. .

$$C_{mn}^{N}=C_{mn}^{N-1}T_{n}^{N,N-1}=C_{mn}^{0}T_{n}^{1,0}T_{n}^{2,1}....T_{n}^{N,N-1} \qquad \text{για } s=N$$

(3.30)

Η (3.30) περιλαμβάνει μια σειρά πολλαπλασιασμών μεταξύ πινάκων T_n. Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού αυτού είναι ένας νέος 4×4 πίνακας O'_n του οποίου τα στοιχεία είναι γνωστά και υπολογίζονται εύκολα. Ο συλλογισμός αυτός διατυπώνεται μέσω της παρακάτω εξίσωσης.

$$O'_{n}=T_{n}^{1,0}T_{n}^{2,1}...T_{n}^{N,N-1} \qquad (3.31)$$

Η (3.30) με χρήση της (3.31) οδηγεί στη σχέση

$$C_{mn}^{N}=C_{mn}^{0}O'_{n} \qquad (3.32)$$

Η (3.32) περιλαμβάνει τους πίνακες C_{mn}^{N} και C_{mn}^{0} που περιέχουν τους κυματικούς συντελεστές της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης στους χώρους N και 0 αντίστοιχα. Οι πίνακες αυτοί δίνονται από τις (3.20). Σχετικά με τον C_{mn}^{0}, είναι γνωστοί οι κυματικοί συντελεστές της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης a_{mn}^0 και c_{mn}^0 δίνονται δε από τις (2.85) και (2.86), εφόσον το προσπίπτον είναι επίπεδο και γραμμικά πολωμένο κύμα. Στην περίπτωση της διέγερσης από πηγή περιορισμένων διαστάσεων οι συντελεστές αυτοί δίνονται από τις εκφράσεις (2.120). Αντίθετα, άγνωστοι είναι οι συντελεστές b_{mn}^0 και d_{mn}^0 της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης του σκεδαζόμενου κύματος στης εξωτερική περιοχή. Επιπλέον, σε ότι αφορά στην περιοχή N, οι συντελεστές b_{mn}^N και d_{mn}^N είναι ίσοι με το μηδέν εφόσον στην περιοχή αυτή απειρίζονται οι συναρτήσεις Hankel. Άγνωστοι είναι οι κυματικοί συντελεστές a_{mn}^N και c_{mn}^N.

Η (3.32) αναπτύσσεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} a_{mn}^N & 0 & c_{mn}^N & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{mn}^0 & b_{mn}^0 & c_{mn}^0 & d_{mn}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_n'^{(1,1)} & O_n'^{(1,2)} & 0 & 0 \\ O_n'^{(2,1)} & O_n'^{(2,2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & O_n'^{(3,3)} & O_n'^{(3,4)} \\ 0 & 0 & O_n'^{(4,3)} & O_n'^{(4,4)} \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

Η (3.33) απαρτίζεται από τέσσερις γραμμικές εξισώσεις, η επίλυση των οποίων οδηγεί στον υπολογισμό των άγνωστων κυματικών συντελεστών στους χώρους 0 και N. Συγκεκριμένα:

$$a_{mn}^N = a_{mn}^0 O_n'^{(1,1)} + b_{mn}^0 O_n'^{(2,1)} \tag{3.34α}$$

$$0 = a_{mn}^0 O_n'^{(1,2)} + b_{mn}^0 O_n'^{(2,2)} \Rightarrow b_{mn}^0 = -a_{mn}^0 \frac{O_n'^{(1,2)}}{O_n'^{(2,2)}} \tag{3.34β}$$

$$c_{mn}^N = c_{mn}^0 O_n'^{(3,3)} + d_{mn}^0 O_n'^{(4,3)} \tag{3.34γ}$$

$$0 = c_{mn}^0 O_n'^{(3,4)} + d_{mn}^0 O_n'^{(4,4)} \Rightarrow d_{mn}^0 = -c_{mn}^0 \frac{O_n'^{(3,4)}}{O_n'^{(4,4)}} \tag{3.34δ}$$

Οι (3.34β,δ) προσδιορίζουν απευθείας τους άγνωστους συντελεστές στην περιοχή 0. Αντικαθιστώντας αυτές στις (3.34α,γ) αντίστοιχα, υπολογίζονται οι κυματικοί συντελεστές στο χώρο N. Με βάση αυτούς, οι κυματικοί συντελεστές της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης σε κάθε χώρο του σκεδαστή προκύπτουν από την αναδρομική εξίσωση (3.26).

Γίνεται αντιληπτό ότι η χρήση διαφορετικού ζεύγους δοκιμής, οδηγεί σε διαφορετικές αναδρομικές σχέσεις. Στην πραγματικότητα όμως, οι κυματικοί συντελεστές που προκύπτουν και με τις δυο μεθόδους είναι ίσοι μεταξύ τους, διότι τροποποιούνται και οι πίνακες T_n και O_n.

Στην περίπτωση που το ηλεκτρομαγνητικό κύμα προέρχεται από μια πηγή περιορισμένων διαστάσεων (localized source) και συγκεκριμένα από ένα δίπολο Hertz, τότε η εφαρμογή των οριακών συνθηκών για τον προσδιορισμό των συντελεστών στα εσωτερικά στρωματά, γίνεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που αναπτύχθηκε στα προηγούμενα. Το μόνο σημείο στο οποίο διαφοροποιείται η αναλυτική θεμελίωση είναι οι σχέσεις που προσδιορίζουν τους κυματικούς συντελεστές της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης του προσπίπτοντος οι οποίοι υπολογίσθηκαν στο κεφάλαιο 2 και στο Παράρτημα IV με εφαρμογή του προσθετικού θεωρήματος. Κατά τα αλλά, ισχύουν οι αναδρομικές εξισώσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω.

Equation Chapter 4 Section 4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΟΠΤΙΚΗΣ
Ο ΦΑΚΟΣ LUNEBURG
Ο ΦΑΚΟΣ FISHEYE

4.1. Εξίσωση ακτίνας και εξίσωση εικόνας

Στο όριο των υψηλών συχνοτήτων ($\lambda \to 0$, $k \to \infty$), η διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων περιγράφεται ακριβέστερα με ακτίνες. Είναι προφανές, ότι η ηλεκτρομαγνητική φύση του φωτός επιτρέπει τον συσχετισμό των ηλεκτρομαγνητικών ακτίνων με αυτές του φωτός.

Η ιδανική ακτίνα είναι μια γραμμή μηδενικής διατομής που αναπαριστά την τροχιά που ακολουθεί το διαδιδόμενο κύμα. Οι ακτίνες, δεν μπορούν να απομονωθούν στην πράξη. Μια δέσμη ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας όσο στενή και αν είναι, πάντα αναπαρίσταται από ένα σύνολο παράλληλων ακτινών.

Ας θεωρηθεί ότι οι ακτίνες φωτός διαδίδονται σε ανομοιογενές μέσο και έστω η αυθαίρετη καμπύλη C. Το ολοκλήρωμα

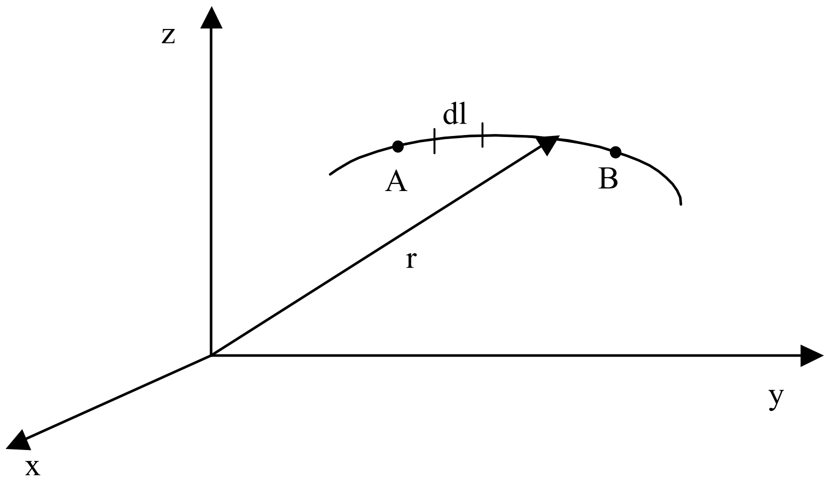
$$l = \int_C n\,dl \tag{4.1}$$

ονομάζεται *μήκος της οπτικής τροχιάς* κατά μήκος της καμπύλης.

Ο δείκτης διάθλασης $n = n(\vec{r})$ είναι μια συνάρτηση της θέσης r. Η καμπύλη C διέρχεται από τα σημεία A και B του μέσου (Σχήμα 4.1), οπότε η εξίσωση (4.1) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$l = \int_C n dl = \int_C \frac{c}{v} dl \tag{4.2}$$

εφόσον η μέση πυκνότητα ενέργειας διαδίδεται στο εσωτερικό του μέσου με ταχύτητα $v = c/n$.



Σχημα 4.1 Οπτική τροχιά

Θεωρώντας ότι $(c/v)dl = (c/v)vdt = cdt$, η (4.2) μετατρέπεται στην παρακάτω σχέση

$$l = c\int_A^B dt \tag{4.3}$$

όπου dt είναι το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να καλύψει η ακτίνα την απόσταση dl κατά μήκος της καμπύλης.

Το μήκος της οπτικής τροχιάς είναι ίσο με το γινόμενο της ταχύτητας c στον ελεύθερο χώρο επί το χρόνο που χρειάζεται το φως για να διαδοθεί από το σημείο A στο σημείο B μέσα στο ανομοιογενές μέσο.

Αν θεωρηθεί ότι το προσπίπτον κύμα είναι ένα ομοιόμορφο επίπεδο κύμα στον ελεύθερο χώρο, τότε τα διανυσματικά πεδιακά μεγέθη εκφράζονται από τις παρακάτω εξισώσεις :

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{E} e^{j\left(\omega t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r}\right)} \tag{4.4}$$

$$\vec{\mathcal{H}} = \vec{H} e^{j\left(\omega t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r}\right)} \tag{4.5}$$

Οι εξισώσεις (4.4) και (4.5) υποδεικνύουν ότι η διεύθυνση διάδοσης είναι παράλληλη προς την διεύθυνση του διανύσματος $\vec{k}_0$, γίνεται δε αντιληπτό, ότι ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell για το πεδίο στο εσωτερικό ενός ανομοιογενούς σώματος. Αν η διάδοση του κύματος γίνεται μέσα σε ανομοιογενές μέσο και ο συντελεστής διάθλασης $n(\vec{r})$ μεταβάλλεται ελαφρά σε μια απόσταση συγκρίσιμη με το μήκος κύματος λ στον ελεύθερο χώρο, τότε είναι δυνατό οι εξισώσεις (4.4) και (4.5) να εκφραστούν τροποποιημένες. Οι εκφράσεις αυτές δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{E}(\vec{r}) e^{j\left[\omega t - k_0 S(\vec{r})\right]} \tag{4.6}$$

$$\vec{\mathcal{H}} = \vec{H}(\vec{r}) e^{j\left[\omega t - k_0 S(\vec{r})\right]} \tag{4.7}$$

Ο συντελεστής S που καλείται μέτωπο κύματος, είναι ένα επίπεδο, κάθετο στο κυματικό διάνυσμα $\vec{k}_0$ και καθορίζεται από την εξίσωση:

$$\vec{k}_0 \cdot \vec{r} = \text{const} \quad ; \quad \forall \vec{r} \in S \tag{4.8}$$

Οι εκφράσεις (4.6) και (4.7) παρουσιάζουν το πλεονέκτημα ότι διαχωρίζουν τις ταχύτατες μεταβολές του όρου διάδοσης $e^{j\left[\omega t - k_0 S(\vec{r})\right]}$, σε σχέση με τις σχετικά αργές μεταβολές του πλάτους του κύματος $E(\vec{r})$. Η συνάρτηση $S(\vec{r})$ που εμφανίζεται στις εξισώσεις (4.6) και (4.7), ονομάζεται εικόνα (eikonal) και η σχέση

$$S(\vec{r}) = \text{const} \tag{4.9}$$

καθορίζει το τοπικό μέτωπο κύματος. Η τοπική διεύθυνση διάδοση του κύματος είναι παράλληλη προς τη διεύθυνση του διανύσματος ∇S, ενώ τα διανυσματικά πεδιακά μεγέθη $E(\vec{r})$ και $H(\vec{r})$ θεωρούνται εγκάρσια σε αυτή τη διεύθυνση.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι στο εσωτερικό του μέσου ισχύει $\varepsilon = \varepsilon_0 n^2(r)$ τότε οι εξισώσεις Maxwell απουσία πηγών μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t} \tag{4.10}$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \varepsilon_0 n^2(\vec{r}) \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \tag{4.11}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \left[\varepsilon \vec{\mathcal{E}}\right] = \nabla \cdot \left[\varepsilon_0 n^2(\vec{r}) \vec{\mathcal{E}}\right] = 0 \tag{4.12}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.6) και (4.7) στην (4.10) και χρησιμοποιώντας τη διανυσματική ταυτότητα $\nabla \times \left(\Phi \vec{A}\right) = \Phi \nabla \times \vec{A} + \nabla \Phi \times \vec{A}$, μπορούν να γραφούν τα παρακάτω:

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \left[\vec{E} e^{j\left[\omega t - k_0 S(\vec{r})\right]}\right] = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{H} e^{j\left[\omega t - k_0 S(\vec{r})\right]}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{j\left[\omega t - k_0 S(\vec{r})\right]} \nabla \times \vec{E} + \nabla e^{j\left[\omega t - k_0 S(\vec{r})\right]} \times \vec{E} = -j\omega\mu_0 e^{j\left[\omega t - k_0 S(\vec{r})\right]} \vec{H} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{j\left[\omega t - k_0 S(\vec{r})\right]} \nabla \times \vec{E} + \left[\hat{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(e^{j\left[\omega t - k_0 S(\vec{r})\right]}\right) + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(e^{j\left[\omega t - k_0 S(\vec{r})\right]}\right) + \frac{\hat{\phi}}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi}\left(e^{j\left[\omega t - k_0 S(\vec{r})\right]}\right)\right] \times \vec{E} =$$

$$= -j\omega\mu_0 e^{j\left[\omega t - k_0 S(\vec{r})\right]} \vec{H} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{j\left[\omega t - k_0 S(\vec{r})\right]} \nabla \times \vec{E} - jk_0 e^{j\left[\omega t - k_0 S(\vec{r})\right]} \nabla S \times \vec{E} = -j\omega\mu_0 e^{j\left[\omega t - k_0 S(\vec{r})\right]} \vec{H} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla\times\vec{E} - jk_0\nabla S\times\vec{E} = -j\omega\mu_0\vec{H} \Rightarrow \nabla S\times\vec{E} - \frac{j\omega\mu_0}{jk_0}\vec{H} = \frac{1}{jk_0}\nabla\times\vec{E} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla S\times\vec{E} - \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2}\vec{H} = \frac{1}{jk_0}\nabla\times\vec{E} \tag{4.13}$$

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα, η αντικατάσταση των σχέσεων (4.6) και (4.7) στη (4.11) οδηγεί στο παρακάτω αποτέλεσμα

$$\nabla S\times\vec{H} + n^2\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\vec{E} = \frac{1}{jk_0}\nabla\times\vec{H} \tag{4.14}$$

Επιπλέον, εφαρμόζοντας τη διανυσματική ταυτότητα $\nabla\cdot\left(\Phi\vec{A}\right) = \Phi\nabla\cdot\vec{A} + \nabla\Phi\cdot\vec{A}$ στη (4.12) προκύπτουν τα εξής:

$$\nabla\cdot\vec{D} = \nabla\cdot\left[\varepsilon\vec{\mathcal{E}}\right] = \nabla\cdot\left[\varepsilon_0 n^2\left(\vec{r}\right)\vec{\mathcal{E}}\right] = 0 \Rightarrow \nabla\cdot\left[\varepsilon_0 e^{j\left[\omega t - k_0 S\left(\vec{r}\right)\right]} n^2\left(\vec{r}\right)\vec{E}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_0 e^{j\left[\omega t - k_0 S\left(\vec{r}\right)\right]} n^2\left(\vec{r}\right)\nabla\cdot\vec{E} + \nabla\varepsilon_0 e^{j\left[\omega t - k_0 S\left(\vec{r}\right)\right]} n^2\left(\vec{r}\right)\cdot\vec{E} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_0 e^{j\left[\omega t - k_0 S\left(\vec{r}\right)\right]} n^2\left(\vec{r}\right)\nabla\cdot\vec{E} + \left[\varepsilon_0\left(-jk_0\right)n^2\left(\vec{r}\right)e^{j\left[\omega t - k_0 S\left(\vec{r}\right)\right]}\nabla S + \varepsilon_0 e^{j\left[\omega t - k_0 S\left(\vec{r}\right)\right]} 2n\left(\vec{r}\right)\nabla n\left(\vec{r}\right)\right]\cdot\vec{E} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2\left(\vec{r}\right)\nabla\cdot\vec{E} - jk_0 n^2\left(\vec{r}\right)\nabla S\cdot E + 2n\left(\vec{r}\right)\nabla n\left(\vec{r}\right)\cdot\vec{E} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot\vec{E} - jk_0\nabla S\cdot E + 2\frac{\nabla n\left(\vec{r}\right)}{n\left(\vec{r}\right)}\cdot\vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla S\cdot\vec{E} = \frac{1}{jk_0}\left[\nabla\cdot\vec{E} + 2\frac{\nabla n\left(\vec{r}\right)}{n\left(\vec{r}\right)}\cdot\vec{E}\right] \tag{4.15}$$

Ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους της (4.15) μπορεί να γραφεί ως εξής :

$$\nabla\left[\ln\left(n^2\left(\vec{r}\right)\right)\right] = \frac{1}{n^2\left(\vec{r}\right)}\nabla\left[n^2\left(r\right)\right] = \frac{2n\left(\vec{r}\right)\nabla n\left(\vec{r}\right)}{n^2\left(\vec{r}\right)} = 2\frac{\nabla n\left(\vec{r}\right)}{n\left(\vec{r}\right)} \tag{4.16}$$

Οπότε, αντικαθιστώντας τη (4.16) στη (4.15) τότε αυτή αποκτά την τελική της έκφραση, αυτή που υποδεικνύει η εξίσωση (4.17)

$$\nabla S \cdot \vec{E} = \frac{1}{jk_0}\left[\nabla \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \nabla\left[\ln\left(n^2\left(\vec{r}\right)\right)\right]\right] \tag{4.17}$$

Στην οπτική περιοχή, οι συχνότητες είναι πολύ υψηλές και κυμαίνονται στα εκατοντάδες THz. Στην περιοχή αυτή, μπορεί να υποτεθεί ότι $k_0 \to \infty$, με αποτέλεσμα τα δεξιά μέλη των (4.13), (4.14) και (4.17) να μηδενίζονται οπότε οι συγκεκριμένες εξισώσεις τροποποιούνται στις ακόλουθες:

$$\nabla S \times \vec{E} - \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2} \vec{H} = 0 \tag{4.18}$$

$$\nabla S \times \vec{H} + n^2 \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2} \vec{E} = 0 \tag{4.19}$$

$$\nabla S \cdot \vec{E} = 0 \tag{4.20}$$

Οι εκφράσεις (4.18) και (4.19) συγκροτούν ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων με αγνώστους τα διανυσματικά πεδιακά μεγέθη $\vec{E}$ και $\vec{H}$. Επιλύνοντας την (4.18) ως προς $\vec{H}$, προκύπτει η σχέση:

$$\nabla S \times \vec{E} - \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2} \vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{H} = \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2} \nabla S \times \vec{E} \tag{4.21}$$

Η (4.21) αντικαθίσταται απευθείας στην (4.19) και γίνεται χρήση της διανυσματικής ταυτότητας $\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)\vec{C}$, με σκοπό την εξάλειψη της μαγνητικής πεδιακής έντασης.

$$\nabla S\times\vec{H}+n^2\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\vec{E}=0\Rightarrow\nabla S\times\left(\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\nabla S\times\vec{E}\right)+n^2\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\vec{E}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\left(\nabla S\cdot\vec{E}\right)\nabla S-\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\left(\nabla S\cdot\nabla S\right)\vec{E}+n^2\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\vec{E}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\nabla S\cdot\vec{E}\right)\nabla S-\left(\nabla S\right)^2\vec{E}+n^2\vec{E}=0 \qquad (4.22)$$

Ο πρώτος όρος της (4.22) είναι ίσος με το μηδέν, κάτι που υποδεικνύει η (4.20). Επιπλέον, εξαιτίας του γεγονότος ότι το διανυσματικό μέγεθος $\vec{E}$ δεν μηδενίζεται παντού, η (4.22) μπορεί να απλοποιηθεί στην παρακάτω έκφραση:

$$\left(\nabla S\right)^2=n^2 \qquad (4.23)$$

Η (4.23) έχει λύσεις τις παρακάτω:

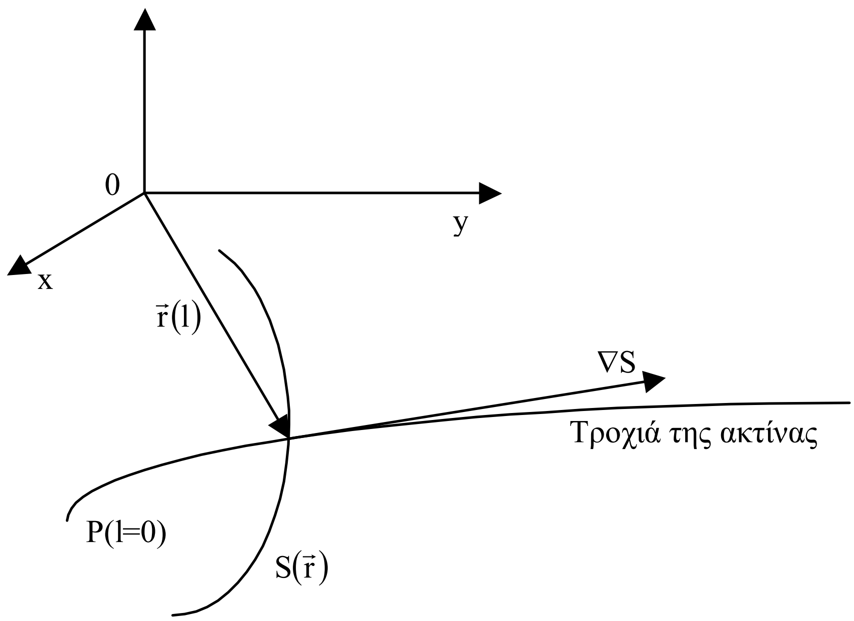
$$\left|\nabla S\right|=n \qquad (4.24)$$

$$\left(\nabla S\right)^2=\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2=n^2 \qquad (4.25)$$

Οι σχέσεις (4.24) και (4.25) συσχετίζουν τον όρο ∇S με το δείκτη διάθλασης $n(\vec{r})$. Η (4.24) ονομάζεται εξίσωση εικόνας και αποτελεί το σημείο εκκίνησης για οποιοδήποτε πρόβλημα που αφορά στον προσδιορισμό της εξίσωσης της τροχιάς της ακτίνας σε ανομοιογενές μέσο.

Ο προσδιορισμός της τροχιάς των ακτίνων στο εσωτερικό ενός ανομοιογενούς μέσου περιγράφεται καλύτερα από μια τροποποιημένη έκφραση της εξίσωσης εικόνας. Ας θεωρηθεί ότι η μεταβλητή s είναι το μήκος της τροχιάς της ακτίνας που μετράται από ένα σημείο αναφοράς P, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2. Το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ κάθε σημείου που ανήκει στην τροχιά της ακτίνας, θα είναι μια συνάρτηση εξαρτώμενη από το l. Η παράγωγος του διανύσματος r ως προς l, $d\vec{r}/dl$, που είναι εφαπτόμενη στην καμπύλη της τροχιάς της ακτίνας, είναι κάθετη στο μέτωπο κύματος S. Άρα η εξίσωση εικόνας στην προκειμένη περίπτωση μπορεί να γραφεί με τον παρακάτω τρόπο:

$$\nabla S = n\frac{d\vec{r}}{dl} \tag{4.26}$$



Σχήμα 4.2. Μέτωπο κύματος και τροχιά ακτίνας

Παραγωγίζοντας την (4.26) χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\frac{d}{dl} = \frac{d\vec{r}}{dl}\cdot\nabla \tag{4.27}$$

θα προκύψουν τα παρακάτω:

$$\frac{d}{dl}\left(n\frac{d\vec{r}}{dl}\right) = \frac{d\vec{r}}{dl}\cdot\nabla(\nabla S) \tag{4.28}$$

Το δεξιό μέλος της (4.28) σε συνδυασμό με τις εξισώσεις (4.25), (4.26) και (4.27) παίρνει τη μορφή:

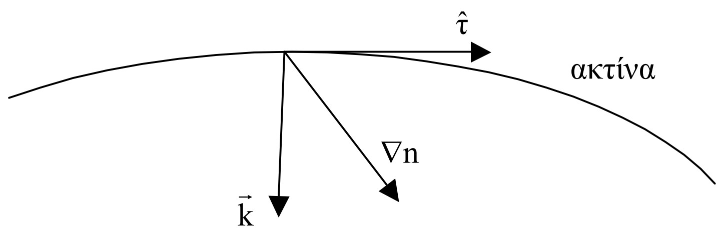
$$\frac{d\vec{r}}{dl}\cdot\nabla\left(\nabla S\right)=\frac{1}{n}\nabla S\cdot\nabla\left(\nabla S\right)=\frac{1}{2n}\nabla\left(\nabla S\right)^2=\frac{1}{2n}\nabla\left(n^2\right)=\frac{2n\nabla n}{2n}=\nabla n\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{d\vec{r}}{dl}\cdot\nabla\left(\nabla S\right)=\nabla n \tag{4.29}$$

Αντικαθιστώντας την (4.29) στην (4.28), τελικά προκύπτει:

$$\frac{d}{dl}\left(n\frac{d\vec{r}}{dl}\right)=\nabla n \tag{4.30}$$

Η εξίσωση (4.30) που ονομάζεται *εξίσωση ακτίνας*, υποδεικνύει ότι η τροχιά που ακολουθούν οι ακτίνες φωτός είναι παράλληλες προς τη διεύθυνση του διανύσματος ∇n .



Σχήμα 4.3. Η κλίση του δείκτη διάθλασης και η καμπύλωση της ακτίνας

Η (4.30) περιγράφει την καμπύλωση της τροχιάς της ακτίνας φωτός. Το διάνυσμα της καμπύλωσης αυτής, σε κάθε σημείο της τροχιάς συμβολίζεται με $\vec{K}$ και συνδέεται με την ακτίνα R της καμπύλης μέσω της έκφρασης:

$$\vec{K}=\frac{d\hat{\tau}}{dl}=\frac{1}{R}\hat{\kappa} \tag{4.31}$$

Όπου $\hat{\tau}=d\vec{r}(s)/dl$. Αναπτύσσοντας την (4.30) και αντικαθιστώντας όπου $d\vec{r}/dl$ με το εφαπτομενικό διάνυσμα $\hat{\tau}$, τότε προκύπτουν τα παρακάτω:

$$\frac{d}{dl}\left(n\frac{d\vec{r}}{dl}\right)=\nabla n\Rightarrow\frac{dn}{dl}\frac{d\vec{r}}{dl}+n\frac{d}{dl}\left(\frac{d\vec{r}}{dl}\right)=\nabla n\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{dn}{dl}\hat{\tau}+n\frac{d\hat{\tau}}{dl}=\nabla n \qquad (4.32)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (4.31) και λύνοντας ως προς το διάνυσμα $\vec{K}$, η (4.32) γράφεται:

$$\frac{dn}{dl}\hat{\tau}+n\vec{K}=\nabla n\Rightarrow\vec{K}=\frac{1}{n}\nabla n-\frac{1}{n}\frac{dn}{dl}\hat{\tau}\Rightarrow\vec{K}=\nabla(\ln n)-\frac{d(\ln n)}{dl}\hat{\tau} \qquad (4.33)$$

Το διάνυσμα ∇n βρίσκεται πάνω στο επίπεδο της ακτίνας, που ορίζεται από τα διανύσματα $\hat{\tau}$ και $\hat{\kappa}$ τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους. Η (4.33) μπορεί να αναλυθεί περαιτέρω, αν τα δυο μέλη της πολλαπλασιαστούν εσωτερικά με το διάνυσμα $\vec{K}=K\hat{\kappa}$.

$$\vec{K}=\nabla(\ln n)-\frac{d(\ln n)}{dl}\hat{\tau}\Rightarrow\vec{K}\cdot\vec{K}=\nabla(\ln n)\cdot\vec{K}-\frac{d(\ln n)}{dl}\hat{\tau}\cdot\vec{K}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow K^2=K\nabla(\ln n)\cdot\hat{\kappa}-\frac{d(\ln n)}{dl}K\hat{\kappa}\cdot\hat{\tau}\Rightarrow K^2=K\nabla(\ln n)\cdot\hat{\kappa}\Rightarrow K=\nabla(\ln n)\cdot\hat{\kappa}$$

$$(4.34)$$

Η (4.34) προέκυψε από την καθετότητα των διανυσμάτων $\hat{\tau}$ και $\hat{\kappa}$. Τέλος, η ακτίνα R της καμπύλης που παρουσιάζει η τροχιά της ακτίνας σε κάθε της σημείο, δίνεται από τον συνδυασμό των (4.31) και (4.34)

$$R=\frac{1}{K}=\frac{1}{\nabla(\ln n)\cdot\hat{\kappa}} \qquad (4.35)$$

Εφόσον η ακτίνα R είναι πάντοτε ένας θετικός αριθμός ισχύει ότι $\left|\angle\left(\hat{\kappa},\nabla n\right)\right| < \pi/2$ πράγμα το οποίο σημαίνει ότι η ακτίνα παρεκκλίνει προς την περιοχή των αυξανομένων n.

4.2 Διάδοση σε σφαιρικά ανομοιογενή μέσα

Ο δείκτης διάθλασης ενός ισοτροπικού μέσου με σφαιρική συμμετρία μεταβάλλεται συναρτήσει μόνο της απόστασης r από το κέντρο της σφαίρας και συνεπώς μπορεί να περιγραφεί από την έκφραση $n = n\left(\vec{r}\right)$. Η υπόθεση αυτή ισχύει για τον ατμοσφαιρικό χώρο, όταν η γη θεωρείται σαν ένα τέλεια σφαιρικό σώμα. Τότε, το gradient του δείκτη διάθλασης δίνεται από τη σχέση:

$$\nabla n = \frac{\partial n}{\partial r}\hat{r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial n}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r\sin\theta}\frac{\partial n}{\partial \phi} = \frac{dn}{dr}\hat{r} = \frac{dn}{dr}\frac{\vec{r}}{r} \tag{4.36}$$

Ας θεωρηθεί τώρα το διάνυσμα $\vec{r}\times\left[n\left(r\right)\hat{\tau}\right]$. Υπενθυμίζεται ότι το διάνυσμα $\vec{r}$ είναι η ακτινική συνιστώσα του σφαιρικού συστήματος συντεταγμένων, ενώ το διάνυσμα $\hat{\tau}$, σε ένα τυχαίο σημείο της καμπύλης της τροχιάς, είναι εφαπτόμενο στην καμπύλη αυτή όπως φαίνεται στο σχήμα 4.4. Παίρνοντας την παράγωγο ως προς l του διανύσματος που ορίζει το εξωτερικό γινόμενο $\vec{r}\times\left[n\left(r\right)\hat{\tau}\right]$ συμπεραίνεται ότι:

$$\frac{d}{dl}\left[\vec{r}\times\left[n\left(r\right)\hat{\tau}\right]\right] = \frac{d\vec{r}}{dl}\times n\hat{\tau} + \vec{r}\times\frac{d}{dl}\left(n\hat{\tau}\right) \tag{4.37}$$

και επειδή $\hat{\tau} = d\vec{r}/dl$ η (4.37) γράφεται:

$$\frac{d}{dl}\left[\vec{r}\times\left[n\left(r\right)\hat{\tau}\right]\right] = \hat{\tau}\times n\hat{\tau} + \vec{r}\times\frac{d}{dl}\left(n\hat{\tau}\right) = n\left(\hat{\tau}\times\hat{\tau}\right) + n\left(\vec{r}\times\frac{d^2\vec{r}}{dl^2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dl}\left[\vec{r}\times\left[n(r)\hat{\tau}\right]\right]=0\Rightarrow \vec{r}\times\left[n(r)\hat{\tau}\right]=\vec{a} \tag{4.38}$$

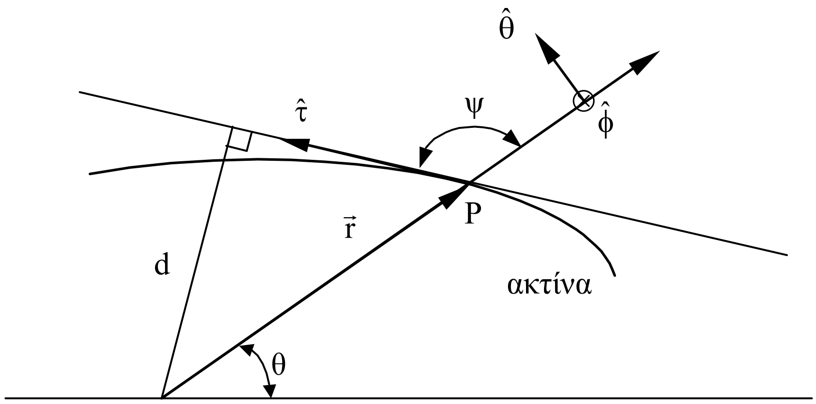
όπου $\vec{a}$ είναι ένα αυθαίρετο σταθερό διάνυσμα. Η (4.38) είναι μια διανυσματική εξίσωση, που επιλύεται ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

$$\vec{r}\times\left[n(r)\hat{\tau}\right]=\vec{a}\Rightarrow n|\vec{r}|\cdot|\hat{\tau}|\sin\psi=a\Rightarrow$$

$$\Rightarrow nr\sin\psi=a \tag{4.39}$$

Η (4.39) που ονομάζεται *εξίσωση του Bouguer* προέκυψε εκτελώντας το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{r}\times\hat{\tau}$ λαμβάνοντας υπόψη ότι το διάνυσμα $\hat{\tau}$ είναι μοναδιαίο. Η γωνία ψ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα δυο προαναφερθέντα διανύσματα και παριστάνεται στο σχήμα 4.4.

Με μια προσεκτική εξέταση της εξίσωσης του Bouguer γίνεται αντιληπτό ότι οι ακτίνες φωτός βρίσκονται πάνω στα επίπεδα που διέρχονται από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων, διότι τα $\vec{r}$ και $\hat{\tau}$ είναι κάθετα προς το αυθαίρετο διάνυσμα $\vec{a}$.



Σχήμα 4.4. Ακτίνα σε μέσο με ακτινική συμμετρία του δείκτη διάθλασης

Μεταφέροντας την παραπάνω πρόταση στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων διαπιστώνεται ότι η ακτίνα βρίσκεται πάνω στο ημιεπίπεδο των σταθερών γωνιών φ και έχει την αναλυτική έκφραση:

$$\vec{r}(\theta) = r(\theta)\hat{r} \tag{4.40}$$

όπου ο όρος $r(\theta)$ είναι σταθερός, ή αντιστρέφοντας, ο όρος $\theta(r)$ είναι σταθερός. Για τον υπολογισμό αυτής της παραμέτρου, είναι αναγκαία η εισαγωγή του στοιχειώδους γραμμικού στοιχείου $d\vec{l}$, που ορίζεται ως εξής:

$$d\vec{l} = \hat{r}dr + r\hat{\theta}d\theta + r\sin\theta\hat{\phi}d\phi \tag{4.41}$$

Το διάνυσμα $d\vec{l}$ έχει μέτρο ίσο με τη στοιχειώδη γραμμική ποσότητα dl και μπορεί να θεωρηθεί παράλληλο με το εφαπτόμενο σε αυτό, διάνυσμα $\hat{\tau}$. Δηλαδή $d\vec{l} = dl\hat{\tau}$. Όμως, έχει ήδη δειχθεί ότι η ακτίνα βρίσκεται πάνω σε επίπεδα σταθερών γωνιών φ ή σε επίπεδα όπου ισχύει $d\phi = 0$. Άρα η (4.41) γράφεται:

$$d\vec{l} = \hat{r}dr + rd\theta\hat{\theta} \tag{4.42}$$

Η εύρεση του μέτρου του $d\vec{l}$ γίνεται απευθείας από την παραπάνω εξίσωση, με διαίρεση και των δυο μελών με dθ οπότε:

$$d\vec{l} = \hat{r}dr + rd\theta\hat{\theta} \Rightarrow \frac{d\vec{l}}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\hat{r} + r\hat{\theta} \Rightarrow dl = d\theta\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} \tag{4.43}$$

Ας θεωρηθεί τώρα το εξωτερικό γινόμενο $\vec{r}(\theta)\times d\vec{l}$ το οποίο αναλύεται ως εξής

$$\vec{r}(\theta)\times d\vec{l} = r(\theta)\hat{r}\times dl\hat{\tau} \tag{4.44}$$

Με χρήση της (4.42), η (4.44) γίνεται

$$r(\theta)\hat{r}\times dl\hat{\tau} = r\hat{r}\times\left(dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta}\right) = rdr\left(\hat{r}\times\hat{r}\right) + r^2d\theta\left(\hat{r}\times\hat{\theta}\right) \tag{4.45}$$

Εφαρμόζοντας τις ταυτότητες $\hat{r}\times\hat{r}=0$ και $\hat{r}\times\hat{\theta}=\hat{\phi}$ η (4.45) μπορεί να απλοποιηθεί στην παρακάτω σχέση:

$$r(\theta)\hat{r}\times dl\hat{\tau}=r^2 d\theta\hat{\phi}\Rightarrow\left|r(\theta)\hat{r}\times dl\hat{\tau}\right|=\pm r^2 d\theta \tag{4.46}$$

Το αριστερό μέλος της (4.46) σε συνδυασμό με την εξίσωση Bouguer (4.39) μπορεί να αναλυθεί σύμφωνα με τον παρακάτω συλλογισμό:

$$r(\theta)\hat{r}\times dl\hat{\tau}=rdl(\hat{r}\times\hat{\tau})\Rightarrow\left|r(\theta)\hat{r}\times dl\hat{\tau}\right|=rdl\sin\psi=\frac{a}{n}dl \tag{4.47}$$

Ο συνδυασμός των (4.46) και (4.47) με ταυτόχρονη χρήση της (4.43) καταλήγει στα εξής:

$$\frac{a}{n}dl=\pm r^2 d\theta\Rightarrow\frac{a}{n}d\theta\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2}=\pm r^2 d\theta\Rightarrow\frac{a}{n}\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2}=\pm r^2\Rightarrow$$

$$\frac{a^2}{n^2}\left(\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2\right)=r^4\Rightarrow\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=\frac{n^2r^4}{a^2}-r^2\Rightarrow\frac{d\theta}{dr}=\pm\sqrt{\frac{a^2}{n^2r^4-a^2r^2}}\Rightarrow$$

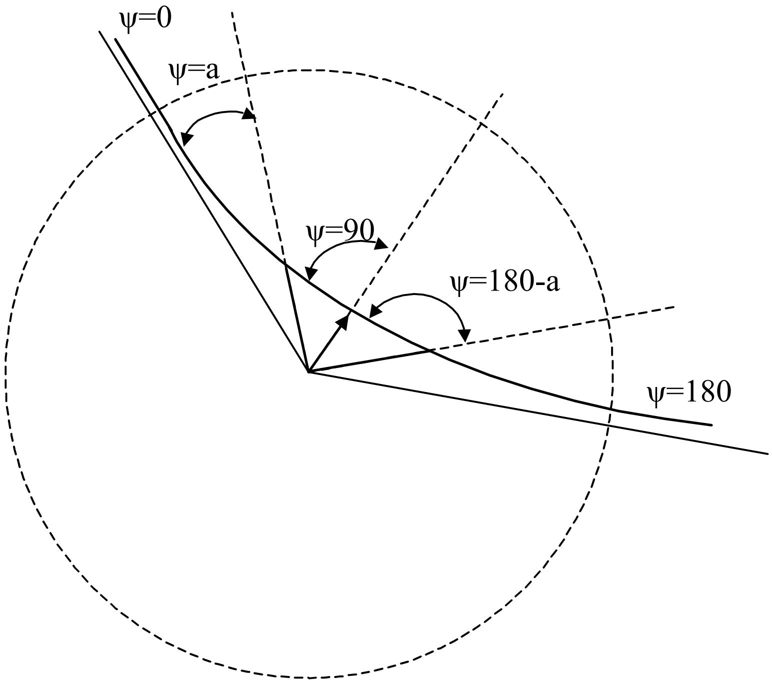
$$\Rightarrow d\theta=\pm a\frac{dr}{r\sqrt{(nr)^2-a^2}} \tag{4.48}$$

Τέλος, ολοκληρώνοντας τα δυο μέλη της (4.48) προκύπτει η τελική έκφραση για την εξίσωση της ακτίνας σε σφαιρικό μέσο με ακτινική συμμετρία:

$$\theta-\theta_0=\pm a\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r\sqrt{(nr)^2-a^2}} \tag{4.49}$$

Η σταθερά a μπορεί να προσδιοριστεί, από ένα σημείο $P_0=P(r_0,\theta_0)$ πάνω στην ακτίνα με γνωστές συντεταγμένες r_0 και θ_0 και από την εκφραση $\vec{a}=a\hat{a}=n(\vec{r}_0\times\hat{\tau}_0)$.

όπου $\hat{\tau}_0$ το εφαπτομενικό διάνυσμα της ακτίνας στο σημείο P_0.



Σχήμα 4.5. Μια τυπική ακτίνα εντός συμμετρικού σφαιρικού μέσου

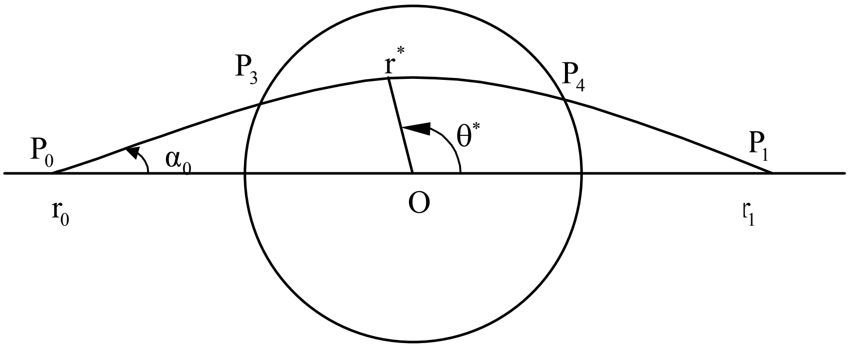
Με χρήση της εξίσωσης (4.49) ή της εξίσωσης Bouguer, είναι δυνατό να σχεδιαστεί μια τυπική τροχιά που ακολουθούν οι ακτίνες εντός του σφαιρικού ανομοιογενούς μέσου, και να προσδιοριστούν οι ασύμπτωτες της. Μια τέτοια τυπική τροχιά φαίνεται στο σχήμα 4.5.

4.3. Ο φακός Luneburg

Ας υποτεθεί μια σφαίρα κανονικοποιημένης ακτίνας R=1 της οποίας ο δείκτης διάθλασης σε κάθε εσωτερικό σημείο, μεταβάλλεται συναρτήσει της ακτίνας r. Η ακτίνα r διέρχεται από το συγκεκριμένο σημείο και το κέντρο της σφαίρας. Ο χώρος έξω από τη σφαίρα θεωρείται κενός με δείκτη διάθλασης ίσο με τη μονάδα, δηλαδή

$$n(r) = \begin{cases} n(r) & r \le 1 \\ 1 & r > 1 \end{cases} \tag{4.50}$$

Σκοπός της παρακάτω ανάλυσης είναι να βρεθεί μια συνάρτηση για το δείκτη διάθλασης $n(r)$ έτσι ώστε όλες οι ακτίνες που διέρχονται από το σημείο $P_0(x_0 = -r_0, y_0 = 0)$ και εισέρχονται στη σφαίρα να διέρχονται επίσης και από το σημείο $P_1(x_1 = r_1, y_1 = 0)$.



Σχήμα 4.6. Ακτίνα φωτός και φακός Luneburg

Έστω P_3 και P_4 τα σημεία όπου η ακτίνα διεισδύει και εξέρχεται από τον φακό (σχήμα (4.6). Ας θεωρηθεί η συνάρτηση $r(\theta)$, όπου r είναι η απόσταση της ακτίνας από το κέντρο της σφαίρας και θ είναι η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ της ακτίνας r και της ευθείας OP_1.

Εφόσον στα σημεία P_3, P_4 ισχύει $r = 1$, γίνεται αντιληπτό ότι η συνάρτηση $r(\theta)$ θα φθίνει μέχρι να φτάσει σε ένα ελάχιστο $r^* < 1$ μέσα στο φακό, σε μια συγκεκριμένη γωνία θ^*. Όταν η οπτική ακτίνα περάσει αυτό το σημείο (r^*, θ^*), η $r(\theta)$ θα αρχίσει πάλι να αυξάνει. Προκειμένου να απλοποιηθεί το πρόβλημα δε θα ληφθούν υπόψη οι συναρτήσεις $n(r)$ οι οποίες προκαλούν παραπάνω από ένα ακρότατο r^* στη συνάρτηση $r(\theta)$.

Σε αντίθεση με την ακτίνα r της οπτικής ακτίνας, η γωνία θ ελαττώνεται διαρκώς, από την αρχική της τιμή $\theta_0 = \pi$ μέχρι την τελική της τιμή $\theta_1 = 0$, κατά την διαδρομή της από το σημείο P_0 στο σημείο P_1.

Η (4.48), υποδεικνύει ότι:

$$\frac{d\theta}{dr} = \pm\sqrt{\frac{a^2}{n^2 r^4 - a^2 r^2}} \tag{4.51}$$

Όταν η γωνία θ και η ακτίνα r της οπτικής ακτίνας ελαττώνονται (περιοχή $\pi \le \theta \le \theta^*$, σχήμα 4.6) τότε θα ισχύει αντιστοίχως $d\theta < 0$ και $dr < 0$. Συνεπώς σ' αυτή την περίπτωση θα ισχύει $\frac{d\theta}{dr} > 0$. Επομένως η σχέση (4.51) θα διατηρεί το θετικό της πρόσημο και θα γράφεται

$$\frac{d\theta}{dr} = \sqrt{\frac{a^2}{n^2 r^4 - a^2 r^2}} \Rightarrow \theta - \theta_0 = a\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r\sqrt{(nr)^2 - a^2}} \tag{4.52}$$

Στο σημείο στο οποίο η $r(\theta)$ παρουσιάζει ελάχιστο η (4.52) έχει τη μορφή:

$$\theta^* = \pi + a\int_{r_0}^{r^*} \frac{dr}{r\sqrt{(nr)^2 - a^2}} \tag{4.53}$$

Δηλαδή στην (4.52) τέθηκε $r = r^*$, $\theta = \theta^*$ και $\theta_0 = \pi$.

Στην αντίθετη περίπτωση, δηλαδή όταν η γωνία θ φθίνει και η ακτίνα r της οπτικής ακτίνας αυξάνει (περιοχή $\theta^* \le \theta \le 0$, σχήμα 4.6) τότε θα ισχύει αντιστοίχως $d\theta < 0$ και $dr > 0$. Άρα σ' αυτήν την περίπτωση θα ισχύει $\frac{d\theta}{dr} < 0$. Επομένως η σχέση (4.51) θα διατηρεί το αρνητικό της πρόσημο. Αν γίνει και χρήση της συντομογραφίας $p(r) = rn(r)$ τότε η (4.51) θα πάρει τη μορφή:

$$\frac{d\theta}{dr} = -\sqrt{\frac{a^2}{n^2r^4 - a^2r^2}} \Rightarrow \theta - \theta^* = -a\int_{r^*}^{r} \frac{dr}{r\sqrt{(nr)^2 - a^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = \theta^* - a\int_{r^*}^{r} \frac{dr}{r\sqrt{p^2 - a^2}} \tag{4.54}$$

Θέτοντας στην (4.54) το επιθυμητό σημείο συγκέντρωσης $P_1(x_1 = r_1; y_1 = 0)$ προκύπτει ότι

$$-\pi = a\int_{r_0}^{r^*} \frac{dr}{r\sqrt{p^2 - a^2}} - a\int_{r^*}^{r_1} \frac{dr}{r\sqrt{p^2 - a^2}} \tag{4.55}$$

Εάν είναι γνωστή η εξίσωση $p = rn(r)$ τότε η εξίσωση (4.55) καθορίζει το σημείο $P_1(x_1 = r_1; y_1 = 0)$. Στο σημείο αυτό η δυναμική γραμμή τέμνει τον άξονα των x. Σε περίπτωση που δίνεται το σημείο $P_1(x_1 = r_1; y_1 = 0)$ σαν σταθερά, τότε η σχέση (4.55) αποτελεί μια ολοκληρωτική εξίσωση της συνάρτησης $p = rn(r)$ για $r \le 1$. Στο παράρτημα V αποδεικνύεται ότι η (4.55) μετασχηματίζεται στην

$$a\int_{r^*}^{1} \frac{dr}{r\sqrt{p^2(r) - a^2}} = f(a) \tag{4.56}$$

όπου $f(a)$ είναι η συνάρτηση

$$f(a) = \frac{1}{2}\left(\pi + \arcsin\frac{a}{r_1} + \arcsin\frac{a}{r_0} - 2\arcsin a\right) \tag{4.57}$$

Για περαιτέρω επεξεργασία της (4.56) γίνεται η αντικατάσταση

$$g(p) = -\ln r, dr/r = -g'(p)dp \tag{4.58}$$

οπότε τα όρια ολοκλήρωσης μετατρέπονται στα εξής

Για $r = 1 \Rightarrow p = n(1) = 1$

Για $r = r^*$ η συνάρτηση $r(\theta)$ παρουσιάζει ελάχιστο, άρα

$$\left.\frac{dr(\theta)}{d\theta}\right|_{r=r^*} = 0 \tag{4.59}$$

Ο συνδυασμός των (4.51) και (4.59) θα δώσει

$$\left.\frac{dr(\theta)}{d\theta}\right|_{r=r^*} = 0 \Rightarrow \pm\left.\sqrt{\frac{n^2(r)r^4 - a^2r^2}{a^2}}\right|_{r=r^*} = 0 \Rightarrow \left(r^*\right)^4 n^2\left(r^*\right) - a^2\left(r^*\right)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(r^*\right)^4 n^2\left(r^*\right) = a^2\left(r^*\right)^2 \Rightarrow a = r^* n\left(r^*\right) \Rightarrow p\left(r^*\right) = a \tag{4.60}$$

συνεπώς η (4.56) παίρνει τη μορφή:

$$-a\int_a^1 \frac{g'(p)\,dp}{\sqrt{p^2(r) - a^2}} = f(a) \tag{4.61}$$

Για την λύση αυτής της εξίσωσης θα εφαρμοσθεί το θεώρημα της αντιστροφής που παρουσιάζεται εδώ και αποδεικνύεται στο παράρτημα V.

Θεώρημα Αντίστροφης

Εάν η συνάρτηση $f(a)$ ορίζεται από την εξίσωση

$$f(a) = -a\int_a^\lambda \frac{dg(p)}{\sqrt{p^2(r) - a^2}} \tag{4.62}$$

στο διάστημα $0 \le a \le \lambda$ τότε η συνάρτηση $g(p)$ προσδιορίζεται από το ολοκλήρωμα

$$g(p)-g(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_p^{\lambda}\frac{f(a)}{\sqrt{a^2-p^2}}da \tag{4.63}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα της αντιστροφής στη σχέση (4.61) προκύπτει

$$g(p)-g(1)=\frac{2}{\pi}\int_p^{1}\frac{f(a)}{\sqrt{a^2-p^2}}da$$

$$g(p)-g(1)=\frac{2}{\pi}\int_p^{1}\frac{\frac{1}{2}\left(\pi+\arcsin\frac{a}{r_1}+\arcsin\frac{a}{r_0}-2\arcsin a\right)}{\sqrt{a^2-p^2}}da$$

$$g(p)-g(1)=\frac{2}{\pi}\int_p^{1}\frac{\frac{1}{2}\pi-\arcsin a}{\sqrt{a^2-p^2}}da+\frac{1}{\pi}\int_p^{1}\frac{\arcsin\frac{a}{r_1}+\arcsin\frac{a}{r_0}}{\sqrt{a^2-p^2}}da \tag{4.64}$$

Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της (4.64), όπως αποδεικνύεται στο παράρτημα V, ισούται με $-\ln p$ οπότε η (4.64) μετασχηματίζεται στην

$$g(p)-g(1)=-\ln p+\frac{1}{\pi}\int_p^{1}\left(\arcsin\frac{a}{r_1}+\arcsin\frac{a}{r_0}\right)\frac{da}{\sqrt{a^2-p^2}} \tag{4.65}$$

Για επίλυση του ολοκληρώματος της (4.65) πραγματοποιείται νέα αντικατάσταση:

$$\omega(p,k)=\frac{1}{\pi}\int_p^{1}\frac{\arcsin\frac{t}{k}}{\sqrt{t^2-p^2}}dt \tag{4.66}$$

Από την (4.58) προκύπτει ότι $g(1)=0$ και $g(p)=-\ln r$. Άρα η (4.65) με την βοήθεια της (4.66) μετασχηματίζεται στην

$$-\ln r + \ln p = \ln\frac{p}{r} = \omega\left(p, r_0\right) + \omega\left(p, r_1\right) \tag{4.67}$$

αντικαθιστώντας $p = nr$ προκύπτει

$$\ln n = \omega\left(p, r_0\right) + \omega\left(p, r_1\right) \tag{4.68}$$

Η παραπάνω εξίσωση σε συνδυασμό με την σχέση $p = nr$ καθορίζουν την συνάρτηση $n = n\left(r\right)$.

$$r = pe^{-\omega(p,r_0)-\omega(p,r_1)} \tag{4.69}$$

$$n = e^{\omega(p,r_0)+\omega(p,r_1)} \tag{4.70}$$

Για την ειδική περίπτωση, όπου $r_0 = \infty$ και $r_1 = 1$ στο παράρτημα V αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι ισότητες

$$\omega\left(p, \infty\right) = 0 \tag{4.71}$$

$$\omega\left(p, 1\right) = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \sqrt{1 - p^2}\right) \tag{4.72}$$

Αντικαθιστώντας τις (4.71) και (4.72) στην (4.70) προκύπτει ότι ο δείκτης διάθλασης παίρνει την μορφή

$$n\left(r\right) = \sqrt{2 - r^2} \tag{4.73}$$

η οποία εκπροσωπεί και τον δείκτη διάθλασης στον φακό Luneburg.
Η τροχιά που διαγράφει μια ακτίνα φωτός θα δίνεται από την ολοκληρωτική εξίσωση (4.49):

$$\theta-\theta_0=a\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r\sqrt{(nr)^2-a^2}} \tag{4.74}$$

Με αντικατάσταση της (4.73) στη (4.74) προκύπτει ότι:

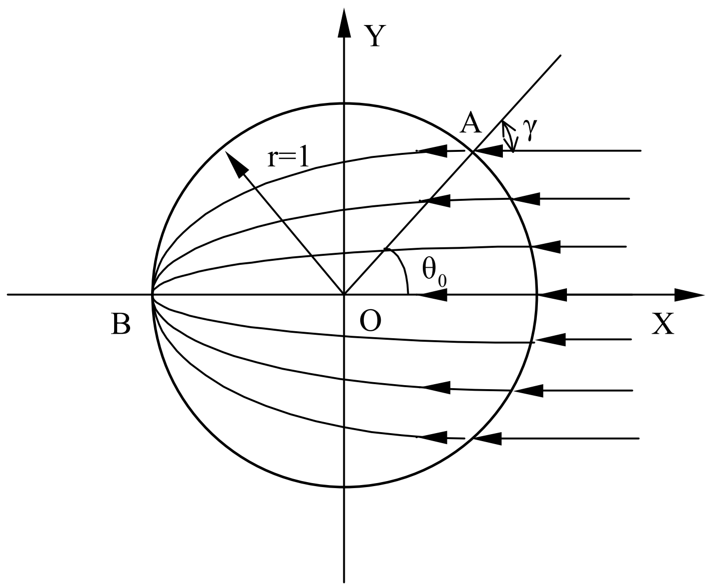
$$\theta-\theta_0=a\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r\sqrt{(nr)^2-a^2}}=a\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r\sqrt{\left(\sqrt{2-r^2}\,r\right)^2-a^2}}\Rightarrow$$

$$\theta-\theta_0=a\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r\sqrt{\left(2-r^2\right)r^2-a^2}} \tag{4.75}$$

Κάθε ακτίνα που προσπίπτει στο φακό διέρχεται από την επιφάνεια του, δηλαδή από ένα πλήθος σημείων με $r_0=1$ και $\theta_0=\gamma$ (σχήμα 4.7). Στο σημείο αυτό, ο δείκτης διάθλασης ισούται με τη μονάδα (σχέση(4.73)).

Συνεπώς, η εξίσωση Bouguer για ένα τέτοιο σημείο θα δώσει:

$$nr\sin\theta=a\xrightarrow[\theta=\theta_0=\gamma]{r=r_0=1,n=1}a=\sin\gamma \tag{4.76}$$



Σχήμα 4.7. Εστίαση με φακό Luneburg

Με συνδυασμό των (4.75) και (4.76) προκύπτει τελικά για την εξίσωση ακτίνας

$$\theta-\gamma=a\int_1^r\frac{dr}{r\sqrt{\left(2-r^2\right)r^2-a^2}}=\int_1^r\frac{\sin\gamma dr}{r\sqrt{\left(2-r^2\right)r^2-\sin^2\gamma}}=\int_1^r\frac{\sin\gamma dr}{r\sqrt{2r^2-r^4-1+\cos^2\gamma}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\theta-\gamma=\int_1^r\frac{\sin\gamma dr}{r\sqrt{\cos^2\gamma-\left(r^2-1\right)^2}} \tag{4.77}$$

Στο παράρτημα V αποδεικνύεται ότι το αόριστο ολοκλήρωμα της (4.77) ισούται με την παρακάτω έκφραση

$$\int\frac{\sin\gamma dr}{r\sqrt{\cos^2\gamma-\left(r^2-1\right)^2}}=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{r^2-\sin^2\gamma}{r^2\cos\gamma}\right)$$

οπότε η (4.77) παίρνει τελικά τη μορφή:

$$\theta-\gamma=\left[\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{r^2-\sin^2\gamma}{r^2\cos\gamma}\right)\right]_1^r\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\theta-\gamma=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{r^2-\sin^2\gamma}{r^2\cos\gamma}\right)-\frac{1}{2}\arcsin\left(\cos\gamma\right) \tag{4.78}$$

Υπενθυμίζεται ότι η εξίσωση ακτίνας ισχύει για $r=1,\theta=\gamma$. Για τον εντοπισμό του σημείου εξόδου των ακτίνων από το φακό, τίθεται $r=1$ και η (4.78) γίνεται:

$$\theta-\gamma=\frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{2}-\gamma\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=\pi-\gamma\Rightarrow\theta=\pi \tag{4.79}$$

Συνεπώς, όλες οι ακτίνες συγκεντρώνονται στο σημείο Β που έχει συντεταγμένες $r=1,\theta=\pi$. Αυτή είναι και η σημαντικότερη ιδιότητα του φακού Luneburg, δηλαδή να εστιάζει την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία σε ένα συγκεκριμένο σημείο πανω στην περιφέρεια του.

4.4 Ιδιότητες του φακού Luneburg

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται οι κυριότερες ιδιότητες του φακού Luneburg που προκύπτουν από τη μαθηματική ανάλυση που προηγήθηκε.

Ένας φακός Luneburg είναι ικανός να δέχεται πολλές δέσμες ταυτόχρονα. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας περισσότερες από μια υποδοχές (feeds), είναι δυνατή η επεξεργασία πολλαπλών σημάτων ταυτόχρονα, τα οποία προέρχονται από δυο ή περισσότερες πήγες ακτινοβολίας.

Επιπλέον, ο φακός αυτός είναι σε θέση να επεξεργάζεται ένα μεγάλο εύρος συχνοτήτων στην μικροκυματική περιοχή (από 1 έως 40 GHz), λόγω του ότι η διηλεκτρική του σταθερά δεν παρουσιάζει σημαντικές μεταβολές με την συχνότητα, δεδομένου ότι είναι πραγματικός αριθμός.

Ακόμη, δεν είναι απαραίτητη η μετακίνηση του φακού παράλληλα με τη διεύθυνση πρόσπτωσης, παρά μόνο της υποδοχής του. Το γεγονός αυτό επιτρέπει στο χειριστή να μεταβάλλει με ευκολία τη διεύθυνση ανίχνευσης του φακού και να μην απαιτούνται πολύπλοκες κατασκευές στήριξης. Η αλλαγή της διεύθυνσης του κύριου λοβού γίνεται με την ίδια ευκολία όπως σε μια στοιχειοκεραία, αλλά το κόστος ενός φακού Luneburg είναι πολύ χαμηλότερο από μια στοιχειοκεραία ίδιων προδιαγραφών.

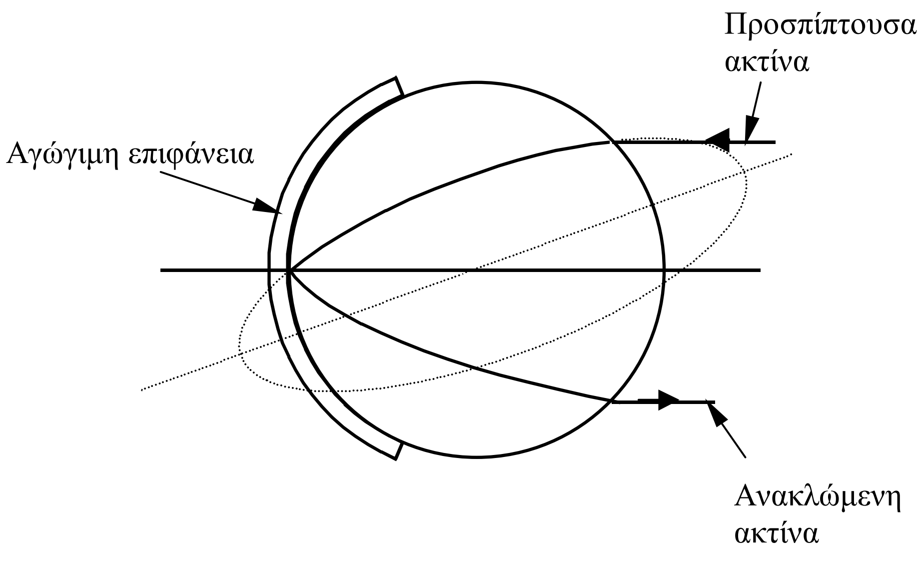
Τέλος, ένα τέτοιος φακός έχει την ιδιότητα να παρουσιάζει μεγάλο κέρδος. Το κέρδος του φτάνει αυτό του δορυφορικού δέκτη. Ένα χαρακτηριστικό νούμερο είναι ότι ένας φακός 6 στρωμάτων, ακτίνας 16 ιντσών ενισχύει το σήμα κατά 31,5 dB στη συχνότητα των 10.7 GHz.

4.5. Εφαρμογές του φακού Luneburg

Ο φακός Luneburg βρίσκει εφαρμογές στις δορυφορικές λήψεις, στα radar, στα ραδιοτηλεσκόπια, στη ναυσιπλοΐα και σε στρατιωτικές εγκαταστάσεις ανίχνευσης.

Ιδιαίτερα στις δορυφορικές λήψεις, λόγω της ικανότητας του να χειρίζεται πολλές δέσμες ταυτόχρονα, λόγω του μεγάλου του κέρδους και της εύκολης μεταβολής της διεύθυνσης του κύριου λοβού, χρησιμοποιείται ευρέως. Συχνά, γίνεται χρήση του σε συστήματα εντοπισμού δορυφόρων που κινούνται σε χαμηλή τροχιά γύρω από τη γη (LEOS) και σε εφαρμογές που είναι απαραίτητη η επικοινωνία με δυο ή περισσότερους δορυφόρους ταυτόχρονα.

Στη ναυσιπλοΐα προσαρτάται σε συστήματα radar για τον εύκολο εντοπισμό πλοίων. Ένα παράδειγμα, είναι η τοποθέτηση ενός συστήματος φακών Luneburg σε ένα σκάφος, σε συνδυασμό με αγώγιμες επιφάνειες, οι οποίες παίζουν το ρόλο του ανακλαστήρα (σχήμα 4.8).Το αποτέλεσμα του συνδυασμού αυτού είναι η αύξηση της διατομής οπισθοσκέδασης του σκάφους και επομένως ο ευκολότερος εντοπισμό του πλοίου από συστήματα radar.



Σχήμα 4.8 Διαδρομή μίας ακτίνας μέσα σε ένα φακό Luneburg πάνω στον οποίο έχει προσαρτηθεί μια αγώγιμη επιφάνεια.

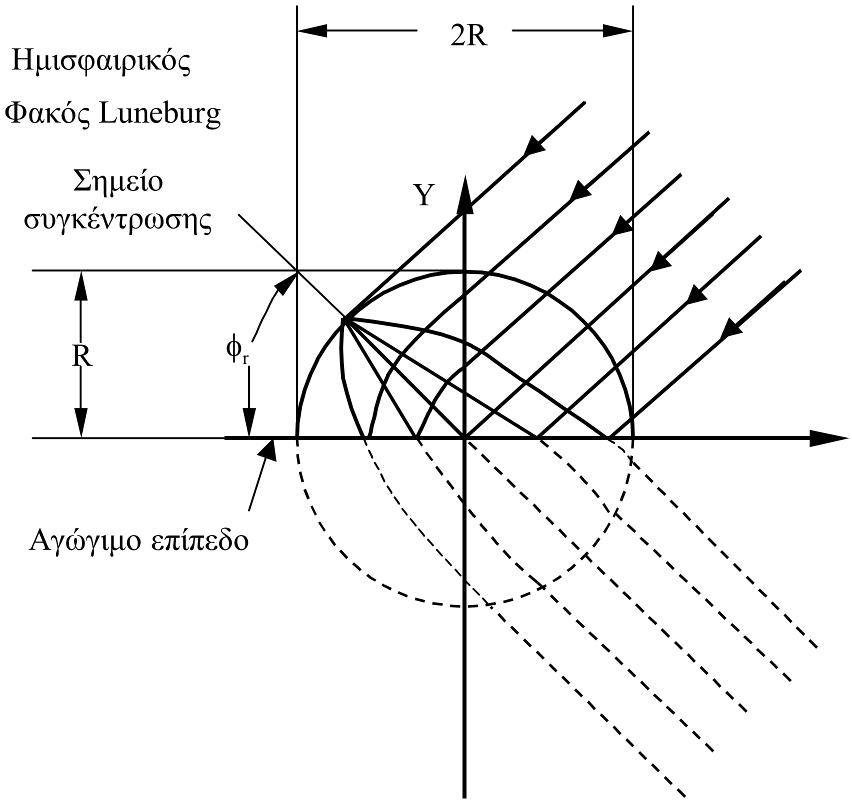
Στον τομέα των ραδιοτηλεσκόπιων υπάρχει μια μεγάλη αναθέρμανση ενδιαφέροντος γύρω από την μελέτη του φακού Luneburg. Είναι αξιοσημείωτο ότι στην Αυστραλία γίνονται μελέτες για την κατασκευή του καλύτερου ραδιοτηλεσκόπιου SKA (Square Kilometer Array) το οποίο θα αποτελείται από χιλιάδες φακούς Luneburg και θα έχει έκταση ενός τετραγωνικού χιλιομέτρου (σχήμα 4.9).

Σχήμα 4.9 Το υπό κατασκευή ραδιοτηλεσκόπιο SKA

Ακόμη στην περιοχή των μικροκυμάτων ο φακός Luneburg χρησιμοποιείται για εύρεση της ραδιοσυχνότητας και της μικροκυματικής ισχύος συναρτήσει της διευθύνσεως στον τρισδιάστατο χώρο.

Σε πολλές εφαρμογές συναντάται ο φακός Luneburg σε σχήμα ημισφαιρίου πάνω σε μια αγώγιμη πλάκα (σχήμα 4.10).

Σ’ αυτή την περίπτωση εάν το ύψος της κεραίας είναι R, το άνοιγμα της (aperture) είναι 2R (άρα δεν ελαττώνεται το κέρδος της), γι’ αυτό και υπερτερεί απ’ όλες τις άλλες κεραίες. Με τη μέθοδο αυτή μειώνεται ο όγκος του φακού χωρίς αυτό να σημαίνει ότι υπάρχουν απώλειες στο κέρδος του συστήματος. Συνεπώς, μπορεί να τοποθετηθεί σε αεροσκάφη που επικοινωνούν με δορυφόρους, χωρίς να υπάρχει αλλοίωση στην αεροδυναμική του αεροσκάφους (σχήμα 4.11)

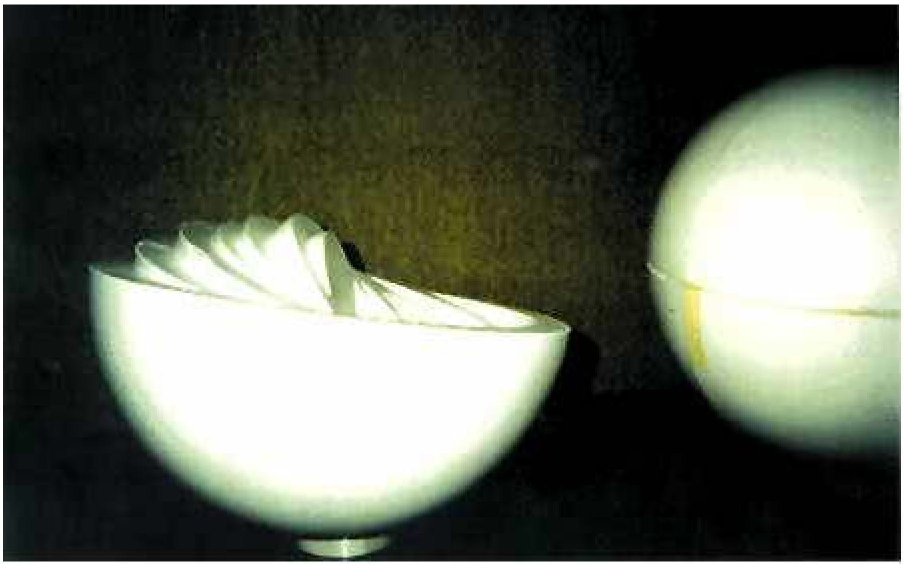


Σχήμα 4.10 Ο ημισφαιρικός φακός Luneburg

Σχήμα 4.11 Σύστημα φακών Luneburg που προσαρτάται σε αεροσκάφος.

4.6. Κατασκευή φακών Luneburg

Ένας φακός Luneburg κατασκευάζεται από ομογενή, ομόκεντρα, διακριτά στρώματα (σχήμα 4.12), η διηλεκτρική σταθερά των οποίων ικανοποιεί τη σχέση (4.73).



Σχήμα 4.12. Φακός Luneburg κατασκευασμένος από ομογενή, ομόκεντρα, διακριτά στρώματα.

Παρόμοια κατασκευαστική τεχνική εμφανίζεται και στους Grandient-Index (GRIN) φακούς. Στο παρελθόν ένας τέτοιος φακός ήταν δύσκολο να κατασκευαστεί λόγω του σφαιρικού σχήματος του φακού, της μεγάλης τιμής της σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς στο κέντρο του φακού ($n(0)=2$), λόγω του ακριβούς και απαιτούμενου ελέγχου της διηλεκτρικής σταθεράς, των πολλών και λεπτών στρωμάτων του φακού και λόγω του ότι η διηλεκτρική σταθερά στο εξωτερικό στρώμα πρέπει να είναι ίση με την διηλεκτρική σταθερά του περιβάλλοντα χώρου του φακού. Εξαιτίας των παραπάνω προβλημάτων δεν ήταν δυνατή η χρήση του σε πλειάδα εφαρμογών. Σήμερα όμως με τις καινούργιες κατασκευαστικές τεχνικές είναι εφικτό να κατασκευαστεί. Τα υλικά τα οποία χρησιμοποιούνται για την κατασκευή ενός τέτοιου φακού (όπως το πολυαιθυλένιο (ε_{r0}=2,25, d_0=0,092g/cm^3) και η πολυστερίνη (ε_{r0}=2,54, d_0=1,05g/cm^3) είναι ελαφρά, δεν απορροφούν πολύ ισχύ και έχουν ελεγχόμενη διηλεκτρική σταθερά. Ο έλεγχος του δείκτη διάθλασης στα υλικά αυτά επιτυγχάνεται με τη συμπίεση. Αποτέλεσμα όμως της συμπίεσης είναι ότι τα υλικά αυτά μετά την κατεργασία τους αποκτούν αρκετό βάρος. Ένας εμπειρικός τύπος ο οποίος συνδέει την σχετική διηλεκτρική σταθερά ε_r με την πυκνότητα του υλικού d είναι

$$\varepsilon_r = \frac{2}{5}\left(\varepsilon_{r0}\right)\frac{d}{d_0} + \frac{3}{5}\left[1 + \frac{d}{d_0}(\varepsilon_{r0} - 1)\right] \tag{4.80}$$

Τέλος με τις καινούργιες κατασκευαστικές τεχνικές αποφεύγονται τα κενά αέρος μέσα στον φακό. Όλα αυτά έχουν σαν αποτέλεσμα ο κατασκευασμένος φακός να προσεγγίζει σε ικανοποιητικό βαθμό το θεωρητικό μοντέλο του φακού.

Όπως αναμένει κανείς, όσο πιο πολλά στρώματα διαθέτει ο φακός τόσο περισσότερο η συμπεριφορά του προσεγγίζει το θεωρητικό φακό Luneburg. Όμως στις πρακτικές εφαρμογές παρατηρείται μείωση στο κέρδος του φακού, για πολύ μεγάλο αριθμό στρωμάτων, λόγω κενών αέρος ανάμεσα στα στρώματα και του όχι ακριβούς καθορισμού του δείκτη διάθλασης των στρωμάτων. Από την άλλη μεριά έχει παρατηρηθεί ότι η κατασκευή φακών με λίγα στρώματα περιορίζει την αποδοτικότητα του φακού στην εστίαση. Επόμενο είναι, ότι πρέπει να βρεθεί μια μέση λύση για τον καθορισμό του αριθμού των στρωμάτων, ο οποίος θα εξαρτάται απ' το μέγεθος του φακού και από τη συχνότητα στην οποία αυτός πρόκειται να χρησιμοποιηθεί.

4.7. Ο φακός Fisheye του Maxwell

Η ανάλυση που προηγήθηκε στην ενότητα 4.2 για σφαιρικά ανομοιογενή μέσα ακτινικής συμμετρίας, εξειδικεύεται εδώ, στην περίπτωση που ο δείκτης διάθλασης μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση

$$n = \frac{1}{1+\left(r/R\right)^2} \tag{4.81}$$

όπου r είναι η απόσταση από το κέντρο του συστήματος συντεταγμένων (ταυτίζεται με το κέντρο του φακού) και R είναι η ακτίνα της σφαίρας. Η (4.81) είναι η σχέση που χαρακτηρίζει τον δείκτη διάθλασης του φακού Fisheye. Ένα τέτοιο μέσο λέγεται φακός, διότι παρουσιάζει την ιδιότητα να εστιάζει την προσπίπτουσα ακτινοβολία σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο. Οι συντεταγμένες του σημείου αυτού, εξαρτώνται από το είδος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας και τη θέση στην οποία βρίσκεται η ακτινοβολούσα πηγή.

Προς το παρόν θα θεωρηθεί ότι η πηγή είναι μια σημειακή πηγή φωτός τοποθετημένη σε απόσταση r_1 από το κέντρο της σφαίρας. Η τροχιά που διαγράφει μια ακτίνα φωτός θα δίνεται από την ολοκληρωτική εξίσωση (4.49):

$$\theta - \theta_0 = \pm a \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r\sqrt{\left(nr\right)^2 - a^2}} \tag{4.82}$$

όπου a είναι η σταθερή ποσότητα που εισάγει στο πρόβλημα η εξίσωση Bouguer (4.39). Υπενθυμίζεται ότι θ_0 είναι γνωστή συνιστώσα ενός σημείου $P\left(r_0, \theta_0\right)$ που ανήκει στην καμπύλη της τροχιάς και $r_0 = R$ είναι η απόσταση του από το κέντρο του φακού. Αν αντικατασταθεί η εξίσωση (4.81) στην (4.82), τότε προκύπτει:

$$\theta - \theta_0 = \pm a \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r\sqrt{\left(\frac{r}{1+\left(r/R\right)^2}\right)^2 - a^2}} \Rightarrow \theta - \theta_0 = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{a\left(1+\left(r/R\right)^2\right)dr}{r\sqrt{r^2 - a^2\left(1+\left(r/R\right)^2\right)^2}} \tag{4.83}$$

Θέτοντας $r/R = \rho$ και $a = KR$ τότε το ολοκλήρωμα της (4.83) μετατρέπεται στο ακόλουθο

$$\theta - \theta_0 = \pm \int_{r_0/R}^{r/R} \frac{KR\left(1+\rho^2\right)}{\rho\sqrt{R^2\left(\rho^2 - K^2\left(1+\rho^2\right)^2\right)}} d\rho \Rightarrow \theta - \theta_0 = \pm \int_{r_0/R}^{r/R} \frac{K\left(1+\rho^2\right)}{\rho\sqrt{\rho^2 - K^2\left(1+\rho^2\right)^2}} d\rho \tag{4.84}$$

Το δεξί μέλος της (4.84) όπως αποδεικνύεται στο παράρτημα V, ισούται με

$$\theta-\theta_0=\left[\arcsin\left(\frac{K}{\sqrt{1-4K^2}}\frac{\rho^2-1}{\rho}\right)\right]_{r_0/R}^{r/R} \tag{4.85}$$

Αν αναλυθεί η (4.85) και εκτελεστούν οι αντικαταστάσεις $K=a/R$ και $\rho=r/R$ επαναφέρονται στην (4.85) οι μεταβλητές a και r.

$$\theta-\theta_0=\arcsin\left(\frac{K}{\sqrt{1-4K^2}}\frac{(r/R)^2-1}{r/R}\right)-\arcsin\left(\frac{K}{\sqrt{1-4K^2}}\frac{1-1}{1}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\theta-\theta_0=\arcsin\left(\frac{K}{\sqrt{1-4K^2}}\frac{(r/R)^2-1}{r/R}\right)\Rightarrow\frac{K}{\sqrt{1-4K^2}}\frac{(r/R)^2-1}{r/R}=\sin(\theta-\theta_0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\left(\frac{r}{R}\right)^2-1}{\frac{r}{R}}\frac{\frac{a}{R}}{\sqrt{1-4\left(\frac{a}{R}\right)^2}}=\sin(\theta-\theta_0)\Rightarrow\frac{\frac{r^2-R^2}{R^2}}{\frac{r}{R}}\frac{\frac{a}{R}}{\frac{\sqrt{R^2-4a^2}}{R}}=\sin(\theta-\theta_0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{r^2-R^2}{rR}\frac{a}{\sqrt{R^2-4a^2}}=\sin(\theta-\theta_0) \tag{4.86}$$

Η εξίσωση (4.86) είναι εκφρασμένη στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων. Έχει όμως δειχθεί (από το θεώρημα Bouguer), ότι οι ακτίνες βρίσκονται πάνω σε επίπεδα που έχουν σταθερή συνιστώσα φ. Έτσι εξηγείται και το γεγονός ότι η εξίσωση της ακτίνας στην περίπτωση αυτή είναι συνάρτηση μόνο των συντεταγμένων r και θ. Άρα μπορεί να θεωρηθεί το πολικό σύστημα συντεταγμένων, μια και πλέον η ανάλυση περιορίζεται στον προσδιορισμό καμπύλων που εντοπίζονται στο ίδιο επίπεδο. Για να μετατραπεί η (4.86) στο καρτεσιανό σύστημα μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι γνωστές σχέσεις μετασχηματισμού.

$$x=r\cos\theta \tag{4.87}$$

$$y = r\sin\theta \tag{4.88}$$

Θέτοντας τις (4.87) και (4.88) στην (4.86) και εφαρμόζοντας την τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \sin B\cos A$, προκύπτει ότι

$$\frac{r^2-R^2}{rR}\frac{a}{\sqrt{R^2-4a^2}} = \sin(\theta-\theta_0) \Rightarrow ar^2 - aR^2 = rR\sqrt{R^2-4a^2}\sin(\theta-\theta_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 - R^2 - \frac{r}{a}R\sqrt{R^2-4a^2}\sin(\theta-\theta_0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - R^2 - \frac{r}{a}R\sqrt{R^2-4a^2}\left[\cos\theta_0\sin\theta - \sin\theta_0\cos\theta\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - R^2 - \frac{R}{a}\sqrt{R^2-4a^2}\,r\cos\theta_0\sin\theta + \frac{R}{a}\sqrt{R^2-4a^2}\,r\sin\theta_0\cos\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 2\frac{R}{2a}\sqrt{R^2-4a^2}\,x\sin\theta_0 + \left(\frac{R}{2a}\sqrt{R^2-4a^2}\sin\theta_0\right)^2 + y^2 - 2\frac{R}{2a}\sqrt{R^2-4a^2}\,y\cos\theta_0 +$$

$$+\left(\frac{R}{2a}\sqrt{R^2-4a^2}\cos\theta_0\right)^2 - \left(\frac{R}{2a}\sqrt{R^2-4a^2}\right)^2\left(\cos^2\theta_0 + \sin^2\theta_0\right) = R^2 \tag{4.89}$$

Η (4.89) προέκυψε με προσθαφαίρεση των ποσοτήτων

$$\left(\frac{R}{2a}\sqrt{R^2-4a^2}\right)^2\cos^2\theta_0 \quad \text{και} \quad \left(\frac{R}{2a}\sqrt{R^2-4a^2}\right)^2\sin^2\theta_0 \tag{4.90}$$

προκειμένου να σχηματιστούν τα τέλεια τετράγωνα που παρουσιάζονται στην παρακάτω εξίσωση:

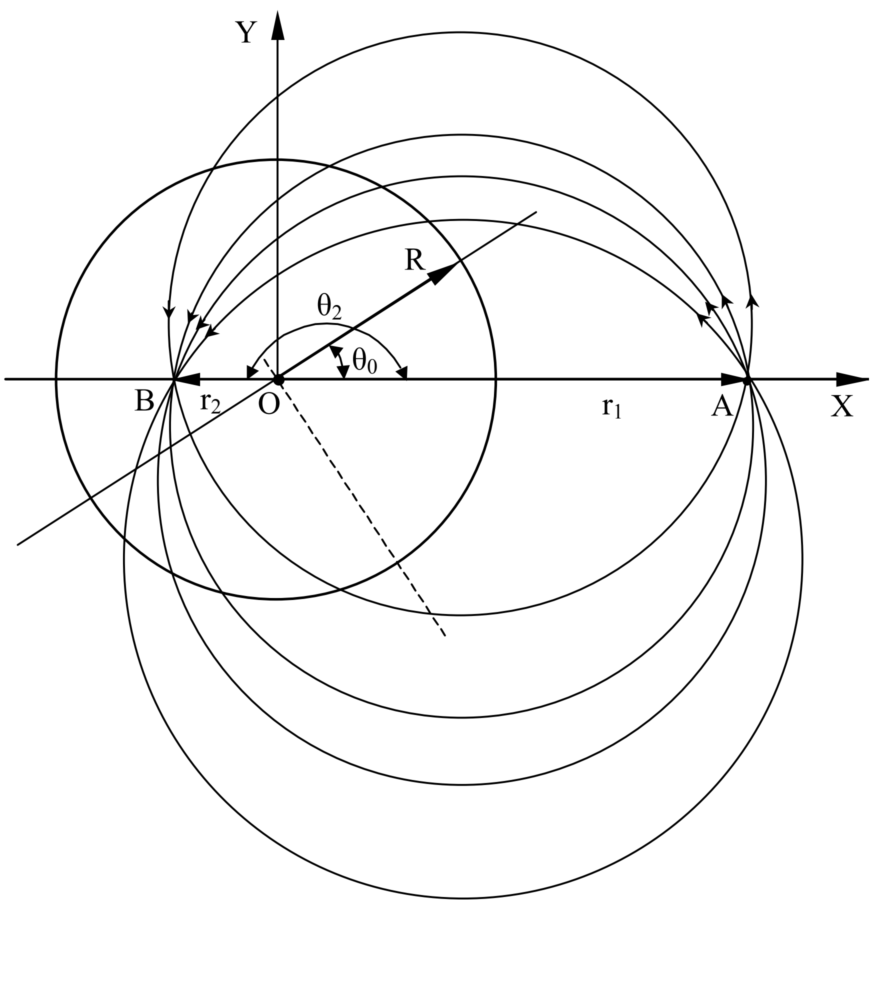
$$\left(x + \frac{R}{2a}\sqrt{R^2-4a^2}\sin\theta_0\right)^2 + \left(y - \frac{R}{2a}\sqrt{R^2-4a^2}\cos\theta_0\right)^2 - R^2 - \left(\frac{R}{2a}\sqrt{R^2-4a^2}\right)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(x+\frac{R}{2a}\sqrt{R^2-4a^2}\sin\theta_0\right)^2+\left(y-\frac{R}{2a}\sqrt{R^2-4a^2}\cos\theta_0\right)^2=\frac{R^4}{4a^2} \qquad (4.91)$$

Η (4.91) αναπαριστά ένα σύνολο κυκλικών τροχιών. Τα χαρακτηριστικά των κύκλων αυτών, δηλαδή το κέντρο και η ακτίνα τους εξαρτώνται πλήρως από την τιμή της παραμέτρου a και της ακτίνας R του σφαιρικού φακού. Το κέντρο τους έχει συντεταγμένες

$$\left(-\frac{R}{2a}\sqrt{R^2-4a^2}\sin\theta_0,\frac{R}{2a}\sqrt{R^2-4a^2}\cos\theta_0\right) \qquad (4.92)$$

ενώ η ακτίνα τους είναι ίση με $R^2/2a$.



Σχήμα 4.13. Εστίαση με φακό Fisheye και κυκλικές τροχιές των ακτίνων

Το σχήμα 4.13 αναπαριστά τις τροχιές που διαγράφουν οι ακτίνες που εκκινούν από ένα σημείο $A(r_1,0)$ και παρουσιάζεται το κυκλικό τους σχήμα. Από το σχήμα φαίνεται επίσης ότι όλες οι ακτίνες διέρχονται από το σημείο $B(r_2,\theta_2)$. Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία A και B έχουν σχέση εικόνας-ειδώλου.

Η εύρεση των σημείων τομής των κυκλικών τροχιών με τον άξονα x γίνεται θέτοντας $y=0$ στην εξίσωση (4.91) οπότε:

$$\left(x+\frac{R}{2a}\sqrt{R^2-4a^2}\sin\theta_0\right)^2+\left(0-\frac{R}{2a}\sqrt{R^2-4a^2}\cos\theta_0\right)^2=\frac{R^4}{4a^2}\Rightarrow$$

$$x^2+\frac{Rx}{a}\sqrt{R^2-4a^2}\sin\theta_0+\frac{R^2}{4a^2}\left(R^2-4a^2\right)\sin^2\theta_0+\frac{R^2}{4a^2}\left(R^2-4a^2\right)\cos^2\theta_0-\frac{R^4}{4a^2}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{Rx}{a}\sqrt{R^2-4a^2}\sin\theta_0+\frac{R^2}{4a^2}\left(R^2-4a^2\right)\left(\cos^2\theta_0+\sin^2\theta_0\right)-\frac{R^4}{4a^2}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{Rx}{a}\sqrt{R^2-4a^2}\sin\theta_0-R^2=0 \tag{4.93}$$

Η (4.93) είναι μια γραμμική εξίσωση δευτέρου βαθμού με δυο πραγματικές λύσεις x_1 και x_2. Οι λύσεις της εκπροσωπούν τα σημεία τομής των κυκλικών τροχιών με τον άξονα των x. Η x_1 παριστάνει την απόσταση της πηγής από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων, ενώ η x_2 είναι η απόσταση του ειδώλου. Ο προσδιορισμός των αποστάσεων αυτών γίνεται με επίλυση της εν λόγω δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Η διακρίνουσά της δίνεται από τη σχέση

$$\Delta=\frac{R^2}{a^2}\left(R^2-4a^2\right)\sin^2\theta_0+4R^2 \tag{4.94}$$

και οι λύσεις της είναι:

$$x_{1,2}=\frac{-\left(R/a\right)\sqrt{R^2-4a^2}\sin\theta_0\pm\sqrt{R^2/a^2\left(R^2-4a^2\right)\sin^2\theta_0+4R^2}}{2} \tag{4.95}$$

Με βάση την (4.95), υπολογίζεται το γινόμενο των δυο λύσεων, όποτε αποδεικνύεται ότι

$$x_1 x_2 = \frac{-\left(R/a\right)\sqrt{R^2-4a^2}\sin\theta_0-\sqrt{\Delta}}{2}\,\frac{-\left(R/a\right)\sqrt{R^2-4a^2}\sin\theta_0+\sqrt{\Delta}}{2}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{R^2}{a^2}\left(R^2-4a^2\right)\sin^2\theta_0-\frac{R}{a}\sqrt{R^2-4a^2}\sin\theta_0\sqrt{\Delta}+\frac{R}{a}\sqrt{R^2-4a^2}\sin\theta_0\sqrt{\Delta}-\Delta\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{R^4}{a^2}\sin^2\theta_0-4R^2\sin^2\theta_0-\frac{R^2}{a^2}\left(R^2-4a^2\right)\sin^2\theta_0-4R^2\right)=-\frac{4R^2}{4}\Rightarrow x_1x_2=-R^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2=-\frac{R^2}{x_1} \tag{4.96}$$

Η (4.96) φανερώνει μια σημαντική ιδιότητα του φακού Fisheye. Κάθε πηγή ακτινοβολίας που βρίσκεται στο σημείο Α και σε απόσταση $r_1=|x_1|$, έχει ένα είδωλο, που βρίσκεται στο εσωτερικό του φακού και εντοπίζεται στο σημείο Β σε απόσταση $r_2=|x_2|=R^2/r_1$ από το κέντρο του. Το αρνητικό πρόσημο στην (4.96) δηλώνει ότι η θέση του ειδώλου βρίσκεται στην αντίθετη πλευρά σε σχέση με την πηγή ακτινοβολίας (ως προς το κέντρο της σφαίρας). Αυτό φαίνεται στο σχήμα 4.13 όπου η πηγή βρίσκεται αριστερά του κέντρου του φακού ενώ η εστίαση γίνεται δεξιά του κέντρου.

4.8. Ιδιότητες του φακού Fisheye και εφαρμογές

Λαμβάνοντας υπόψη της ιδιότητες εστίασης ενός αντικειμένου από ένα φακό Fisheye, γίνεται αμέσως αντιληπτό, ότι το συγκεκριμένο οπτικό σύστημα βρίσκει εφαρμογή σε συσκευές φωτογράφησης καθώς και σε κάμερες.

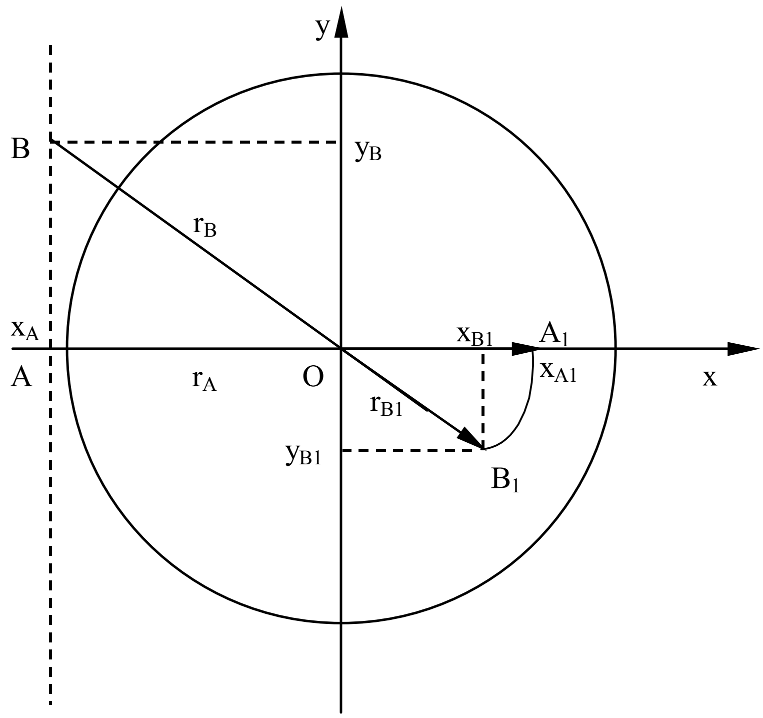
Η χρήση του Fisheye σε φωτογραφικές μηχανές, επιτρέπει ευρυγώνια (wide angle) φωτογράφηση με γωνία η οποία καθορίζεται από τον κατασκευαστή και κυμαίνεται από 120 έως 180 μοίρες. Αυτό σημαίνει ότι μια σχετικά ευρεία περιοχή, μπορεί να αποτυπωθεί πάνω στο φιλμ κάτι το οποίο θα ήταν αδύνατο με χρήση κοινών φακών.

Η αποτύπωση όμως μιας ευρείας περιοχής πάνω στο φωτογραφικό φιλμ έχει σαν αποτέλεσμα την παραμόρφωση της εικόνας και ειδικά στα άκρα της. Ο τρόπος που παραμορφώνει την εικόνα ο φακός Fisheye γίνεται αντιληπτός με την εξέταση της φωτογραφίας που παρατίθεται στο σχήμα 4.14 από όπου φαίνεται ότι η παραμόρφωση γίνεται εντονότερη στα άκρα, ενώ τα αντικείμενα που βρίσκονται στο εσωτερικό αποτυπώνονται καλύτερα.

Σχήμα 4.14. Φωτογραφία τραβηγμένη από μηχανή εξοπλισμένη με φακό Fisheye

Η διαπίστωση ότι ο φακός Fisheye παραμορφώνει την εικόνα στα άκρα, ήταν αναμενόμενη, διότι με τον τρόπο αυτό λειτουργεί ουσιαστικά κάθε οπτικό μέσο. Το ανθρώπινο μάτι, για παράδειγμα, έχει την ιδιότητα να παραμορφώνει τα αντικείμενα που βρίσκονται στα άκρα του οπτικού πεδίου, με τρόπο που τα παραμορφώνει και ο φακός Fisheye. Άρα η αλλοίωση αυτή είναι απόλυτα φυσιολογική, στην περίπτωση που είναι επιθυμητή η φωτογράφηση ευρείας περιοχής από σχετικά κοντινή απόσταση. Κατά τα αλλά, τα αντικείμενα που εντοπίζονται κοντά στο κέντρο της εικόνας αναπαρίστανται τέλεια.

Τα παραπάνω γίνονται καλύτερα κατανοητά με τη βοήθεια του σχήματος 4.15. Τα σημεία A_1 και B_1 είναι τα είδωλα των πηγών A και B, τα οποία εντοπίζονται πάνω στην ευθεία που διέρχεται από την κάθε πηγή και το σημείο O, σε αποστάσεις r_A και r_B αντίστοιχα από αυτό. Έστω ότι r_{A1} και r_{B1} είναι η θέση των ειδώλων που σχετίζονται με τη θέση των πηγών με τρόπο που υποδεικνύει η (4.96).



Σχήμα 4.15. Εστίαση δυο σημείων από φακό Fisheye

Σύμφωνα με τη θεωρία που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, θα ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$r_A r_{A1} = R^2 \Rightarrow r_{A1} = \frac{R^2}{r_A} \tag{4.97}$$

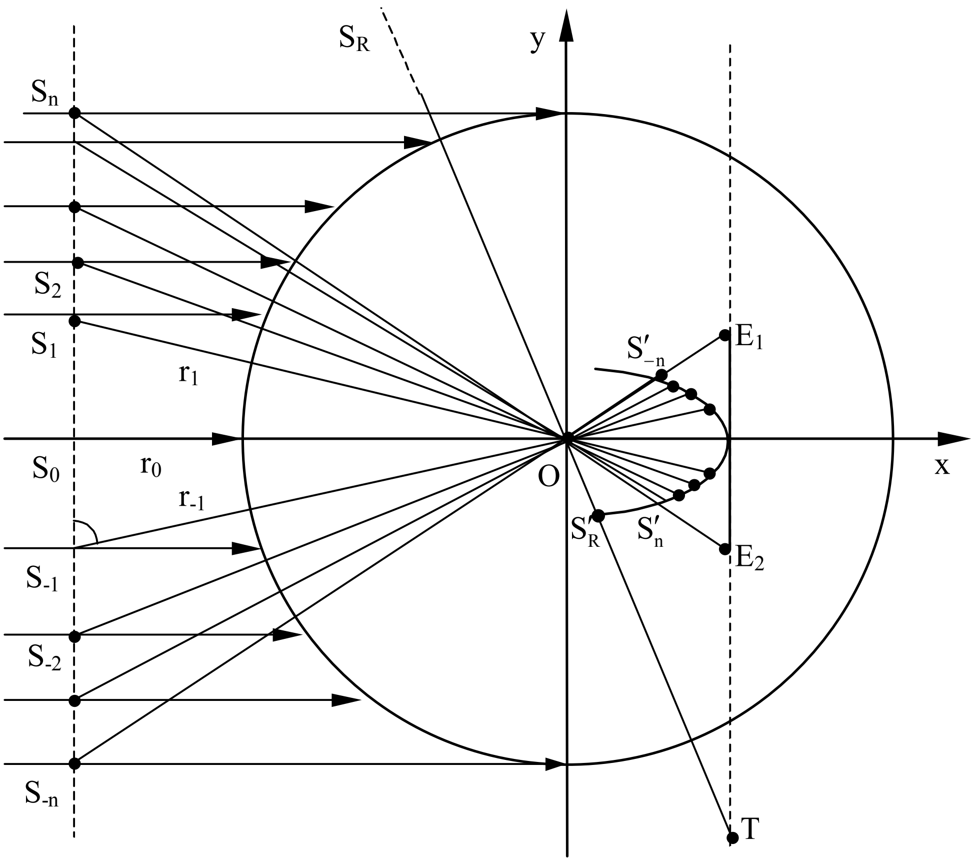
$$r_B r_{B1} = R^2 \Rightarrow r_{B1} = \frac{R^2}{r_B} \tag{4.98}$$

αλλά από το σχήμα 4.15 προκύπτει εύκολα ότι $r_A < r_B$ οπότε:

$$r_A < r_B \Rightarrow \frac{R^2}{r_{A1}} < \frac{R^2}{r_{B1}} \Rightarrow r_{B1} < r_{A1} \tag{4.99}$$

Άρα η ευθεία ΑΒ αποτυπώνεται στο εσωτερικό του φακού, με είδωλο το τόξο $\overset{\frown}{A_1B_1}$.

Γενικεύοντας τον παραπάνω συλλογισμό, μπορεί να θεωρηθεί ένα πλήθος συνευθειακών σημειακών πηγών $S_{-n}, S_{-n+1}, ..., S_{-1}, S_0, S_1, ..., S_{n-1}, S_n$ που ακτινοβολούν προς ένα φακό Fisheye με τον τρόπο που φαίνεται στο σχήμα 4.16.



Σχήμα 4.16. Παραμόρφωση ευθείας από φακό Fisheye και inversion

Λαμβάνοντας υπόψη τα προηγούμενα, εξηγείται το γεγονός ότι η ευθεία $S_{-n}S_n$ αποτυπώνεται στο εσωτερικό του φακού πάνω στο τόξο $\overset{\frown}{S'_{-n}S'_n}$ και άρα παραμορφώνεται. Στους κοινούς φωτογραφικούς φακούς, όπου δεν υπάρχει παραμόρφωση των αντικειμένων, η συγκεκριμένη ευθεία αναπαριστάται επίσης από μια ευθεία, την E_1E_2. Το πλεονέκτημα του Fisheye σε σχέση με τους κοινούς φακούς, γίνεται κατανοητό, αν θεωρηθεί ένα σημείο S_R. Από το σχήμα 4.16 γίνεται αμέσως φανερό, ότι η ευθεία OS_R τέμνει την προέκταση της E_1E_2 εκτός του φακού, στο σημείο T, οπότε το συγκεκριμένο σημείο είναι αδύνατο να συλληφθεί και να παρασταθεί πάνω στο φιλμ. Αντίθετα, αν χρησιμοποιηθεί φακός Fisheye το σημείο S_R έχει είδωλο στο εσωτερικό του φακού, πάνω στην προέκταση του τόξου $\overset{\frown}{S'_{-n}S'_n}$ και άρα αποτυπώνεται. Βέβαια, για σταθερά x, όσο μεγαλύτερη συντεταγμένη y έχει μια ακτινοβολούσα πηγή, τόσο μεγαλύτερη παραμόρφωση υφίσταται κατά το σχηματισμό του ειδώλου της.

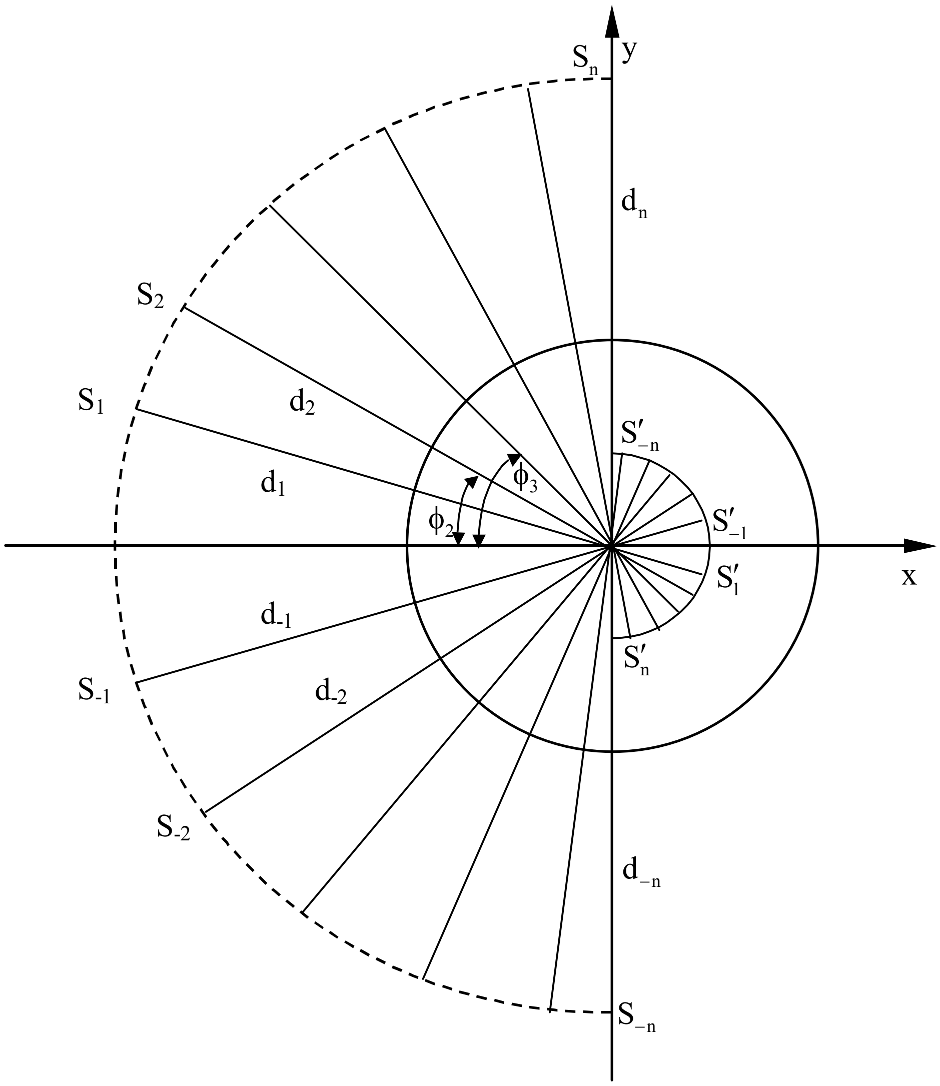
Τα σημεία $S_1, S_2, ..., S_n$ βρίσκονται πάνω στο ημιεπίπεδο των θετικών y. Τα είδωλα των σημείων αυτών $S'_1, S'_2, ..., S'_n$ αντίθετα, βρίσκονται στο ημιεπίπεδο των αρνητικών y. Άρα η εστίαση με φακό Fisheye οδηγεί σε *αντίστροφη (inversion)* του αντικειμένου.

Παρακάτω θα εξεταστεί η ειδική περίπτωση, κατά την οποία μια ημικυκλική επιφάνεια αναπαρίσταται στο επίπεδο με την βοήθεια του φακού Fisheye.

Θεωρείται ένα ημικύκλιο πάνω στο οποίο υπάρχουν οι σημειακές πηγές ακτινοβολίας $S_{-n}, S_{-n+1}, ..., S_{-1}, S_0, S_1, ..., S_{n-1}, S_n$ των οποίων οι αποστάσεις από το κέντρο του φακού είναι $d_{-n}, d_{-n+1}, ..., d_{-1}, d_0, d_1, ..., d_{n-1}, d_n$ αντίστοιχα (σχ.4.17). Η γωνία φ, είναι η γωνία υπό την οποία ο φακός ‘βλέπει’ το κάθε σημείο.

Επειδή οι πηγές βρίσκονται πάνω σε ημικυκλική περιφέρεια, γίνεται αμέσως αντιληπτό ότι

$$d_{-n} = d_{-n+1} = ... = d_{-1} = d_0 = d_1 = ... = d_{n-1} = d_n \qquad (4.100)$$



Σχημα 4.17. Αναπαρασταση ημικυκλικης επιφανειας με το φακο Fisheye

Τα είδωλα των πηγών θα βρίσκονται ως γνωστόν πάνω στην ευθεία που διέρχεται από το κέντρο του φακού και την συγκεκριμένη πηγή και σε αποστάσεις $d'_{-n},...,d'_{-1},d'_0,...,d'_1,...,d'_n$. Με βάση τις σχέσεις (4.96) και (4.100) προκύπτει για τις θέσεις των ειδώλων:

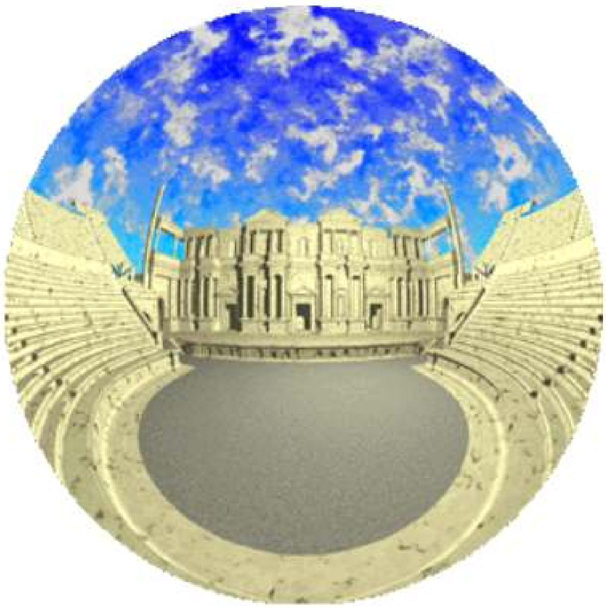
$$d_{-n} = d_{-n+1} = ... = d_{-1} = d_0 = d_1 = ... = d_{n-1} = d_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{R^2}{d'_{-n}} = \frac{R^2}{d'_{-n+1}} = ... = \frac{R^2}{d'_{-1}} = \frac{R^2}{d'_0} = \frac{R^2}{d'_1} = ... = \frac{R^2}{d'_{n-1}} = \frac{R^2}{d'_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d'_{-n} = d'_{-n+1} = \ldots = d'_{-1} = d'_0 = d'_1 = \ldots = d'_{n-1} = d'_n \qquad (4.101)$$

Άρα λοιπόν τα είδωλα βρίσκονται επίσης πάνω σε ένα ημικύκλιο, αφού οι αποστάσεις τους από το κέντρο του φακού είναι ίσες. Αυτή είναι η αρχή λειτουργίας του ημισφαιρικού φακού Fisheye που χρησιμοποιείται σήμερα στον τομέα των τρισδιάστατων γραφικών εφαρμογών με υπολογιστή.

Η συγκεκριμένη τεχνική (texture f/theta mapping) επιτρέπει την αποτύπωση στέρεων πάνω σε επιφάνειες, δίνοντας την ψευδαίσθηση του τρισδιάστατου χώρου. Η τεχνική αυτή εφαρμόζεται σε προγράμματα ray tracing.

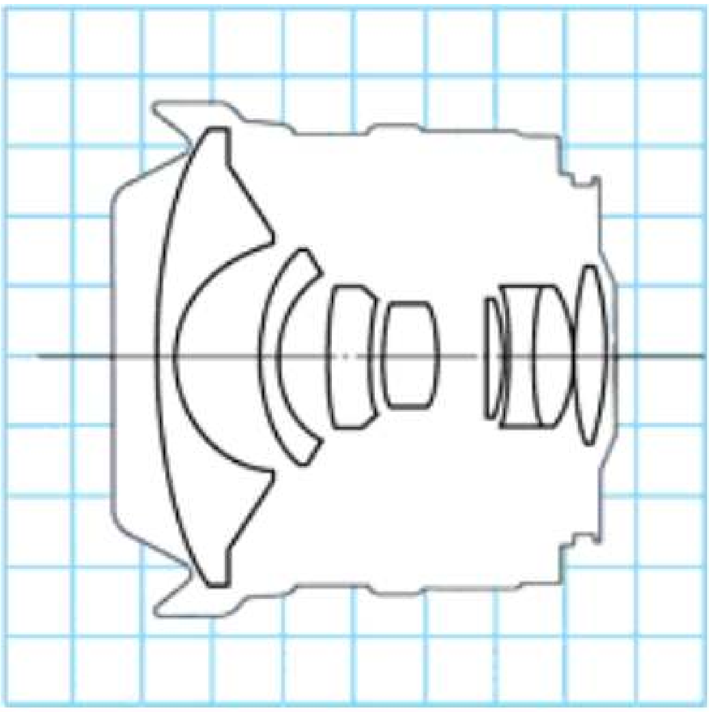


Σχήμα 4.18 Software εφαρμογή του ημισφαιρικού φακού Fisheye: Η εικόνα δημιουργήθηκε με το πρόγραμμα POV Ray Tracer με χρήση του Fisheye Lens Effect

Ο ημισφαιρικός φακός Fisheye (ή διαφορετικά φακός f/theta) έχει μέγιστη γωνία προβολής 180^o (η γωνία φ στο σχήμα 4.17 παίρνει τιμές από -90^o για το κατώτατο σημείο S_{-n}, έως $+90^o$ για το ανώτατο S_n). Αυτό σημαίνει ότι κάθε ακτινοβολούσα πηγή που βρίσκεται στο ημιεπίπεδο των αρνητικών x (για όλα τα y και όλα τα z), είναι δυνατό να αναπαρασταθεί. Βέβαια, και στην περίπτωση αυτή υπάρχει το φαινόμενο της παραμόρφωσης ιδιαίτερα για τις γωνίες κοντά στις ± 90.

4.9 Κατασκευή φακών Fisheye

Στην πράξη, η κατασκευή των συστημάτων φωτογράφησης που περιλαμβάνουν φακούς Fisheye είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη. Για την ακρίβεια, υπάρχουν πολλοί φακοί ο καθένας από τους οποίους έχει σταθερό δείκτη διάθλασης, αλλά διαφορετικό από τους γειτονικούς του, με τρόπο που να προσεγγίζεται ο δείκτης διάθλασης που δίνεται από την εξίσωση (4.81). Επίσης, τα στρωματά δεν είναι ομόκεντρα. Στην πραγματικότητα δεν είναι καν σφαιρικά.

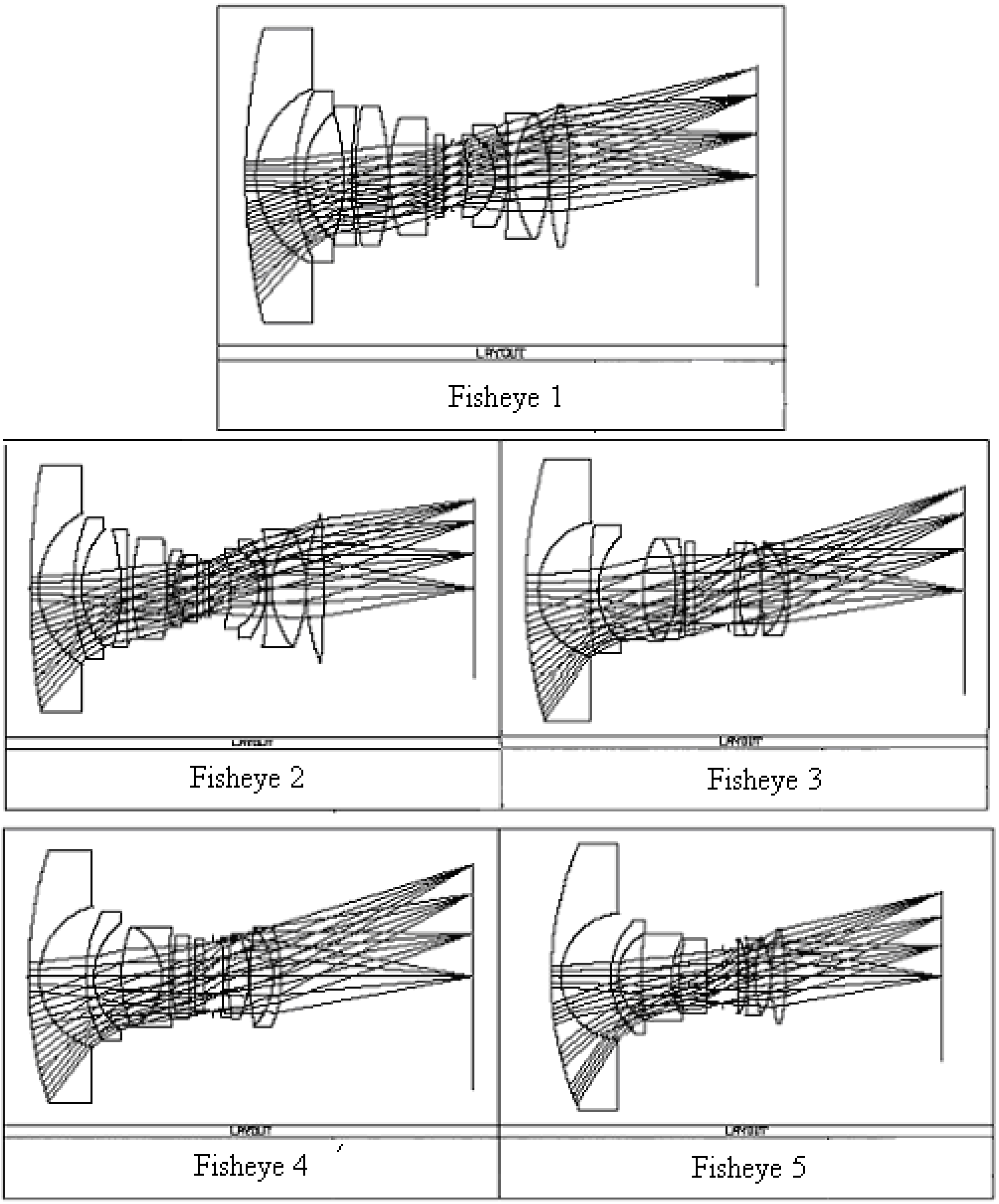


Σχήμα 4.19. Μπλοκ διάγραμμα ενός σύγχρονου φακού Fisheye

Το μπλοκ διάγραμμα ενός φακού Fisheye που χρησιμοποιείται στα σύγχρονα συστήματα φωτογράφησης, παρουσιάζεται στο σχήμα 4.19, από όπου φαίνεται ο τρόπος διάταξης των στρωμάτων, αλλά και το σχήμα τους.

Ο κύριος στόχος που τίθεται κατά την κατασκευή φακών Fisheye, είναι ο περιορισμός της παραμόρφωσης που υφίστανται τα απομακρυσμένα από το κέντρο της λήψης σημεία. Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζονται διάφοροι τρόποι διάταξης των στρωμάτων.

Το σχήμα 4.20 φανερώνει τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιείται ο φακός Fisheye σε μια μοντέρνα φωτογραφική μηχανή.



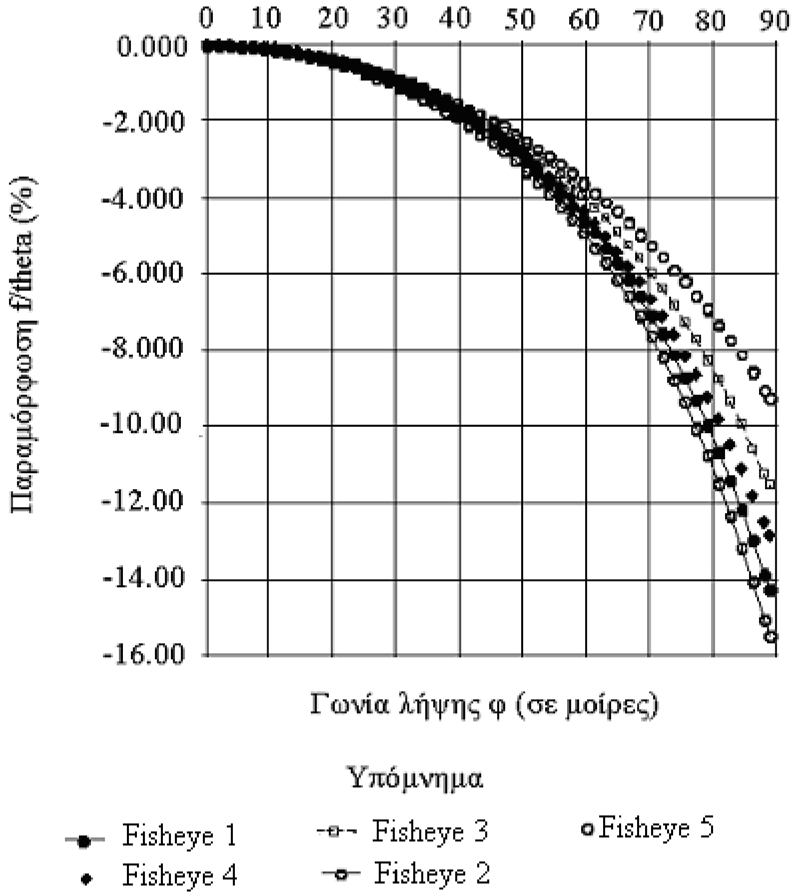
Σχήμα 4.20. Κατασκευαστικές μέθοδοι φακών Fisheye

Γίνεται αντιληπτό η στρωματοποίηση δεν είναι ομόκεντρη, αλλά και το γεγονός ότι τα στρώματα δεν είναι σφαιρικά.

Στο ίδιο σχήμα αναπαρίσταται ο τρόπος με τον οποίο οι ακτίνες φωτός διαθλώνται διαδοχικά από τα διάφορα τμήματα (στρώματα) του φακού Fisheye και η διαδρομή που αυτές ακολουθούν μέχρι να αποτυπωθούν πάνω στο διάφραγμα.

Στο σχήμα 4.21 παρουσιάζεται η επί τοις εκατό παραμόρφωση που υφίσταται μια επιφάνεια σε σχέση με την γωνία που σχηματίζει το κάθε σημείο της με κέντρο του φακού. Καθεμία από τις καμπύλες εκπροσωπεί ένα από τους φωτογραφικούς φακούς του σχήματος 4.20. Από το σχήμα αυτό φαίνεται ότι τα σημεία τα οποία παραμορφώνονται περισσότερο, είναι αυτά τα οποία ο φακός 'βλέπει' υπό γωνία 90 μοιρών.

Επίσης γίνεται αντιληπτό, ότι με κατάλληλη τοποθέτηση των στρωμάτων αλλά και με σωστή επιλογή του αριθμού τους είναι δυνατό να περιοριστεί το φαινόμενο της παραμόρφωσης.



Σχήμα 4.21 . Παραμόρφωση (%) του φακού Fisheye f/theta συναρτήσει της γωνίας φ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

5.1 Σύγκλιση Διατομών Σκέδασης

Όπως έχει γίνει ήδη αντιληπτό από την αναλυτική θεμελίωση και την μαθηματική δόμηση του φαινομένου της σκέδασης από σφαιρικό φακό, οι σχέσεις που προσδιορίζουν τις διατομές σκέδασης, αλλά και το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο σε κάθε περιοχή, αποτελούνται από διπλά αθροίσματα. Το εξωτερικό άθροισμα με όρια ολοκλήρωσης από 0 έως το άπειρο, αφορά στην τιμή της παραμέτρου n, ενώ το εσωτερικό άθροισμα αφορά στην παράμετρο m. Και οι δυο αυτές παράμετροι, εισάγονται από την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης Legendre (2.12), που οδηγεί ως γνωστό στις προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre.

Θα μπορούσε λοιπόν να υποθέσει κανείς, ότι οι τιμές των διατομών σκέδασης αλλά και του πεδίου, δεν μπορούν να υπολογιστούν μιας και τα αθροίσματα αποτελούνται από άπειρους όρους. Όμως, η παραπάνω πρόταση δεν ισχύει, εξαιτίας του γεγονότος ότι το διπλό αυτό άθροισμα συγκλίνει από κάποια τιμή της n και μετά, με αποτέλεσμα να μην μεταβάλλεται σημαντικά στην συνέχεια. Η τιμή αυτή ονομάζεται αριθμός αποκοπής του διπλού αθροίσματος.

Σύγκλιση θεωρείται ότι επιτυγχάνεται όταν τα τέσσερα πρώτα σημαντικά ψηφία του υπό εξέταση μεγέθους, παραμένουν σταθερά για δυο διαδοχικές τιμές της σταθεράς n.

Για τον υπολογισμό του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου εφαρμόζεται η τεχνική της ανάπτυξης των πεδιακών μεγεθών σε γραμμικούς συνδυασμούς διανυσματικών σφαιρικών κυματοσυναρτήσεων σύμφωνα με τη θεωρία που παρουσιάστηκε στα κεφαλαία 2 και 3. Η εφαρμογή των οριακών συνθηκών γίνεται με την έμμεση μέθοδο IMM που επιβάλλει το δεύτερο διανυσματικό θεώρημα Green.

Για τον υπολογισμό των κυματικών συντελεστών του αναπτύγματος της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης, σε κάθε περιοχή της υπό εξέταση γεωμετρίας, αναπτύχθηκε κώδικας υπολογιστή στη γλώσσα Microsoft Fortran PowerStation 4.0 κάτω από περιβάλλον Windows. Ο κώδικας περιλαμβάνει υπορουτίνες υπολογισμού της μονοστατικής διατομής radar, της συνολικής διατομής σκέδασης, της διατομής εξάλειψης, της διστατικής διατομής, ενώ εκτελεί αυτόματο ενεργειακό έλεγχο σύμφωνα με το οπτικό θεώρημα. Επιπλέον, πραγματοποιεί χαρτογράφηση της ισχύος της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης. Οι κυματικοί συντελεστές χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, ώστε να δημιουργηθούν οι δισδιάστατοι χάρτες, που παρουσιάζονται παρακάτω. Θεωρητικά, ο σφαιρικός φακός μπορεί να έχει αυθαίρετο πλήθος ομόκεντρων στρωματώσεων ωστόσο από ένα σημείο και μετά, τα αποτελέσματα συγκλίνουν. Για το λόγο αυτό και επειδή δεν υπάρχει τεχνική δυνατότητα κατασκευής φακών με περισσότερα από 10 στρώματα, αποφεύγεται η μελέτη φακών με περισσότερα στρώματα.

Στην παρουσίαση που ακολουθεί, προσδιορίζεται ο οριακός αυτός αριθμός των στρωμάτων. Η συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας, καθώς και η ακτίνα του φακού, μεταβάλλονται με σκοπό την μελέτη των ιδιοτήτων του για υψηλές και χαμηλές τιμές της παραμέτρου $k_0\alpha$, τόσο στην περίπτωση του φακού Fisheye όσο και του φακού Luneburg. Επιπλέον, παρατίθενται συγκριτικοί πίνακες και διαγράμματα για την κατανόηση της λειτουργίας τους.

Ένας από τους βασικότερους παράγοντες που επηρεάζουν τα τελικά αποτελέσματα είναι το είδος του ηλεκτρομαγνητικού κύματος που προσπίπτει στο φακό, καθώς και τα επιμέρους χαρακτηριστικά του, όπως η πόλωση, η συχνότητα και οι γωνίες πρόσπτωσης θ_{inc} και φ_{inc}. Οι περιπτώσεις που εξετάζονται είναι αυτές της πρόσπτωσης επιπέδου, ομοιόμορφου και γραμμικά πολωμένου ηλεκτρομαγνητικού κύματος.

5.2 Παρουσίαση των αποτελεσμάτων

Έστω επίπεδο, ομοιόμορφο και γραμμικά πολωμένο κύμα με συχνότητα 3GHz που προσπίπτει υπό γωνία $\theta_{inc} = 90$, $\varphi_{inc} = 0$ σε διηλεκτρική σφαίρα της οποίας ο δείκτης διάθλασης δεν είναι σταθερός, αλλά μεταβάλλεται συναρτήσει της απόστασης από το κέντρο σύμφωνα με τις σχέσεις

$$n(r) = \frac{1}{1 + (r/R)^2} \tag{5.1}$$

$$n(r) = \sqrt{2 - (r/R)^2} \tag{5.2}$$

όπου R η ακτίνα της σφαίρας που λαμβάνεται ίση με 10 cm. Οι παραπάνω σχέσεις εκφράζουν τη μεταβολή του δείκτη διάθλασης σε φακό Fisheye (σχέση (5.1)) και σε φακό Luneburg (σχέση (5.2)). Η πόλωση του κύματος μπορεί να είναι οριζόντια ή κατακόρυφη. Η ηλεκτρική πεδιακή ένταση είναι κανονικοποιημένη, δηλαδή έχει τιμή $E_0 = 1\,V/m$ στο κέντρο του συστήματος συντεταγμένων. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο συγκλίνει η μονοστατική διατομή radar στην περίπτωση που οι φακοί Fisheye και Luneburg αποτελούνται από 5 και 10 στρώματα

N	Μονοστατική Διατομή Radar φακού Fisheye	
	Στρώματα 5	Στρώματα 10
7	3.697350098164351E-001	3.793703247179400E-001
8	4.305879253377621E-001	4.424548072491136E-001
9	4.182505560594804E-001	4.295930602594415E-001
10	4.199984083600133E-001	4.314219833124242E-001
11	**4.198058839449518E-001**	**4.312198602087234E-001**
12	4.198228353642149E-001	4.312377034002750E-001
13	4.198216077664122E-001	4.312364084690308E-001
14	4.198216823691847E-001	4.312364873004596E-001
15	4.198216785034866E-001	4.312364832098354E-001

N	Μονοστατική Διατομή Radar φακού Luneburg	
	Στρώματα 5	Στρώματα 10
7	5.437693677099115E-002	3.720493140758330E-002
8	5.402832748934271E-002	3.822556657876358E-002
9	**5.406816541837908E-002**	3.802068515995253E-002
10	5.406294695528990E-002	**3.804760086198770E-002**
11	5.406347012010213E-002	3.804474310354446E-002
12	5.406342675707686E-002	3.804498876654803E-002
13	5.406342975711688E-002	3.804497125243212E-002
14	5.406342958104862E-002	3.804497230528000E-002
15	5.406342958992797E-002	3.804497225115200E-002

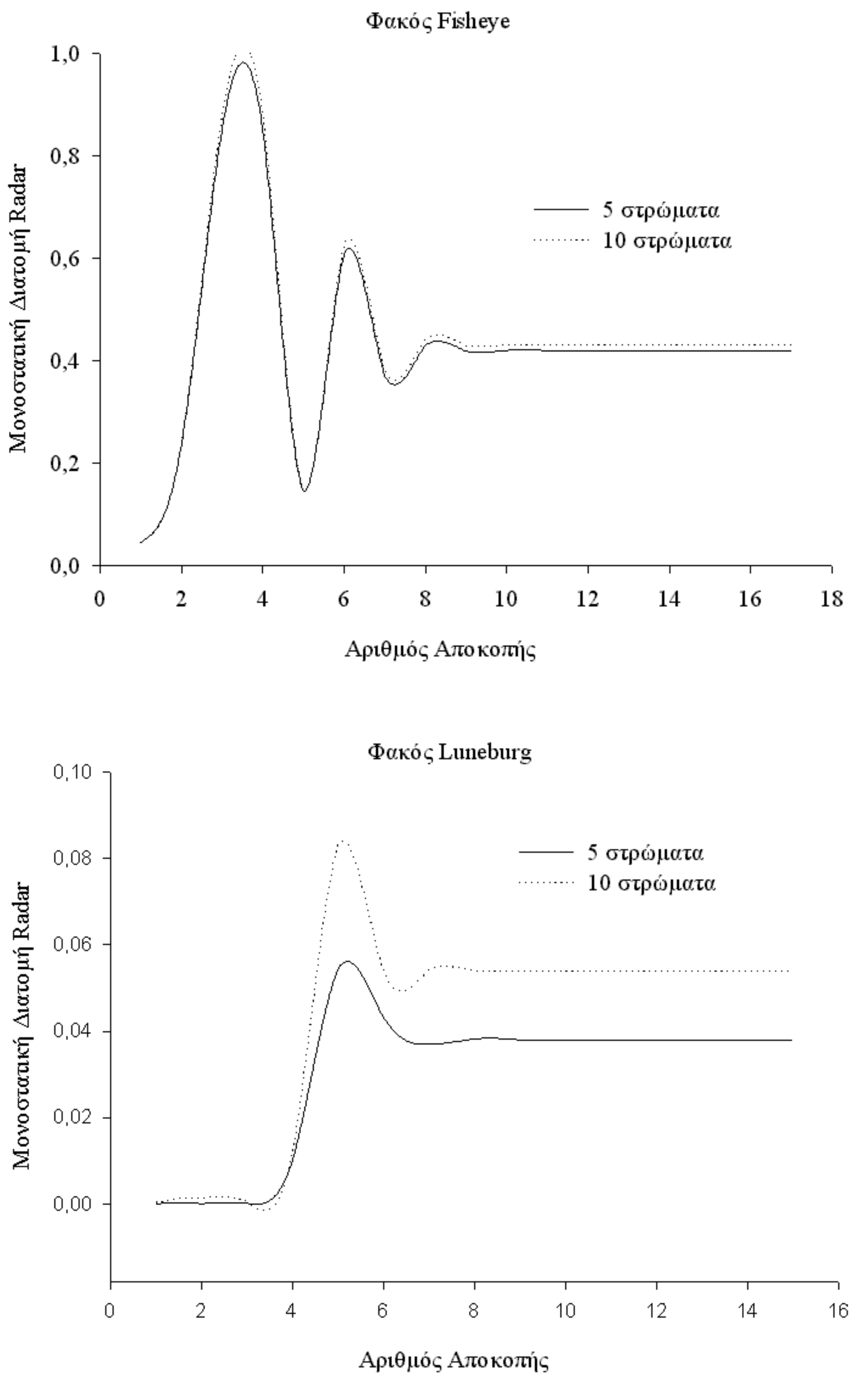
Πίνακας 5.1.

Σύγκλιση της κανονικοποιημένης μονοστατικής διατομής radar για φακούς Fisheye και Luneburg ακτίνας 10 cm με 5 και 10 στρώματα, όταν f=3GHz.

Σημειώνεται εδώ ότι όλες οι τιμές των διατομών σκέδασης που παρουσιάζονται παρακάτω είναι κανονικοποιημένες ως προς το εμβαδά του επιπέδου που διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας δηλαδή ως προς $\pi\alpha^2$.

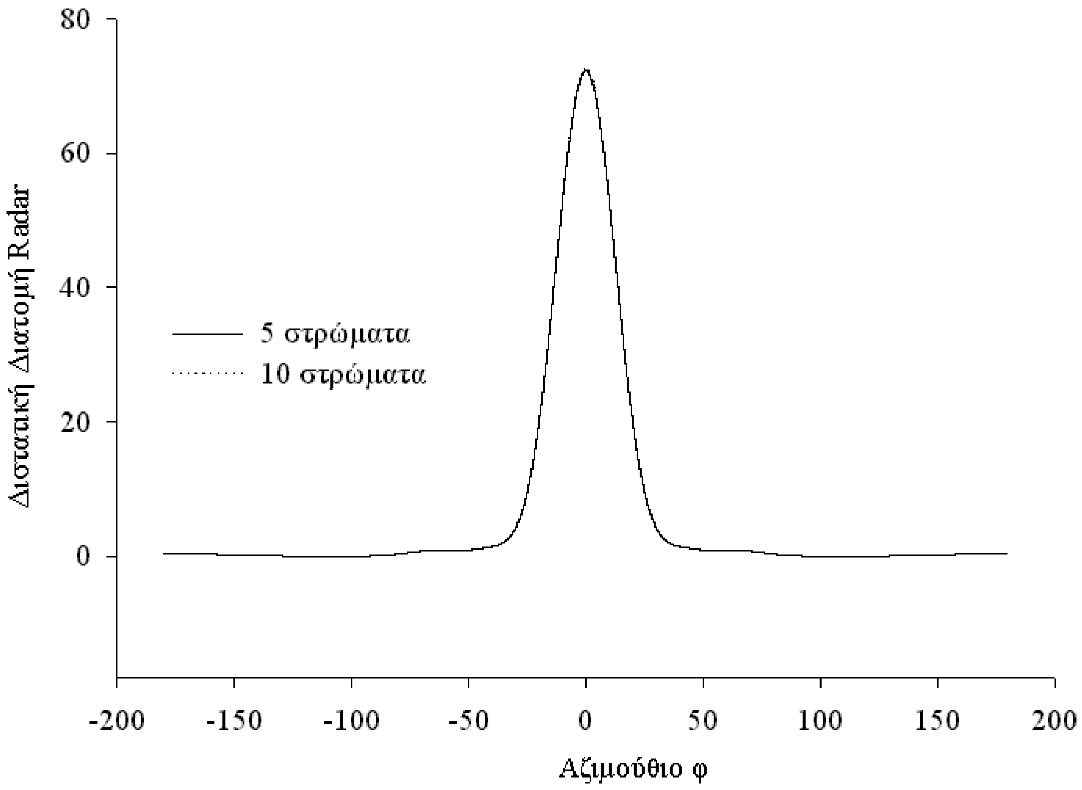
Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του πίνακα 5.1 εξάγονται δυο συμπεράσματα. Πρώτον ότι η μονοστατική διατομή Radar για το φακό Fisheye σταθεροποιείται για 11 όρους σύγκλισης, ενώ για φακό Luneburg 5 στρωμάτων αυτό συμβαίνει για 9 όρους σύγκλισης και για φακό Luneburg 10 στρωμάτων για 10 όρους. Δεύτερον, παρατηρείται ότι η μονοστατική διατομή μεταβάλλεται στην περίπτωση που οι φακοί είναι κατασκευασμένοι με 5 και 10 στρώματα. Μάλιστα, η μεταβολή αυτή είναι μεγαλύτερη για το φακό Luneburg συγκρινόμενη με αυτή του φακού Fisheye. Επιπλέον, αξίζει να αναφερθεί ότι στα ίδια αποτελέσματα καταλήγει κανείς με αλλαγή της πόλωσης του προσπίπτοντος κύματος, κάτι το οποίο εξηγείται εύκολα, αν υπενθυμιστεί ότι η γεωμετρία είναι συμμετρική ως προς όλους τους άξονες

Τα όσα αναγράφονται περιγραφικά παραπάνω γίνονται και οπτικά κατανοητά με την παράθεση του σχήματος 5.1 από όπου φαίνεται ότι η διατομή οπισθοσκέδασης εξαρτάται από τον αριθμό των στρωμάτων των φακών. Η εξάρτηση αυτή είναι μεγαλύτερη στην περίπτωση του φακού Luneburg. Επίσης, γίνεται αντιληπτό ότι η μονοστατική διατομή συγκλίνει ταχύτερα για το φακό Luneburg.



Σχήμα 5.1. Κανονικοποιημένη μονοστατική διατομή radar $\sigma_{mo}/\pi\alpha^2$ για φακούς Fisheye και Luneburg 5 και 10 στρωμάτων

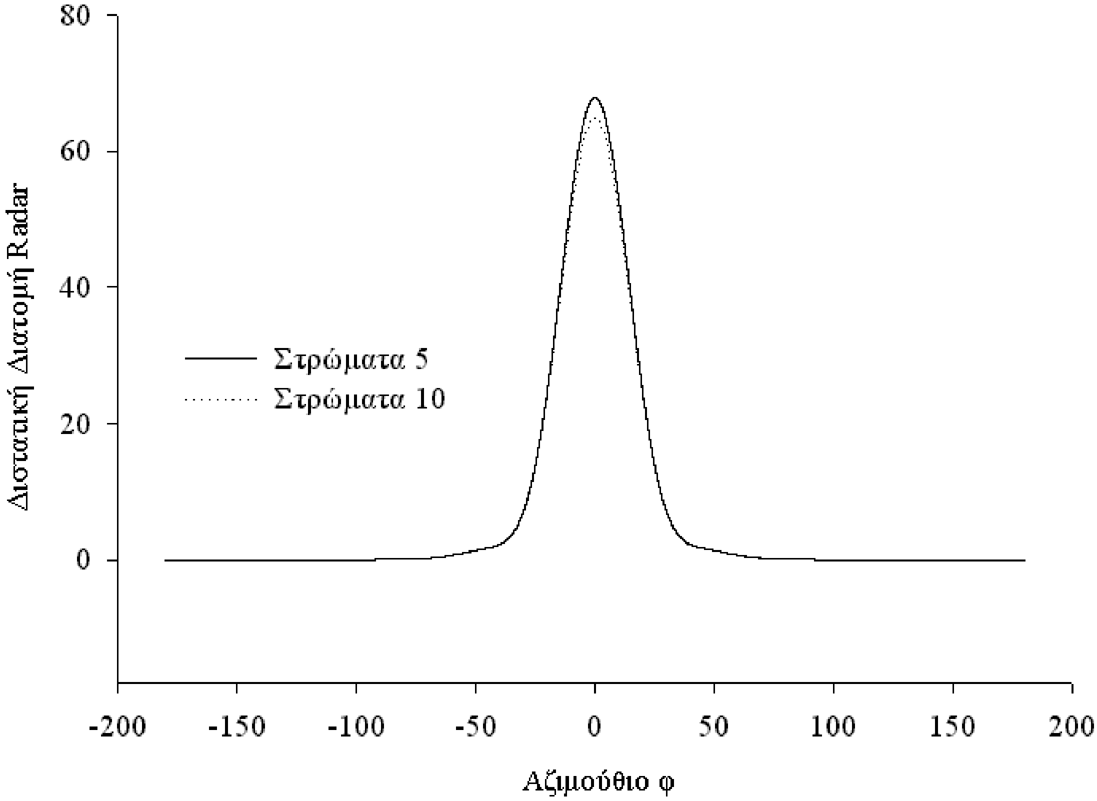
Για τον υπολογισμό της διστατικής διατομής radar των φακών Fisheye και Luneburg 5 και 10 στρωμάτων με ακτίνα 10cm, διατηρούνται σταθερές οι παράμετροι του προσπίπτοντος κύματος, συμπεριλαμβανομένων και των γωνιών πρόσπτωσης. Η συχνότητα του προσπίπτοντος είναι 3GHz. Αρχικά διατηρείται σταθερή η κατακόρυφη απόκλιση στις 90^{o}, και μεταβάλλεται η αζιμουθιακή συνιστώσα από -180^{o} έως 180^{o}. Τα αποτελέσματα δίνονται στα σχήματα 5.2 για το φακό Fisheye και 5.3 για το φακό Luneburg. Οι τιμές που παρουσιάζονται έχουν συγκλίνει (12 όροι για φακό Fisheye και 10 για φακό Luneburg).



Σχήμα 5.2. Κανονικοποιημένη διστατική διατομή radar $\sigma_{bi}/\pi\alpha^2$ φακού Fisheye 5 και 10 στρωμάτων ως προς το αζιμούθιο φ

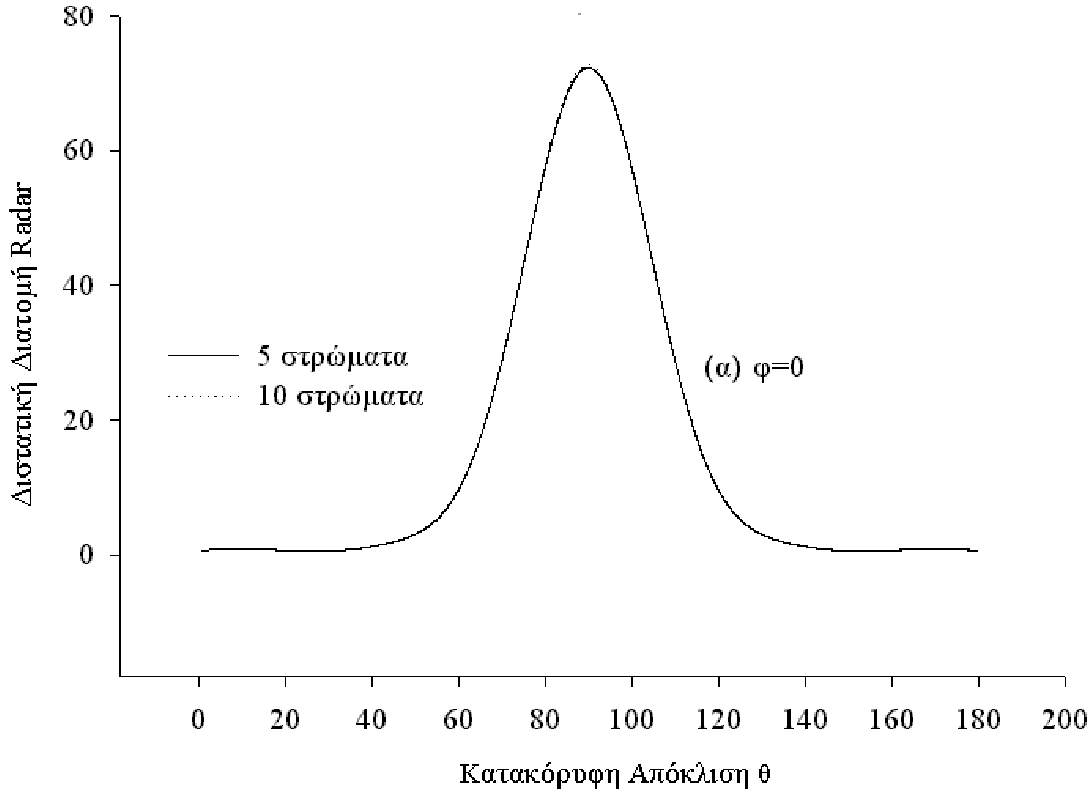
Εξετάζοντας το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι για το φακό Fisheye η μεταβολή των στρωμάτων προκαλεί ανεπαίσθητη μεταβολή στη διαστατική διατομή, κάτι που ισχύει για όλες τις γωνίες σκέδασης φ. Κάτι ανάλογο συμβαίνει και για το φακό

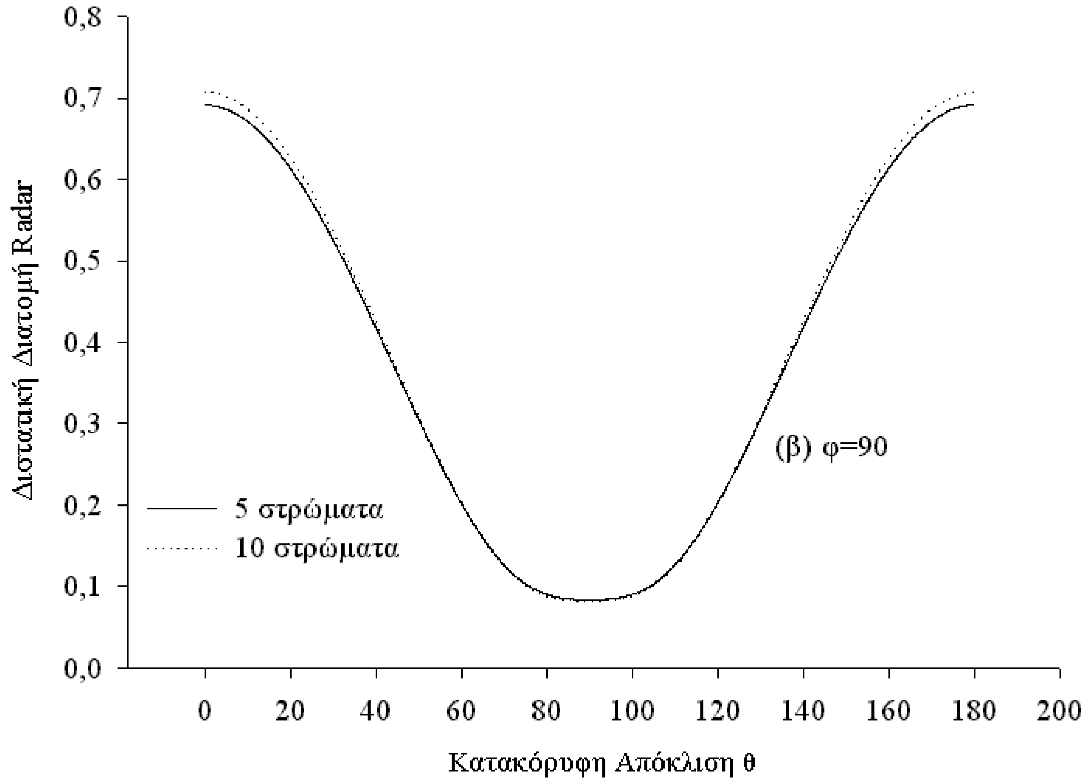
Luneburg, εκτός από μια περιοχή αζιμουθίων που εκτείνεται από τις -10^{o} έως τις 10^{o}



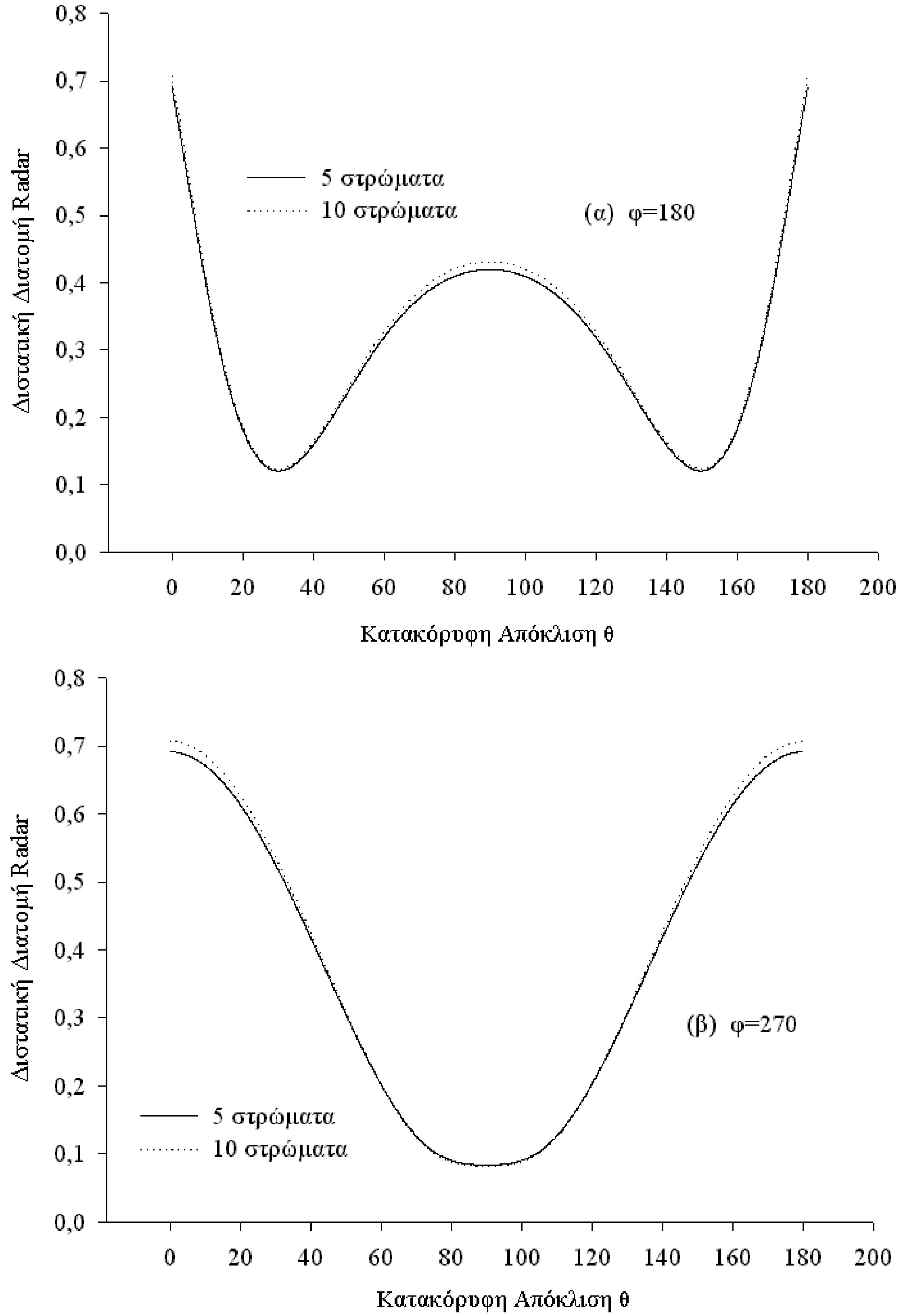
Σχήμα 5.3. Κανονικοποιημένη διστατική διατομή radar $\sigma_{bi}/\pi\alpha^2$ φακού Luneburg 5 και 10 στρωμάτων ως προς το αζιμούθιο φ

Στη συνεχεία, μεταβάλλεται η κατακόρυφη απόκλιση και υπολογίζεται η κανονικοποιημένη διστατική διατομή radar των φακών Fisheye και Luneburg με ακτίνα 10 cm. Εξετάζονται οι περιπτώσεις των 5 και 10 στρωμάτων και παρουσιάζονται συγκριτικές γραφικές παραστάσεις για τα μεσημβρινά ημιεπίπεδα $\phi = 0^{o}, 180^{o}$ (Η-επίπεδο) και $\phi = 90^{o}, 270^{o}$ (Ε-επίπεδο). Τα σχήματα 5.4 και 5.5 αφορούν στο φακό Fisheye, ενώ τα σχήματα 5.6 και 5.7 στο φακό Luneburg.

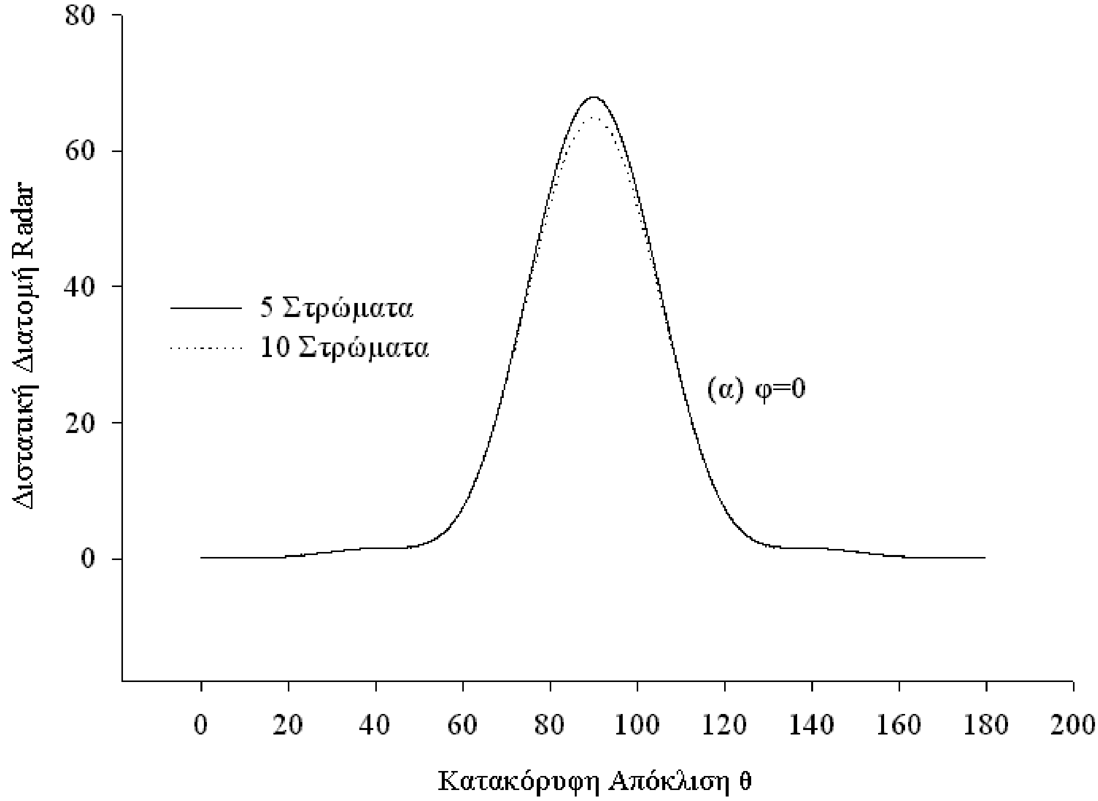


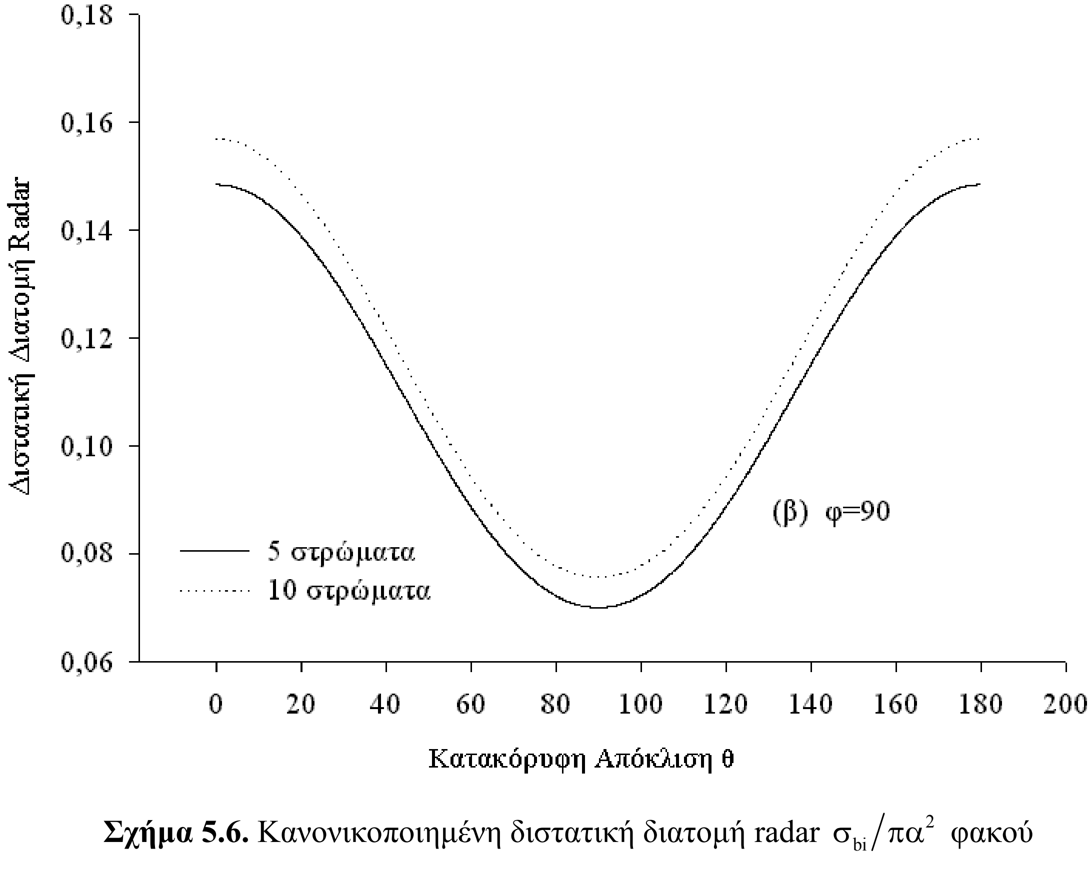


Σχήμα 5.4. Κανονικοποιημένη διστατική διατομή radar $\sigma_{bi}/\pi\alpha^2$ φακού Fisheye 5 και 10 στρωμάτων ως προς την κατακόρυφη απόκλιση θ στα μεσημβρινά ημιεπίπεδα (α) $\phi = 0^o$ και (β) $\phi = 90^o$

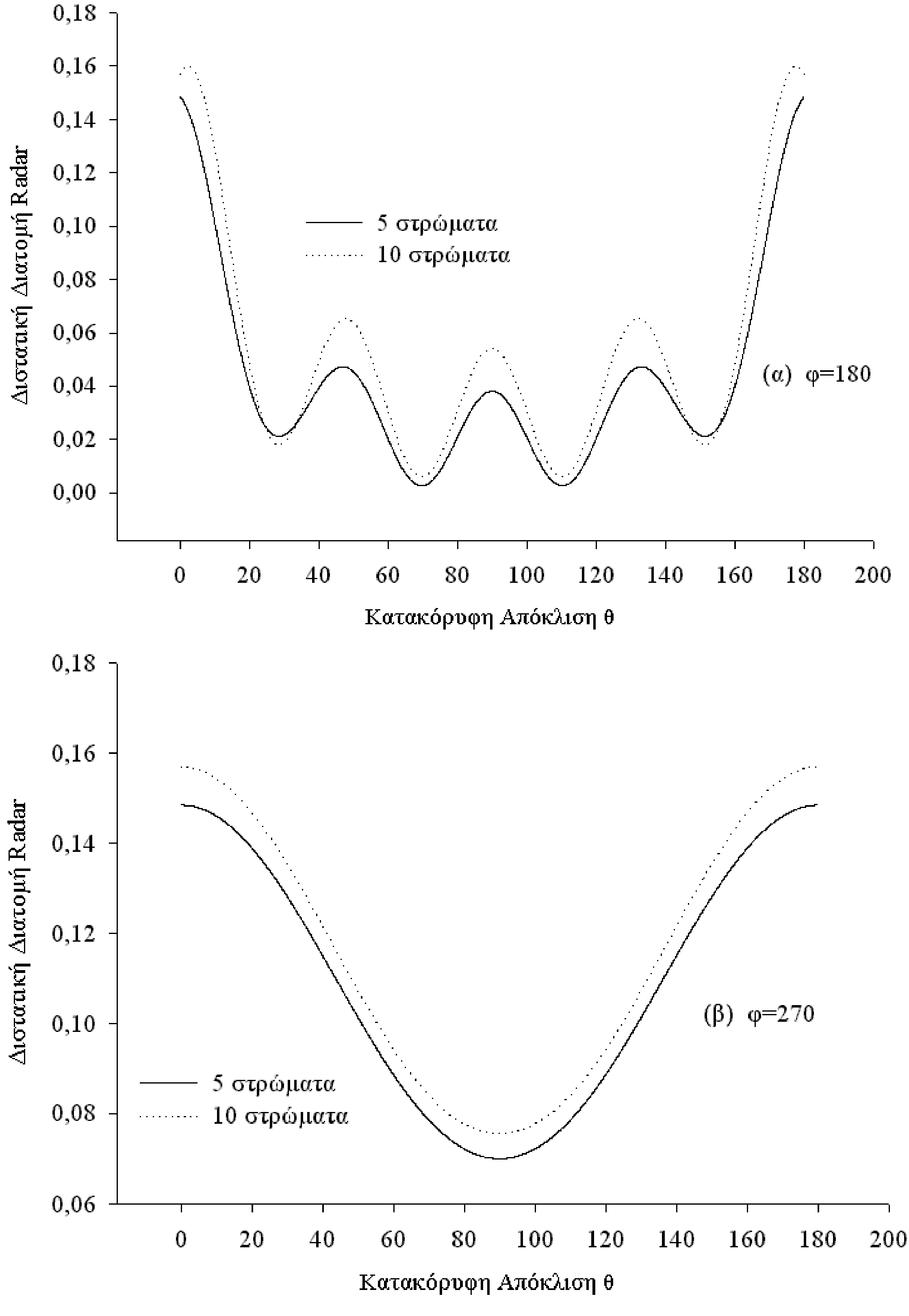


Σχήμα 5.5. Κανονικοποιημένη διστατική διατομή radar $\sigma_{bi}/\pi\alpha^2$ φακού Fisheye 5 και 10 στρωμάτων ως προς την κατακόρυφη απόκλιση θ στα μεσημβρινά ημιεπίπεδα (α) $\phi = 180^o$ και (β) $\phi = 270^o$





Σχήμα 5.6. Κανονικοποιημένη διστατική διατομή radar $\sigma_{bi}/\pi\alpha^2$ φακού Luneburg 5 και 10 στρωμάτων ως προς την κατακόρυφη απόκλιση θ στα μεσημβρινά ημιεπίπεδα (α) $\phi = 0^o$ και (β) $\phi = 90^o$



Σχήμα 5.7. Κανονικοποιημένη διστατική διατομή radar $\sigma_{bi}/\pi\alpha^2$ φακού Luneburg 5 και 10 στρωμάτων ως προς την κατακόρυφη απόκλιση θ στα μεσημβρινά ημιεπίπεδα (α) $\phi = 180^o$ και (β) $\phi = 270^o$

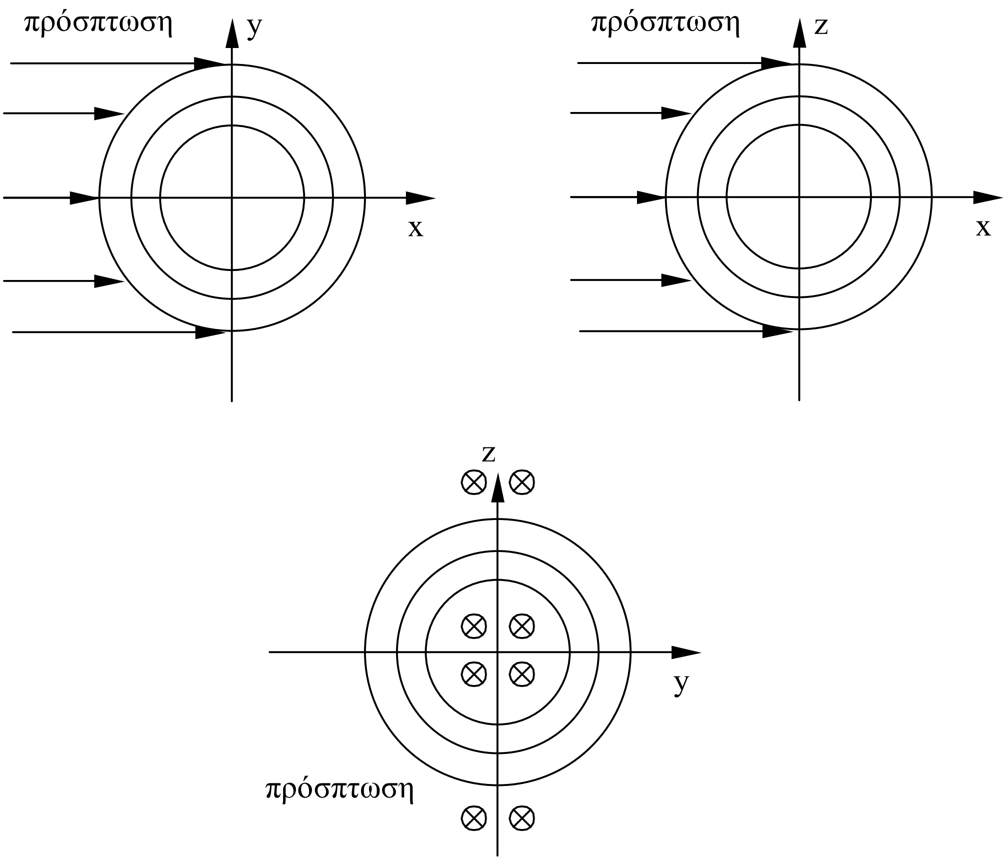
Πριν διατυπωθούν τα συμπεράσματα που εξάγονται από την εξέταση των παραπάνω σχημάτων είναι απαραίτητο να διευκρινισθούν δυο σημεία. Πρώτον, οι τιμές που παρουσιάζονται παραπάνω είναι κανονικοποιημένες ως προς $\pi\alpha^2$ και επιπλέον οι τιμές αυτές έχουν συγκλίνει.

Το πρώτο σημείο που γίνεται αμέσως αντιληπτό είναι ότι η εξάρτηση της διστατικής διατομής radar από τον αριθμό των στρωμάτων είναι μεγαλύτερη στην περίπτωση του φακού Luneburg. Αντίθετα, τα αποτελέσματα σχεδόν ταυτίζονται στην περίπτωση του φακού Fisheye. Παρατηρώντας τα σχήματα 5.2 και 5.3, προκύπτει ότι και για τους δυο φακούς η διατομή σκέδασης μεγιστοποιείται για γωνία σκέδασης $\phi = 0$, δηλαδή κατά τη διεύθυνση εμπροσθοσκέδασης και ελαχιστοποιείται για $\phi = -180^o$ και $\phi = 180^o$ δηλαδή κατά τη διεύθυνση οπισθοσκέδασης.

Σε ότι αφορά τη μεταβολή της διστατικής διατομής radar συναρτήσει της κατακόρυφης απόκλισης, τα διαγράμματα που παρουσιάζουν το μεγαλύτερο ενδιαφέρον είναι αυτά που αναφέρονται στα μεσημβρινά ημιεπίπεδα $\phi = 0^o$ και $\phi = 180^o$.

Για το ημιεπίπεδο $\phi = 0^o$ τόσο στην περίπτωση του φακού Luneburg όσο και στην περίπτωση του φακού Fisheye η διστατική διατομή radar μεγιστοποιείται για κατακόρυφη απόκλιση ίση με 90^o δηλαδή κατά τη διεύθυνση επροσθοσκέδασης, κάτι το οποίο επαληθεύεται και από τα διαγράμματα των σχημάτων 5.2 και 5.3. Στο ημιεπίπεδο $\phi = 180^o$ το κάθε σύστημα συμπεριφέρεται διαφορετικά. Η διστατική διατομή radar του φακού Fisheye ελαχιστοποιείται για δυο τιμές της κατακόρυφης απόκλισης $\theta = 25^o$ και $\theta = 155^o$. Συνεπώς δημιουργούνται τρεις λοβοί. Ο κεντρικός λοβός εκτείνεται κατά μήκος των $\theta = 90^o$ δηλαδή κατά τη διεύθυνση οπισθοσκέδασης. Αντίθετα, ο φακός Luneburg δημιουργεί πέντε λοβούς στους οποίους μεγιστοποιείται η διστατική διατομή, για $\theta = 0^o, 45^o, 90^o, 135^o, 180^o$. Ο μεσαίος λοβός και εδώ εκτείνεται κατά τη διεύθυνση οπισθοσκέδασης.

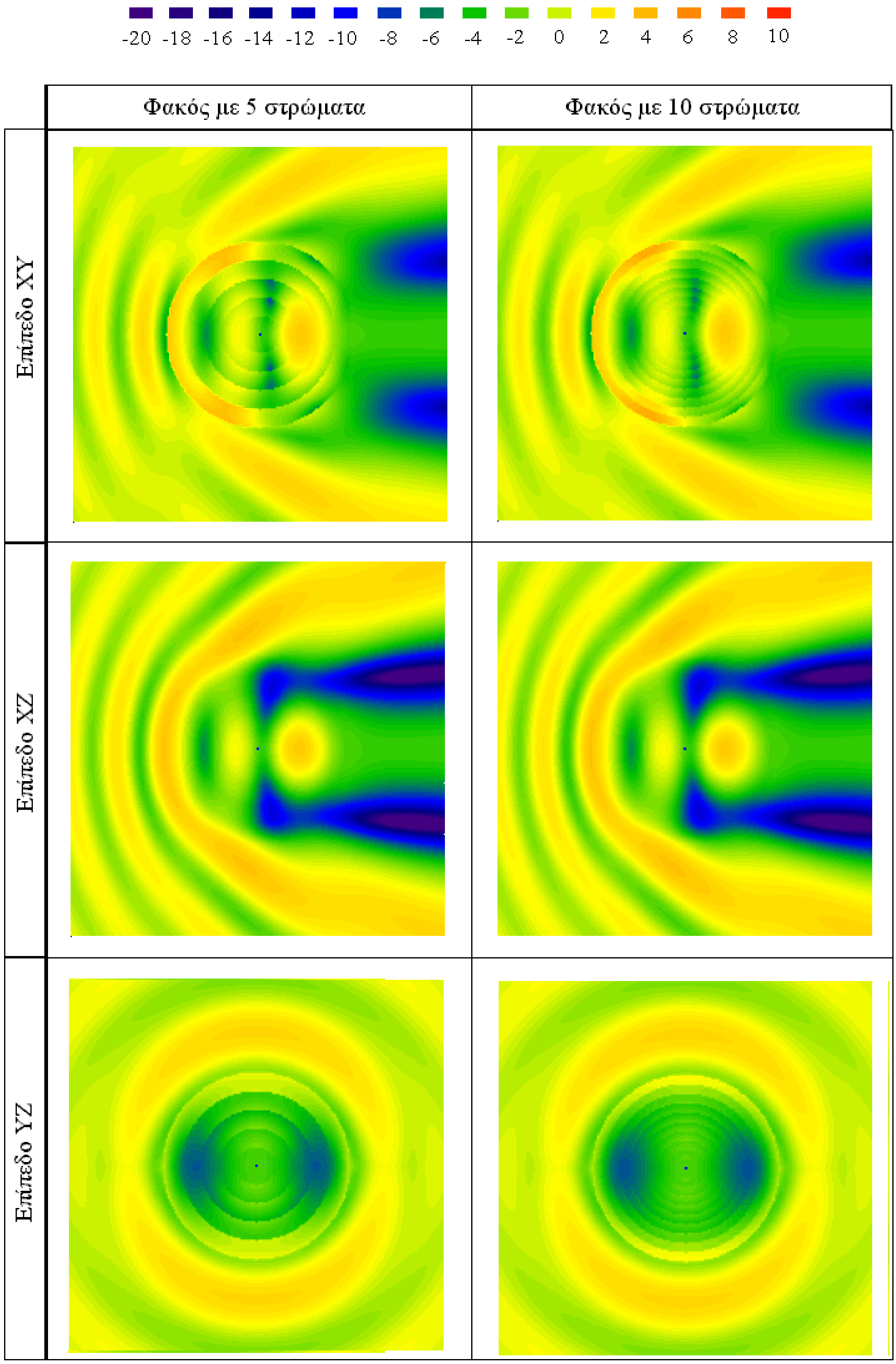
Στα σχήματα 5.9 και 5.10 γίνεται χαρτογράφηση της ισχύος της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης (σε dB) στο εσωτερικό και το εξωτερικό της σφαίρας, όταν η τελευταία έχει 5 και 10 στρώματα. Όλοι οι χάρτες έχουν τετραγωνικό σχήμα με πλευρά ίση με 4 ακτίνες της σφαίρας, στην προκειμένη περίπτωση 40cm. Απεικονίζονται τα τρία κύρια επίπεδα που διέρχονται από το κέντρο των φακών, δηλαδή τα XY, XZ, YZ (σχήμα 5.8).



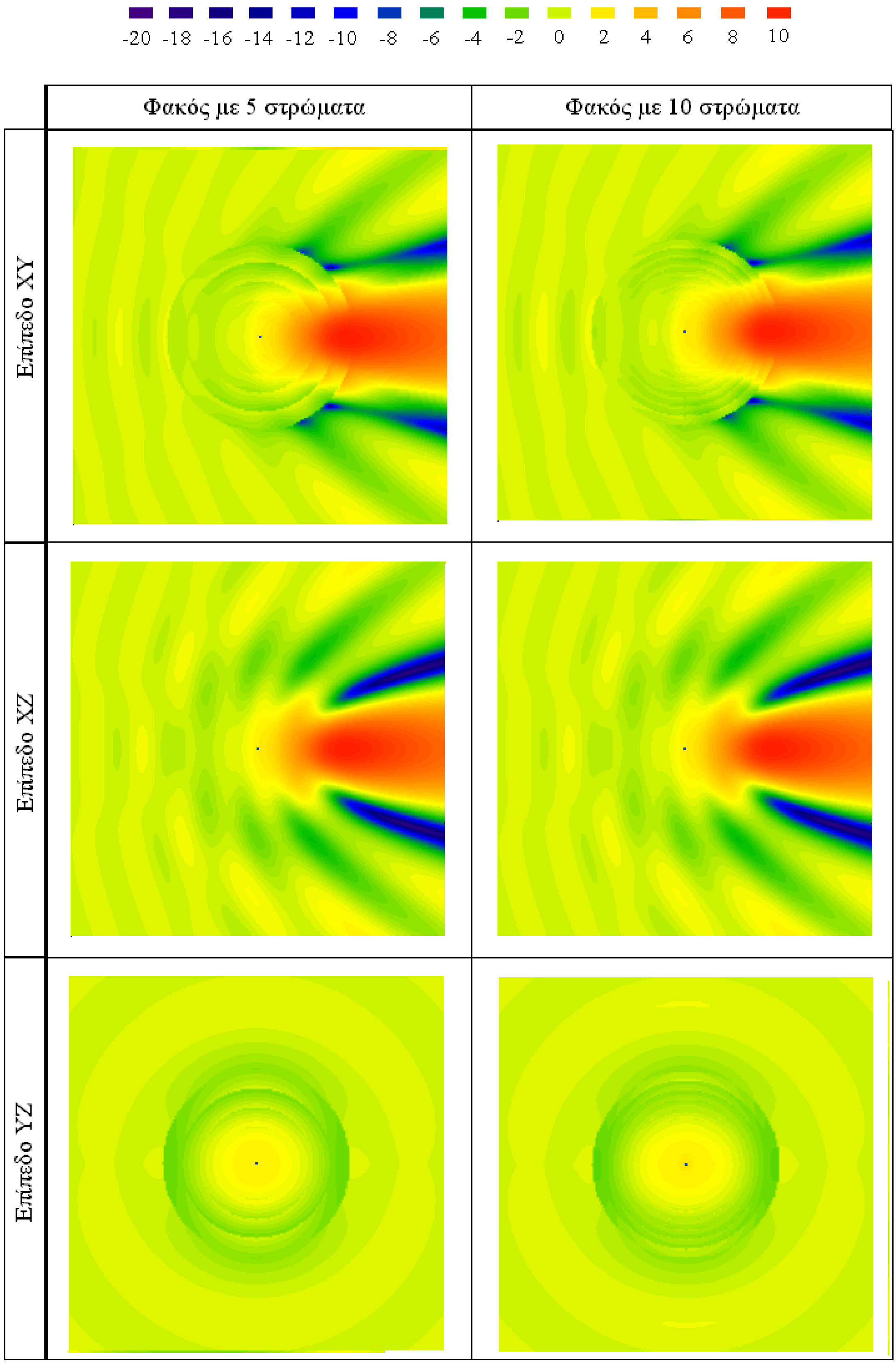
Σχήμα 5.8. Πρόσπτωση επιπέδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος υπό $\theta_{inc} = 90^o$ και $\phi_{inc} = 0^o$ σε ομόκεντρα στρωματοποιημένη διηλεκτρική σφαίρα και προβολή στα επίπεδα XY, ZX, YZ.

Σχολιάζοντας τους χάρτες αυτούς (σχ.5.9) θα πρέπει να σημειωθούν τα εξής: Για την περίπτωση φακού Fisheye, με μια γρήγορη μάτια παρατηρείται αμέσως το είδωλο. Η πρόσπτωση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος γίνεται από αριστερά και η θέση του ειδώλου είναι από την δεξιά πλευρά του κέντρου, μέσα στο φακό, κάτι που συμφωνεί με την θεωρητική θεμελίωση του κεφαλαίου 4.

Η απόσταση του ειδώλου από το κέντρο είναι πολύ μικρή, κάτι το οποίο είναι λογικό, αν αναλογιστεί κανείς ότι το προσπίπτον είναι ένα επίπεδο κύμα που πηγάζει από το άπειρο. Θεωρητικά, η θέση του θα έπρεπε να ταυτίζεται με το κέντρο της σφαίρας. Αυτό θα ίσχυε, αν η προσπίπτουσα ακτινοβολία είχε συχνότητα κοντά ή εντός της οπτικής περιοχής.



Σχήμα 5.9. Χαρτογράφηση της ισχύος της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης επίπεδου κύματος συχνότητας 3GHz που προσπίπτει σε φακό Fisheye



Σχήμα 5.10. Χαρτογράφηση της ισχύος της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης κύματος συχνότητας 3GHz που προσπίπτει σε φακό Luneburg

Γίνεται λοιπόν φανερό, ότι ο φακός Fisheye συμπεριφέρεται διαφορετικά στη μικροκυματική περιοχή, δηλαδή δεν ισχύει η σχέση $r_1 r_2 = R^2$. Το συμπέρασμα αυτό επαληθεύεται και από άλλες εργασίες [*Wane Propagation in Inhomogeneous Dielectric Lenses; Andrew D. Greenwood*]. Επιπλέον, εκτός από το είδωλο, παρατηρείται συγκέντρωση ακτινοβολίας στο εξωτερικό στρώμα του φακού προς την πλευρά που γίνεται η πρόσπτωση. Το φαινόμενο όμως αυτό, εξαλείφεται στις υψηλές συχνότητες ή για μεγάλες τιμές της κανονικοποιημένης ακτίνας $k_0 \alpha$ όπως θα φανεί και παρακάτω. Τέλος, είναι φανερό ότι είναι αδύνατος ο προσδιορισμός του πεδίου στο κέντρο της σφαίρας εξαιτίας του απειρισμού των συναρτήσεων Hankel στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων.

Αντίθετα, οι χάρτες που σχετίζονται με το φακό Luneburg επαληθεύουν τη θεωρητική θεμελίωση που επιβάλλει συγκέντρωση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας σε σημείο πάνω στην επιφάνεια του φακού και αντίθετα προς τη διεύθυνση πρόσπτωσης. Επιπλέον, το κέρδος είναι αρκετά μεγαλύτερο (11 dB σε σχέση με τα 4 dB). Το κύριο χαρακτηριστικό είναι το μέγεθος του σημείου αυτού, που ελαττώνεται όσο αυξάνει η τιμή της $k_0 \alpha$. Το ίδιο ισχύει και για το φακό Fisheye. Και εδώ πάντως είναι αδύνατος ο προσδιορισμός του πεδίου στο κέντρο του συστήματος συντεταγμένων.

Γενικά παρατηρείται ότι η κατασκευή φακών με 5 ή 10 στρωματά δεν τροποποιεί κατά πολύ το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Για το λόγο αυτό, στην πράξη επιλέγεται ένας αριθμός μεταξύ 7 και 11 στρωμάτων για το φακό Fisheye και 5 έως 8 στρωμάτων για το φακό Luneburg. Από τους αριθμούς αυτούς και έπειτα, το κόστος παραγωγής αυξάνεται κατά πολύ, καθιστώντας τη χρήση τέτοιων φακών μη συμφέρουσα.

Εκκρεμεί τώρα η απάντηση στο ζήτημα της εύρεσης του αριθμού των στρωμάτων μετά τον οποίο οι διατομές σκέδασης παραμένουν αμετάβλητες. Κατόπιν συνεχών δοκιμών για διάφορες τιμές του αριθμού των στρωμάτων, προκύπτει ότι μετά τα 92 στρώματα για Fisheye και 95 για Luneburg, δεν μεταβάλλονται τα 4 πρώτα ψηφία των διατομών σκέδασης. Να τονισθεί εδώ, ότι οι συγκεκριμένοι αριθμοί αφορούν στις συγκεκριμένες παραμέτρους του προβλήματος. Για διαφορετικές τιμές του παράγοντα $k_0 \alpha$, ο απαιτούμενος αριθμός των στρωμάτων μεταβάλλεται.

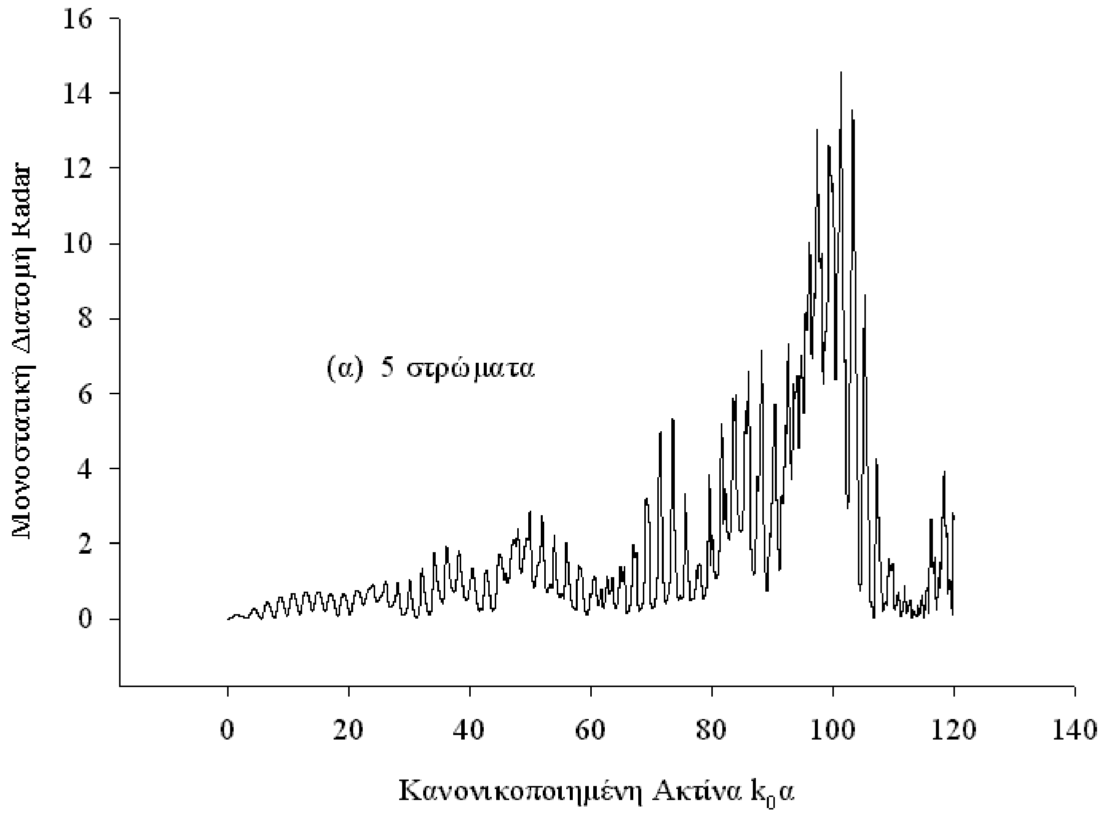
Στον πίνακα 5.2 φαίνεται ο τρόπος με τον οποίο συγκλίνει η μονοστατική διατομή φακών Fisheye και Luneburg.

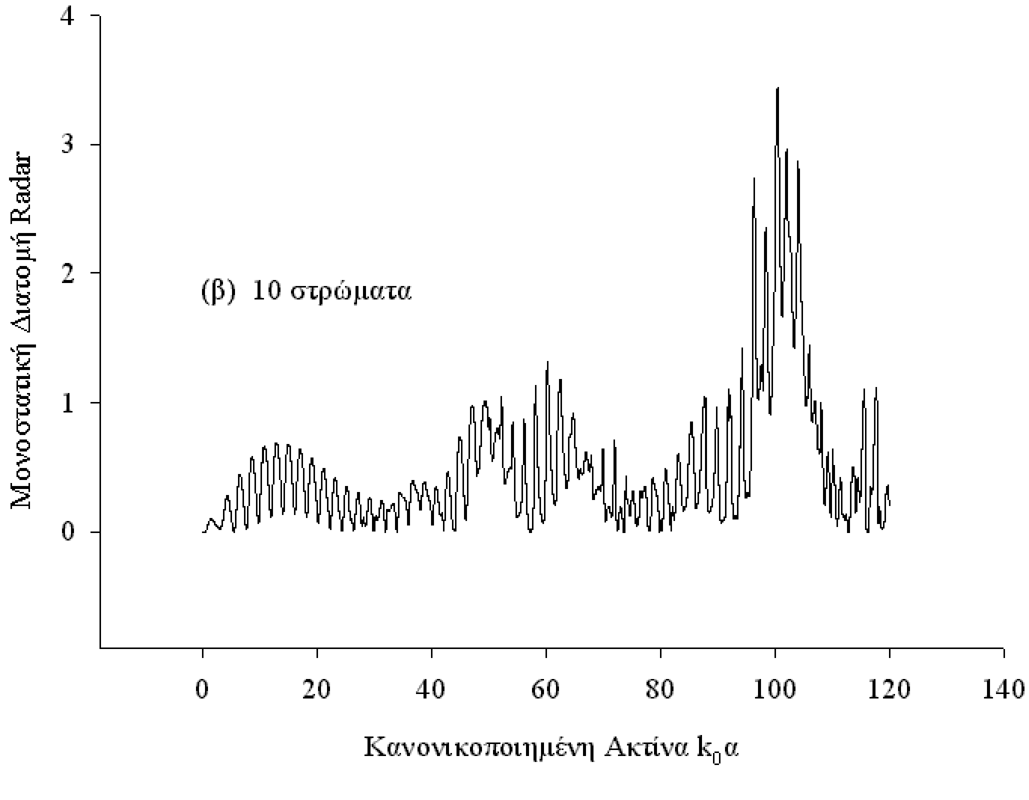
N	Μονοστατική Διατομή Radar	
	Fisheye με 92 στρώματα 5	Luneburg με 95 στρώματα
6	4.464268632872441E-001	5.903680283369667E-002
7	4.333700087933655E-001	6.135123307036709E-002
8	4.352302095055869E-001	6.072661202809179E-002
9	4.350242446676612E-001	6.080999128410237E-002
10	4.350424579554795E-001	6.079987449709164E-002
11	**4.350411340671783E-001**	**6.080084265667908E-002**
12	4.350412147812955E-001	6.080076647828629E-002
13	4.350412105871191E-001	6.080077148620349E-002
14	4.350412107753175E-001	6.080077120671439E-002
15	4.350412107679452E-001	6.080077122013196E-002

Πίνακας 5.2. Σύγκλιση της μονοστατικής διατομής για φακό Fisheye με 92 στρώματα και φακό Luneburg με 95 στρώματα

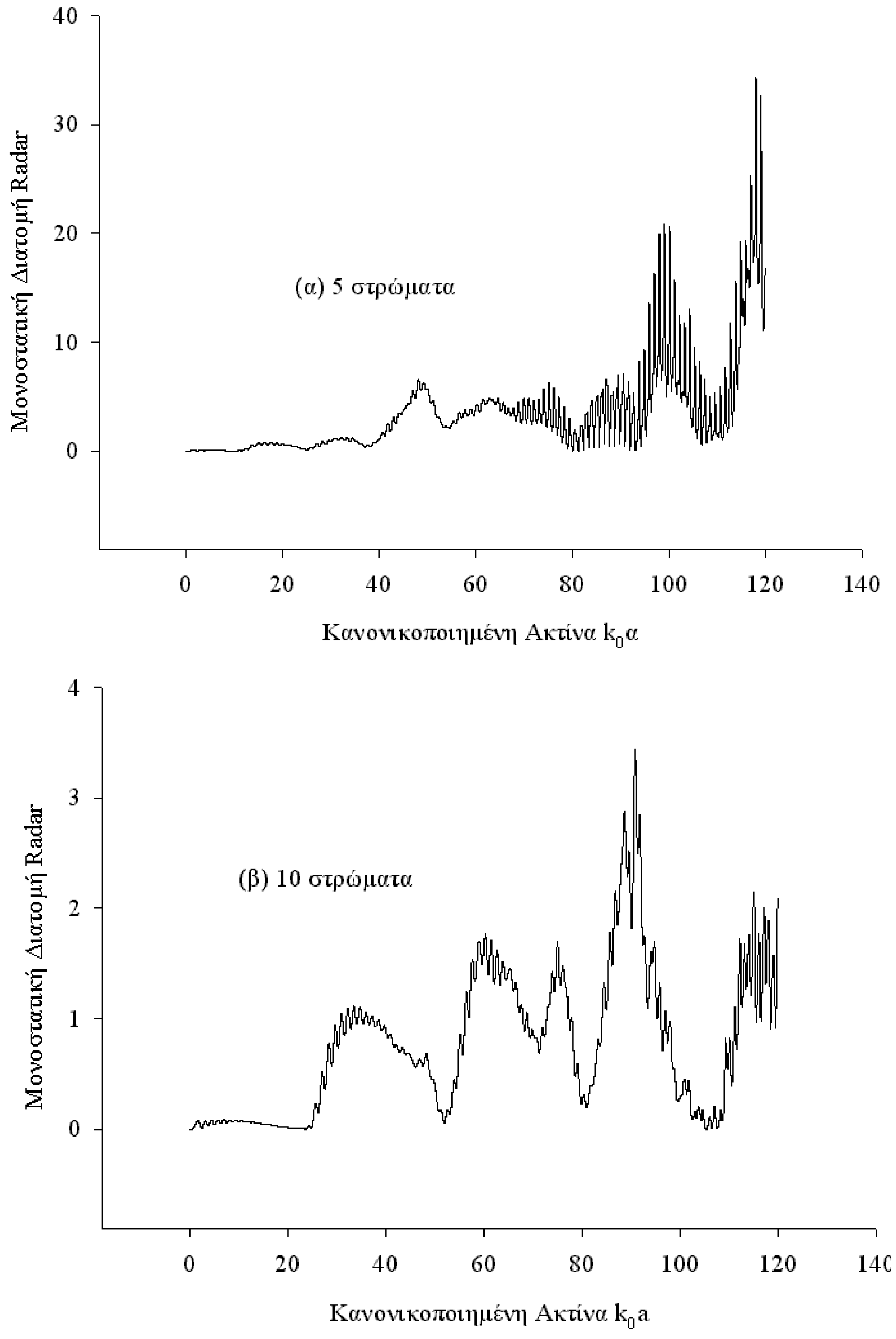
Υπενθυμίζεται ότι μέχρι εδώ, τα χαρακτηριστικά του προσπίπτοντος ήταν σταθερά και τα αποτελέσματα αυτά ισχύουν για ομοιόμορφο επίπεδο κύμα με οριζόντια πόλωση. Παρακάτω παρουσιάζεται η συμπεριφορά του φακού όταν μεταβληθούν αυτά τα χαρακτηριστικά. Αρχικά, θα ερευνηθεί το τι συμβαίνει, αν αυξομειωθεί η συχνότητα του προσπίπτοντος, δηλαδή αν μεταβληθεί η κανονικοποιημένη ακτίνα $k_0\alpha$. Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι και πάλι επίπεδο ομοιόμορφο και οριζόντιας πόλωσης.

Ας υποτεθεί ότι η στρωματοποίηση είναι ομόκεντρη με 5 και 10 στρώματα και ότι ο φακός έχει ακτίνα 10cm. Αρχικά θα μελετηθεί ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλεται η μονοστατικη διατομή radar σε φακούς Fisheye και Luneburg κατασκευασμένους με 5 και 10 στρώματα, αν μεταβληθεί η κανονικοποιημένη ακτίνα $k_0\alpha$. Σημειώνεται και πάλι ότι παρουσιάζονται κανονικοποιημένες τιμές ως προς $\pi\alpha^2$. Οι τιμές αυτές έχουν συγκλίνει. Όσο αυξάνει η τιμή της παραμέτρου $k_0\alpha$ τόσο περισσότεροι όροι απαιτούνται προκείμενου να επιτευχθεί σύγκλιση. Αυτό δεν ισχύει μόνο για τη μονοστατική διατομή, αλλά για όλες τις διατομές σκέδασης καθώς και για τα πεδιακά μεγέθη.





Σχήμα 5.11. Μεταβολή της κανονικοποιημένης μονοστατικής διατομής radar συναρτήσει της κανονικοποιημένης ακτίνας $k_0α$ για φακό Fisheye με (α) 5 στρώματα και (β) 10 στρώματα



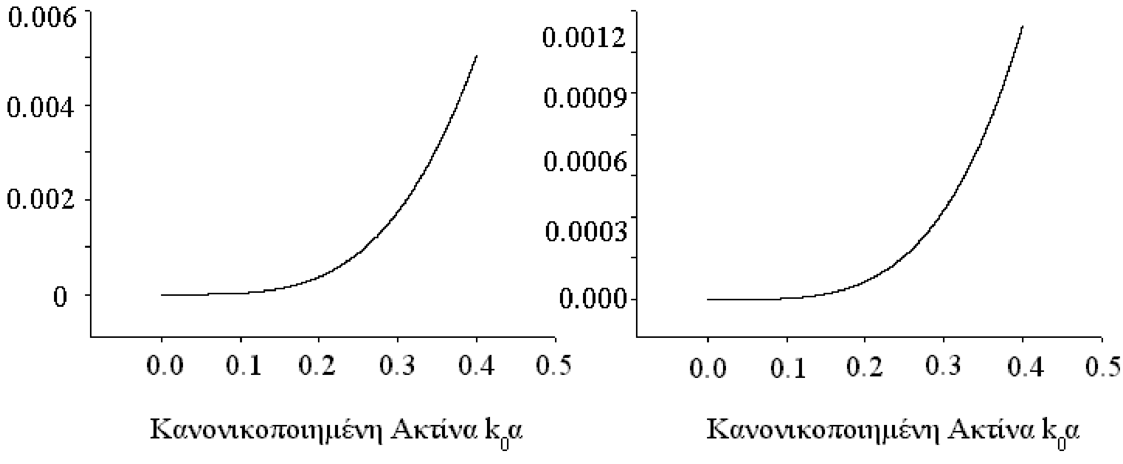
Σχήμα 5.12. Μεταβολή της κανονικοποιημένης μονοστατικής διατομής radar συναρτήσει της κανονικοποιημένης ακτίνας $k_0α$ για φακό Luneburg με (α) 5 στρώματα και (β) 10 στρώματα

Τα σχήματα 5.11 και 5.12 περιέχουν μερικά πολύ σημαντικά στοιχεία. Η εξέταση τους οδηγεί στο συμπέρασμα ότι μια ελάχιστη μεταβολή της κανονικοποιημένης ακτίνας $k_0\alpha$ οδηγεί σε έντονες αυξομειώσεις της μονοστατικής διατομής. Αυτές οι αυξομειώσεις ερμηνεύονται με την εκδήλωση τοπικών συντονισμών των συστημάτων σκέδασης. Όταν κατασκευάζονται λοιπόν τέτοιοι φακοί, επιδιώκονται τιμές της $k_0\alpha$ για τις οποίες εμφανίζονται οι τοπικοί αυτοί συντονισμοί. Επιπλέον, η κατασκευή φακών με διαφορετικό αριθμό στρωμάτων έχει σαν αποτέλεσμα την έντονη τροποποίηση της συμπεριφοράς τους σε ότι αφορά στην διατομή οπισθοσκέδασης.

Συγκεκριμένα, στην περίπτωση του φακού Fisheye (σχήμα 5.11) 5 στρωμάτων παρατηρείται μεγιστοποίηση της μονοστατικής διατομής για $k_0\alpha \approx 95$. Αντίθετα, για φακό Fisheye με 10 στρώματα το μέγιστο συμβαίνει για $k_0\alpha \approx 105$. Ακόμη, οι μέγιστες αυτές τιμές διαφέρουν κατά πολύ ($\sigma_{mo}/\pi\alpha^2 \approx 14$ για Fisheye με 5 στρώματα και $\sigma_{mo}/\pi\alpha^2 \approx 3.5$ για Fisheye με 10 στρώματα). Πάντως, και στις δυο περιπτώσεις παρατηρείται μεγάλη αύξηση στην τιμή της διατομής οπισθοσκέδασης όταν η $k_0\alpha$ παίρνει τιμές από 90 έως 105 ενώ στη συνέχεια η τιμή αυτή ελαττώνεται απότομα.

Το φαινόμενο αυτό, γίνεται ακόμη πιο έντονο στο φακό Luneburg του οποίου η συμπεριφορά εξαρτάται κατά πολύ από τον αριθμό των στρωμάτων που διαθέτει. Η μονοστατική διατομή radar μεγιστοποιείται για $k_0\alpha = 115$ στην περίπτωση των 5 στρωμάτων, ενώ στην περίπτωση των 10 στρωμάτων αυτό συμβαίνει για $k_0\alpha = 90$. Οι τιμές αυτές είναι 35 και 3.3 αντίστοιχα. Το φαινόμενο των συντονισμών γίνεται αισθητό για τιμή της $k_0\alpha$ από 40 και μετά όταν ο φακός είναι κατασκευασμένος από 5 στρώματα. Αντίθετα στην περίπτωση των 10 στρωμάτων, οι συντονισμοί γίνονται ιδιαίτερα έντονοι όταν η $k_0\alpha$ παίρνει τιμές μεγαλύτερες του 20. Το μόνο κοινό σημείο εντοπίζεται για $k_0\alpha \in [95,120]$ όπου η τιμή της διατομής οπισθοσκέδασης ελαττώνεται σημαντικά. Γενικά παρατηρώντας τα δυο διαγράμματα που αφορούν στο φακό Luneburg, υπάρχει η αίσθηση ότι το 5.12β είναι ελαφρά μετατοπισμένο προς τα δεξιά σε σχέση με το 5.12α.

Πάντως, υπάρχει και το ζήτημα του τι συμβαίνει για πολύ μικρές τιμές της παραμέτρου $k_0\alpha$. Στο σχήμα 5.13 παρουσιάζεται η μεταβολή της μονοστατικής διατομής για $k_0\alpha \in (0,0.4]$ (περιοχη Rayleigh).

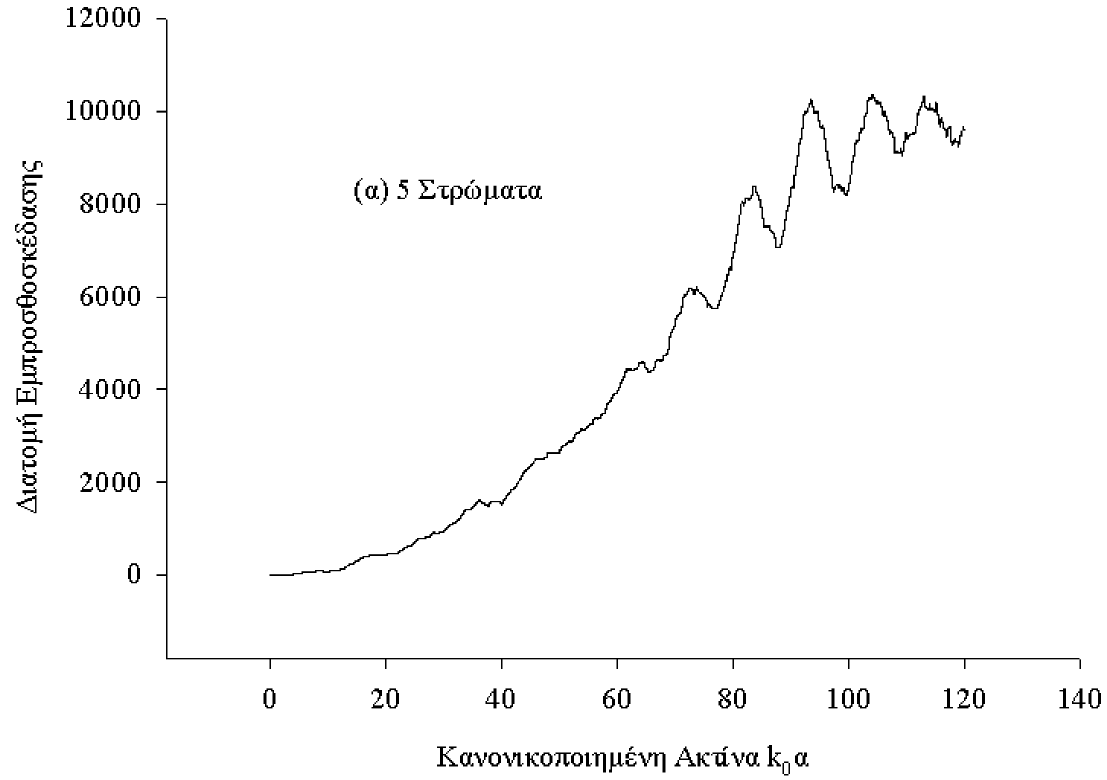


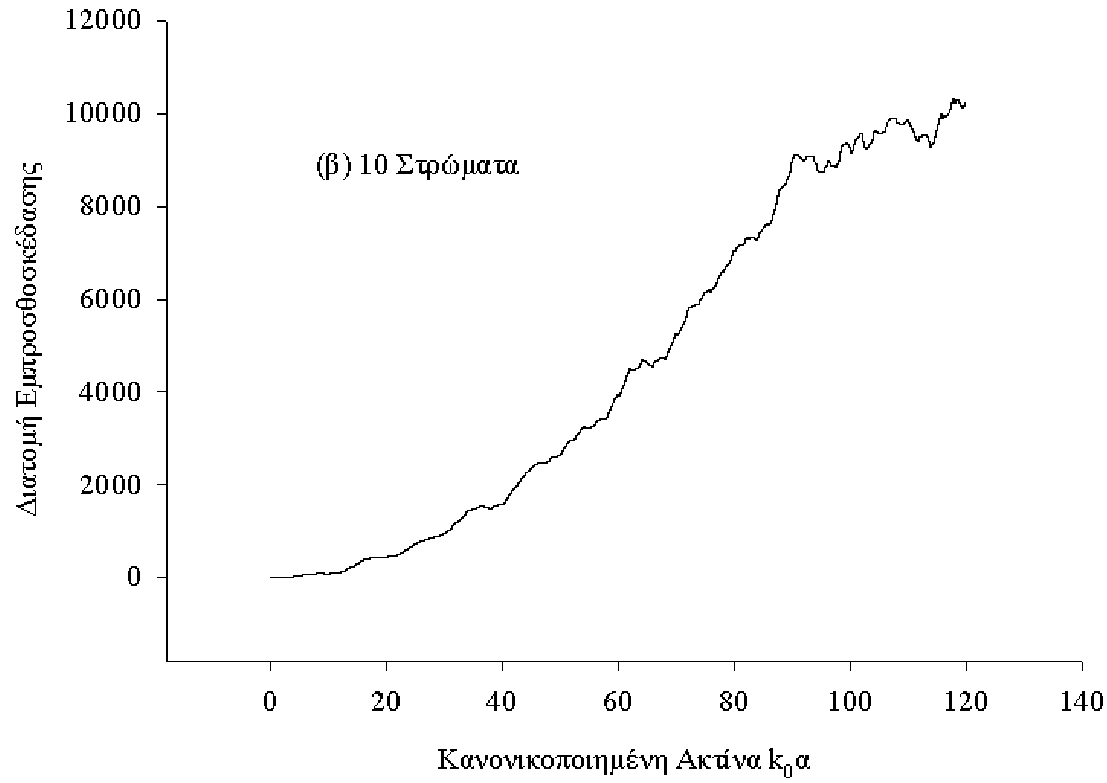
Σχήμα 5.13 Μεταβολή της μονοστατικής διατομής radar στην περιοχή Rayleigh φακών (α) Fisheye και (β) Luneburg

Η συμπεριφορά των δυο φακών στη συγκεκριμένη περιοχή είναι παρόμοια. Η μορφή των καμπύλων του σχήματος 5.13 εκτός του ότι αποδεικνύει τον παραπάνω ισχυρισμό, συμφωνεί με τη θεωρία του Rayleigh. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, κάθε σφαιρικό σύστημα σκέδασης, για τιμές της κανονικοποιημένης ακτίνας $k_0\alpha \in (0, 0.4]$, παρουσιάζει μεταβολή στην κανονικοποιημένη μονοστατική του διατομή που δίνεται από την παρακάτω προσεγγιστική έκφραση:

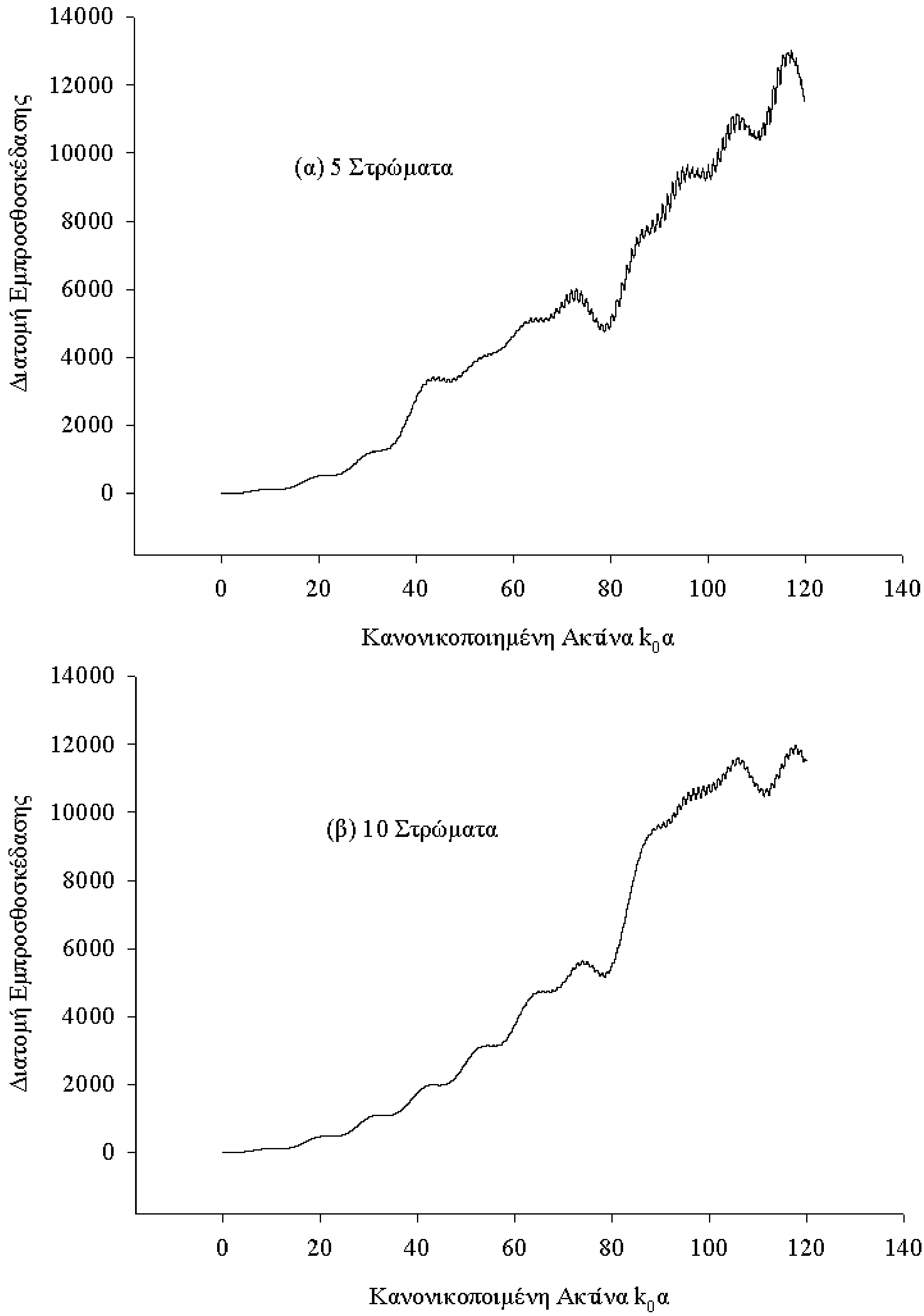
$$\frac{\sigma_{mo}}{\pi\alpha^2} \approx 4(k_0\alpha)^4 \left|\frac{n_s^2-1}{n_s^2+2}\right|^2 \qquad ; \qquad k_0\alpha << 1 \tag{5.3}$$

Τα σχήματα 5.14 και 5.15 αναπαριστούν τη μεταβολή της διατομής εμπροσθοσκέδασης συναρτήσει της παραμέτρου $k_0\alpha$ τόσο για το φακό Fisheye, όσο και για το φακό Luneburg. Παρουσιάζονται εκ νέου συγκριτικές γραφικές παραστάσεις για τις περιπτώσεις που οι φακοί είναι κατασκευασμένοι με 5 και 10 στρώματα, για να γίνει φανερός ο ρόλος που παίζει ο αριθμός των στρωμάτων κατά την κατασκευή των φακών.





Σχήμα 5.14. Μεταβολή της διατομής εμπροσθοσκέδασης συναρτήσει της κανονικοποιημένης ακτίνας $k_0\alpha$ για φακό Fisheye με (α) 5 στρώματα και (β) 10 στρώματα



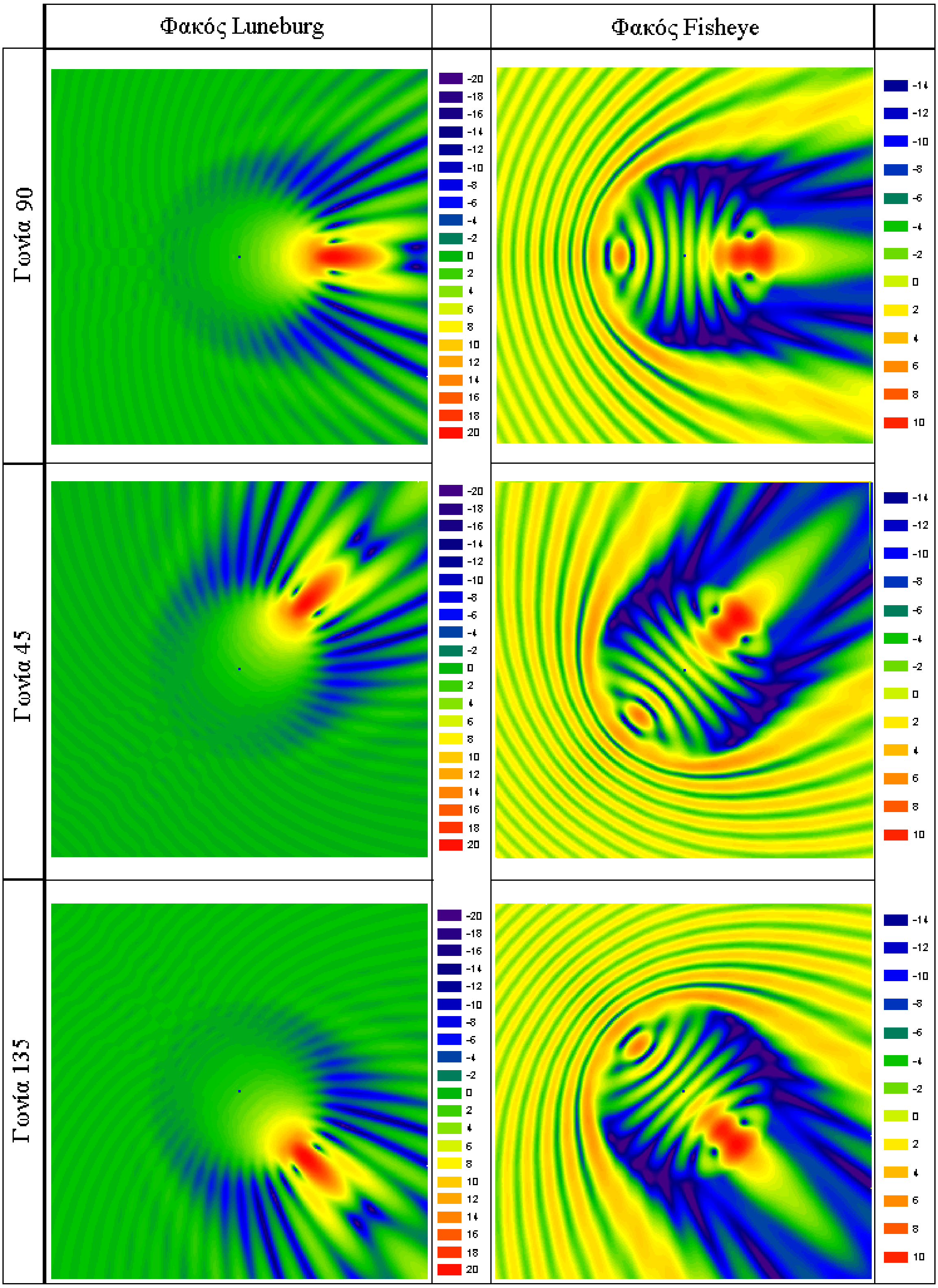
Σχήμα 5.15. Μεταβολή της διατομής εμπροσθοσκέδασης συναρτήσει της κανονικοποιημένης ακτίνας $k_0\alpha$ για φακό Luneburg με (α) 5 στρώματα και (β) 10 στρώματα

Το κύριο χαρακτηριστικό που παρατηρείται στα παραπάνω σχήματα, είναι η συνεχής αύξηση του κανονικοποιημένου πλάτους εμπροσθοσκέδασης όσο αυξάνει η τιμή της κανονικοποιημένης ακτίνας $k_0\alpha$. Εν αντιθέσει με τα διαγράμματα που φανερώνουν τη μεταβολή της οπισθοσκέδασης (σχήματα 5.11 & 5.12), εδώ φαίνεται ότι ο αριθμός των στρωμάτων δεν επηρεάζει σημαντικά τη μορφή των καμπύλων.

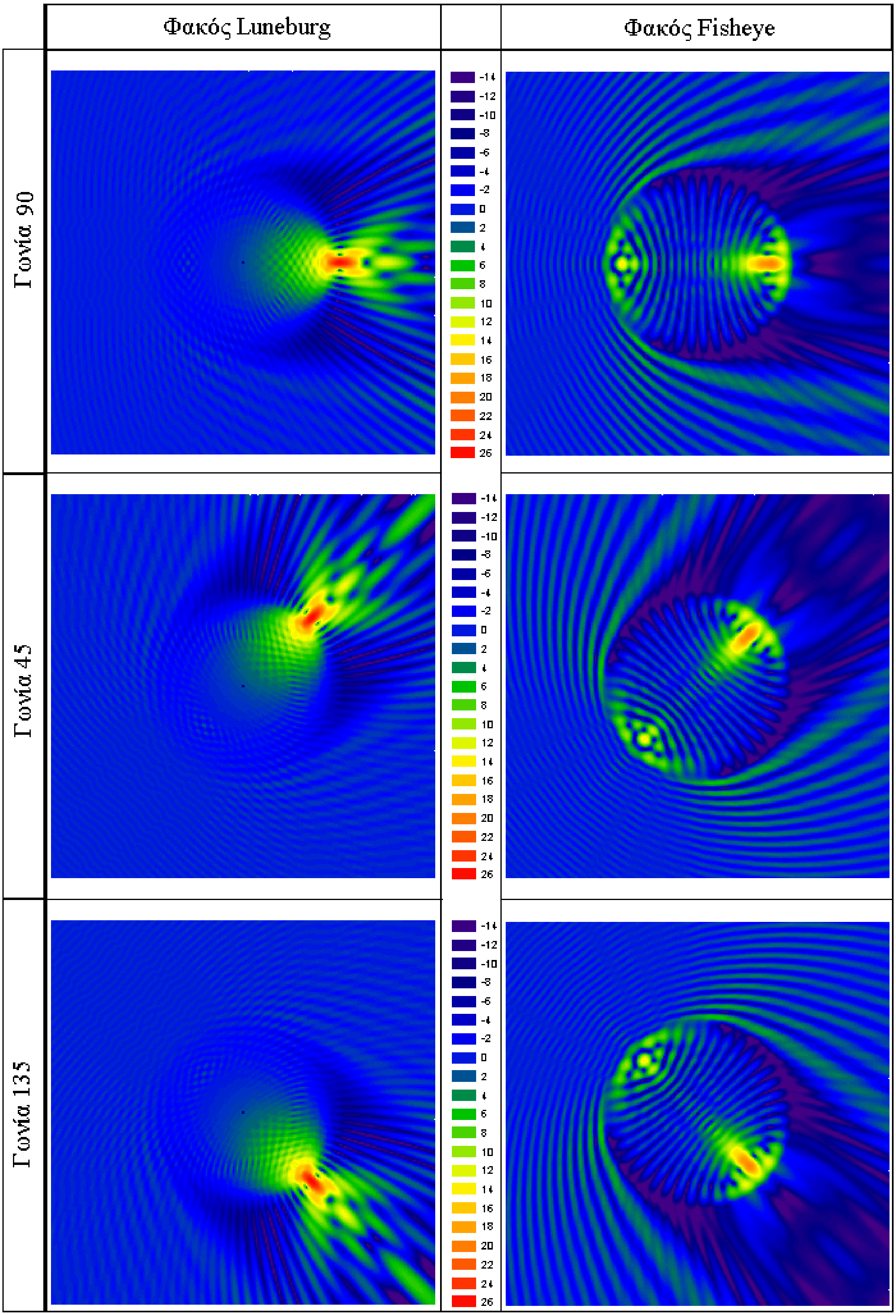
Επιπλέον, η τιμή της διατομής εμπροσθοσκέδασης είναι μεγαλύτερη για το φακό Luneburg σε σχέση με το φακό Fisheye. Αυτό συμβαίνει για όλες της τιμές της $k_0\alpha$ και σημαίνει ότι στη μικροκυματική περιοχή, ο φακός Luneburg παρουσιάζει μεγαλύτερο κέρδος. Το γεγονός ενισχύεται και από τη θεώρηση των χαρτών της ισχύος της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης του πεδίου που παρουσιάζονται στα σχήματα 5.9 και 5.10.

Παρακάτω, παρουσιάζονται χάρτες της ισχύος ηλεκτρικής πεδιακής έντασης για μεγαλύτερες τιμές της $k_0\alpha$ για τους φακούς Fisheye και Luneburg. Επειδή δεν είναι δυνατός ο προσδιορισμός του πεδίου για όλες τις τιμές της $k_0\alpha$ από το 0 έως το 120, έχουν επιλεχθεί διάσπαρτες τιμές για την κανονικοποιμένη ακτίνα. Παρουσιάζονται χάρτες στο επίπεδο XZ καθώς αυτό είναι το επίπεδο που ουσιαστικά ενδιαφέρει. Επίσης, υπάρχουν αποτελέσματα για γωνίες πρόσπτωσης $90^o, 45^o$ και 135^o. Όπως θα γίνει αντιληπτό, λόγω της συμμετρίας του συστήματος σκέδασης, το πεδίο στις τρεις αυτές περιπτώσεις είναι πανομοιότυπο, αν το υπό εξέταση επίπεδο περιστραφεί κατά την κατάλληλη γωνία. Οι χάρτες είναι τετραγωνικού σχήματος ακμής 4R όπου R η ακτίνα του σφαιρικού σκεδαστή που σε όλες τις περιπτώσεις λαμβάνεται ίση με 10cm. Η μέτρηση της ισχύος της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης γίνεται σε dB. Δεξιά από κάθε χάρτη υπάρχει το υπόμνημα των χρωμάτων που χρησιμοποιήθηκαν για το σχηματισμό τους. Η αριστερή στήλη αφορά στο φακό Luneburg, ενώ η δεξιά στο φακό Fisheye.

Να σημειωθεί εδώ, ότι οι φακοί αποτελούνται από 10 στρώματα. Μελετήθηκε μόνο η περίπτωση αυτή γιατί τα αποτελέσματα για διαφορετικό αριθμό στρωμάτων είναι παρόμοια. Η παρατήρηση των χαρτών αυτών οδηγεί σε δυο άμεσα συμπεράσματα. Επαληθεύονται οι ισχυρισμοί ότι η αύξηση της τιμής της $k_0\alpha$ οδηγεί πρώτον σε ελάττωση των διαστάσεων του σημείου συγκέντρωσης και δεύτερον σε αύξηση του κέρδους. Τα παραπάνω ισχύουν τόσο για το φακό Fisheye, όσο και για το φακό Luneburg.



Σχήμα 5.16 Χαρτογράφηση της ισχύος της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης επιπέδου κύματος συχνότητας 10GHz που προσπίπτει σε φακούς Luneburg και Fisheye ακτίνας 10cm $(k_0\alpha \approx 20.93)$ για διάφορες γωνίες πρόσπτωσης θ_{inc}.



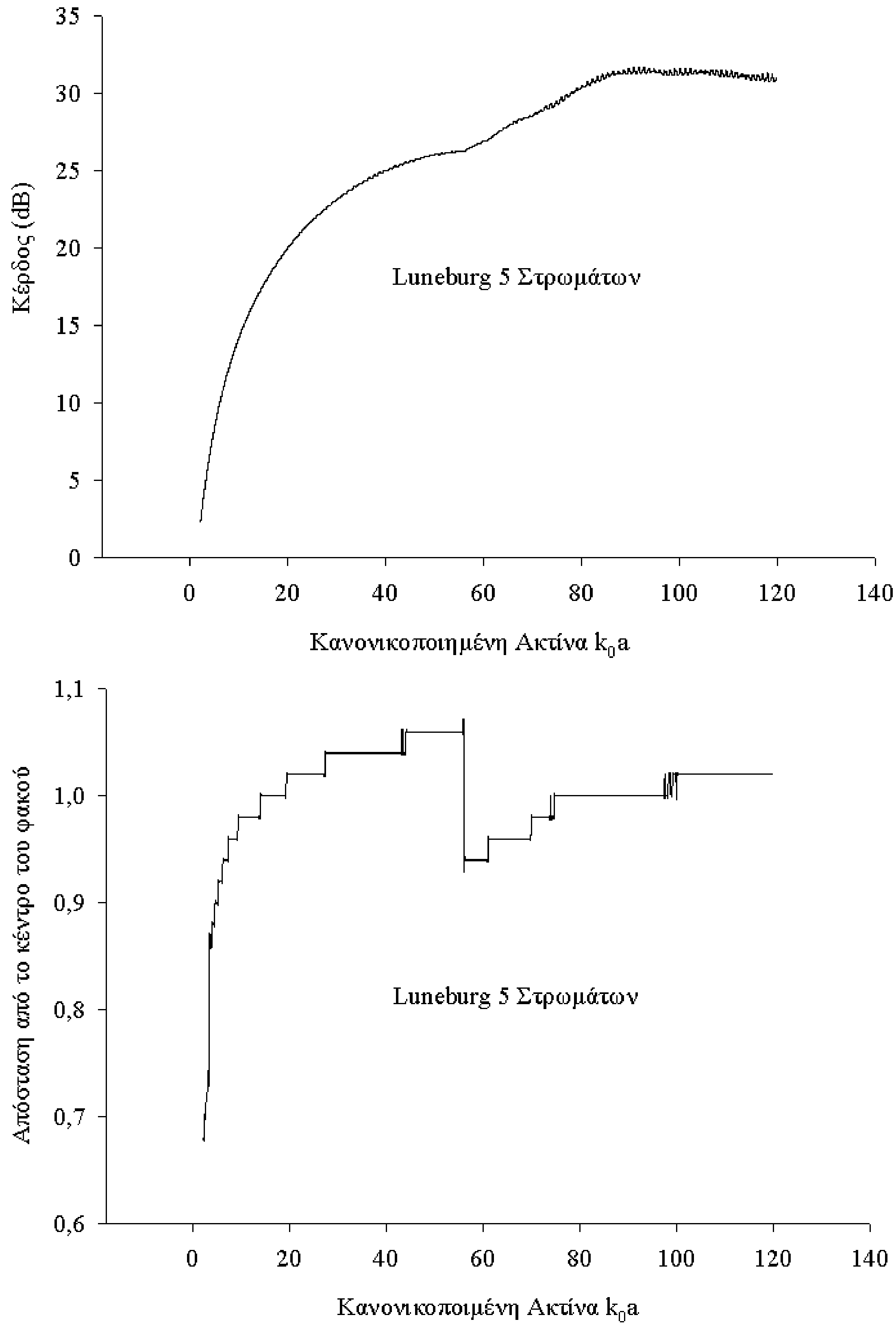
Σχήμα 5.17 Χαρτογράφηση της ισχύος της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης επιπέδου κύματος συχνότητας 20GHz που προσπίπτει σε φακούς Luneburg και Fisheye ακτίνας 10cm $\left(k_0\alpha \approx 41.86\right)$ για διάφορες γωνίες πρόσπτωσης θ_{inc} .

Οι χάρτες που αναφέρονται στο φακό Fisheye αποδεικνύουν το γεγονός ότι η αύξηση της τιμής της κανονικοποιημένης ακτίνας $k_0\alpha$ εκτός από την αύξηση του κέρδους, οδηγεί και στην εξάλειψη του πεδίου μπροστά από το φακό που παρατηρήθηκε στις χαμηλές συχνότητες. Πάντως, σημαντικό ρόλο στην επιλογή της τιμής της $k_0\alpha$ παίζει και η εμφάνιση των τοπικών συντονισμών που συζητήθηκε παραπάνω. Αυτό αποκτά ακόμη μεγαλύτερη σημασία στην περίπτωση του φακού Luneburg όπου η εκδήλωση συντονισμών επηρεάζει σημαντικά τη συμπεριφορά του συστήματος σκέδασης.

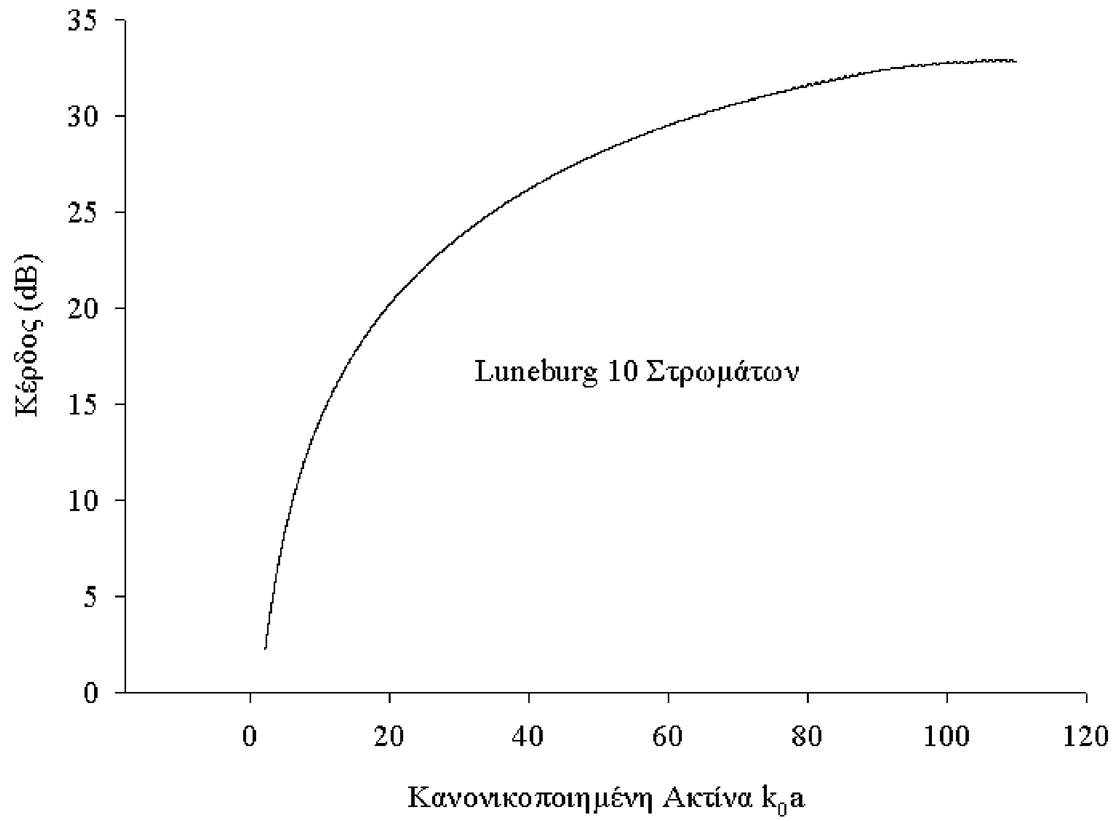
Παρακάτω, θα μελετηθεί το πώς επηρεάζει το συνολικό κέρδος των δυο φακών η μεταβολή της κανονικοποιημένης ακτίνας $k_0 a$. Στην εκτέλεση της εφαρμογής θεωρήθηκαν και πάλι οι περιπτώσεις της κατασκευής φακών με 5 και 10 στρώματα. Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στα σχήματα 5.18 και 5.19 για το Luneburg και 5.20 και 5.21 για το Fisheye. Πέρα από τα διαγράμματα μεταβολής του κέρδους, υπάρχουν και διαγράμματα που φανερώνουν τη θέση στην οποία παρατηρείται μεγιστοποίηση του κέρδους, συναρτήσει της κανονικοποιημένης ακτίνας $k_0 a$.

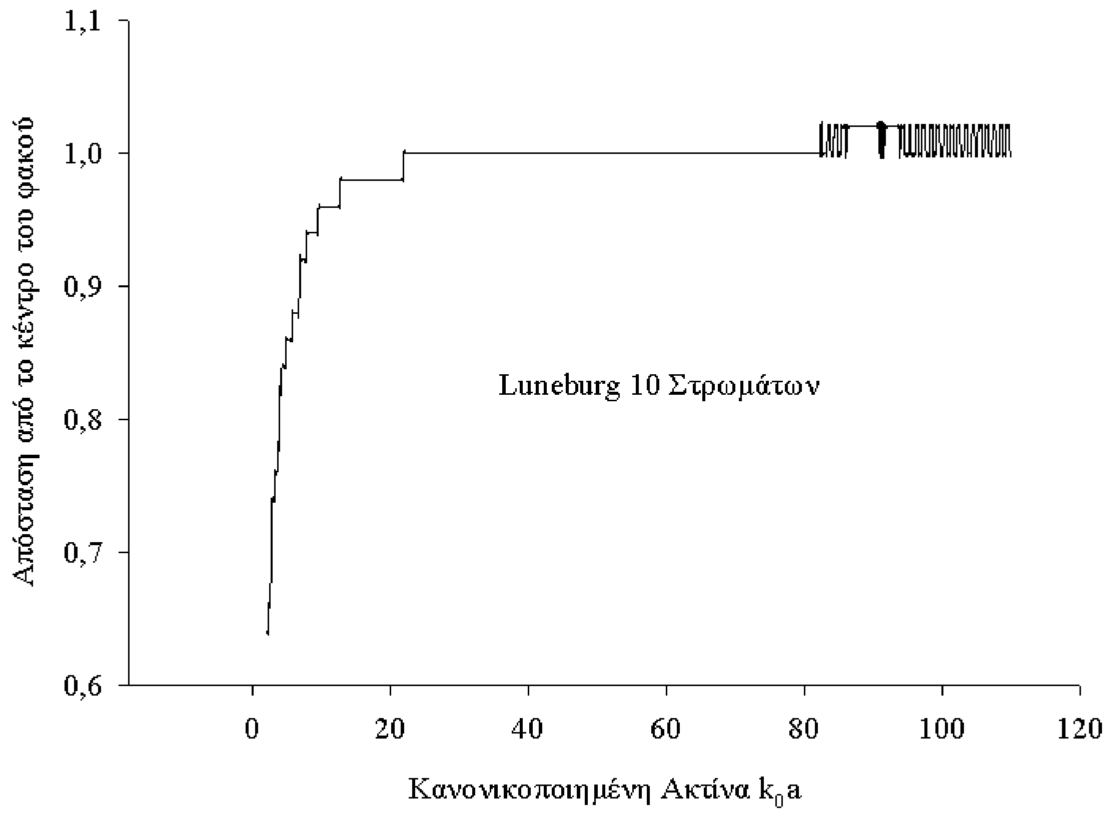
Η εξέταση των διαγραμμάτων αυτών, οδηγεί στη διατύπωση μερικών σημαντικών συμπερασμάτων και προτάσεων.

Σε ότι αφορά στο φακό Luneburg γενικά, παρατηρείται σταθερή αύξηση του κέρδους όσο αυξάνει η τιμή της κανονικοποιημένης ακτίνας $k_0 a$. Επίσης, το σημείο συγκέντρωσης βρίσκεται πολύ κοντά στην επιφάνεια του φακού για όλες σχεδόν τις τιμές της παραμέτρου $k_0 a$. Απόκλιση της παραπάνω πρότασης αποτελεί η περίπτωση του Luneburg 5 στρωμάτων, όπου για $60 \le k_0 a \le 80$ το σημείο συγκέντρωσης είναι εντός του φακού και σε απόσταση περίπου ίση με $0,9R$ από το κέντρο, όπου R είναι η ακτίνα του φακού. Για το Luneburg 10 στρωμάτων, παρατηρείται μια αξιοσημείωτη σταθερότητα του σημείου συγκέντρωσης, το οποίο εντοπίζεται ακριβώς πάνω στην επιφάνεια του φακού για $20 \le k_0 a \le 85$ δηλαδή για ένα αρκετά μεγάλο εύρος συχνοτήτων. Πέρα όμως από την τιμή αυτή, η θέση του σημείου, παρουσιάζει διακυμάνσεις από R έως 1.02R. Γίνεται λοιπόν αντιληπτό ότι η κατασκευή φακών με περισσότερα στρωματά και μεγαλύτερη κανονικοποιημένη ακτίνα, προσεγγίζει καλύτερα την θεωρητική θεμελίωση που παρουσιάστηκε στο κεφαλαίο 4.

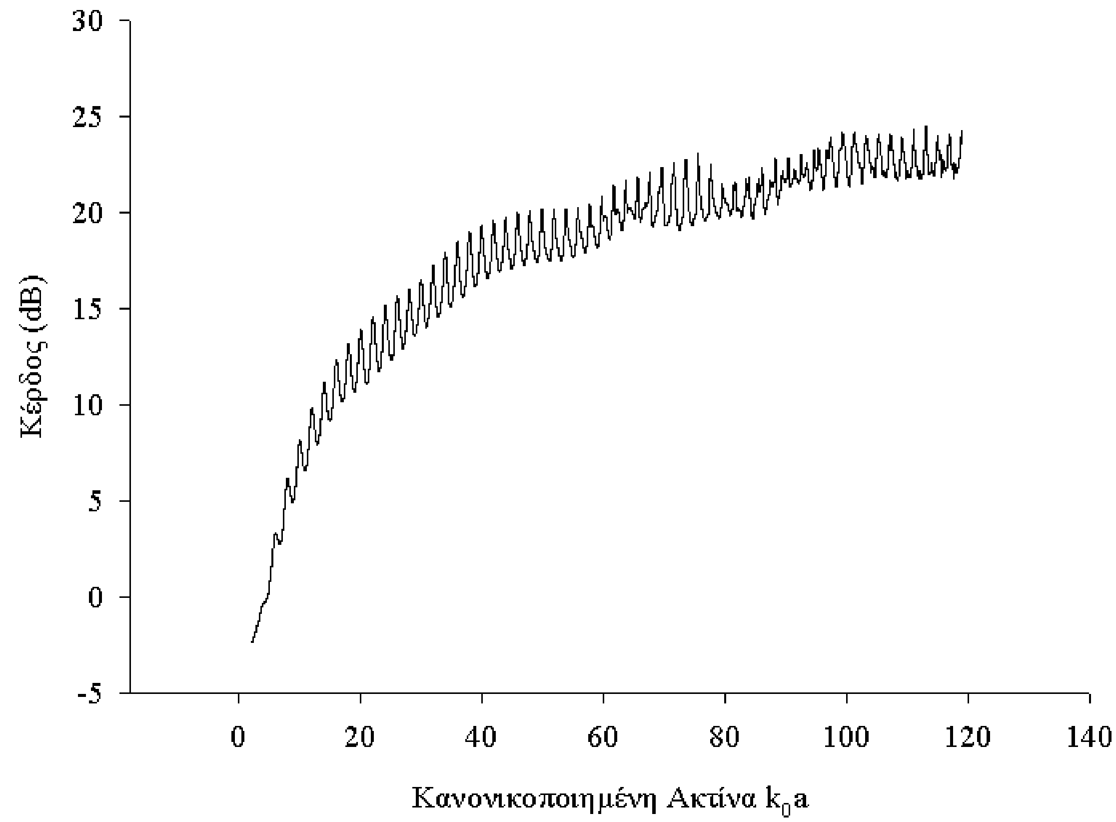


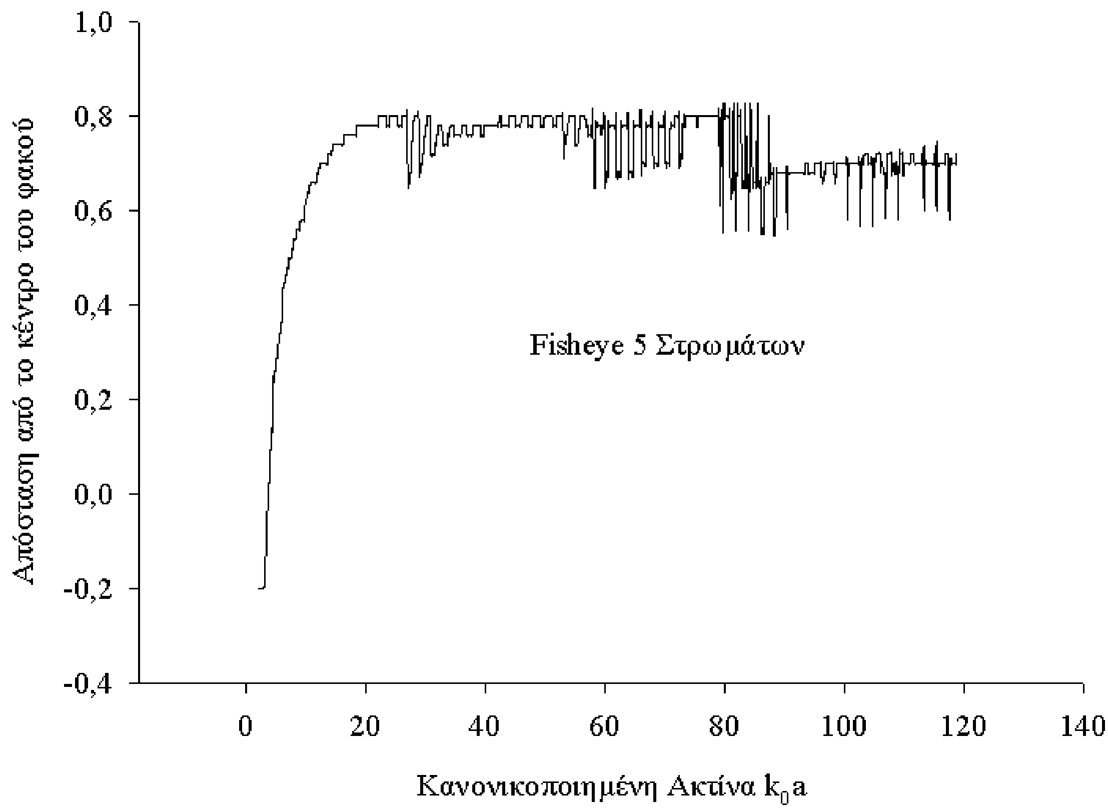
Σχήμα 5.18 Μεταβολή του κέρδους και θέση του σημείου συγκέντρωσης συναρτήσει της κανονικοποιημένης ακτίνας k_0a για φακό Luneburg 5 στρωμάτων



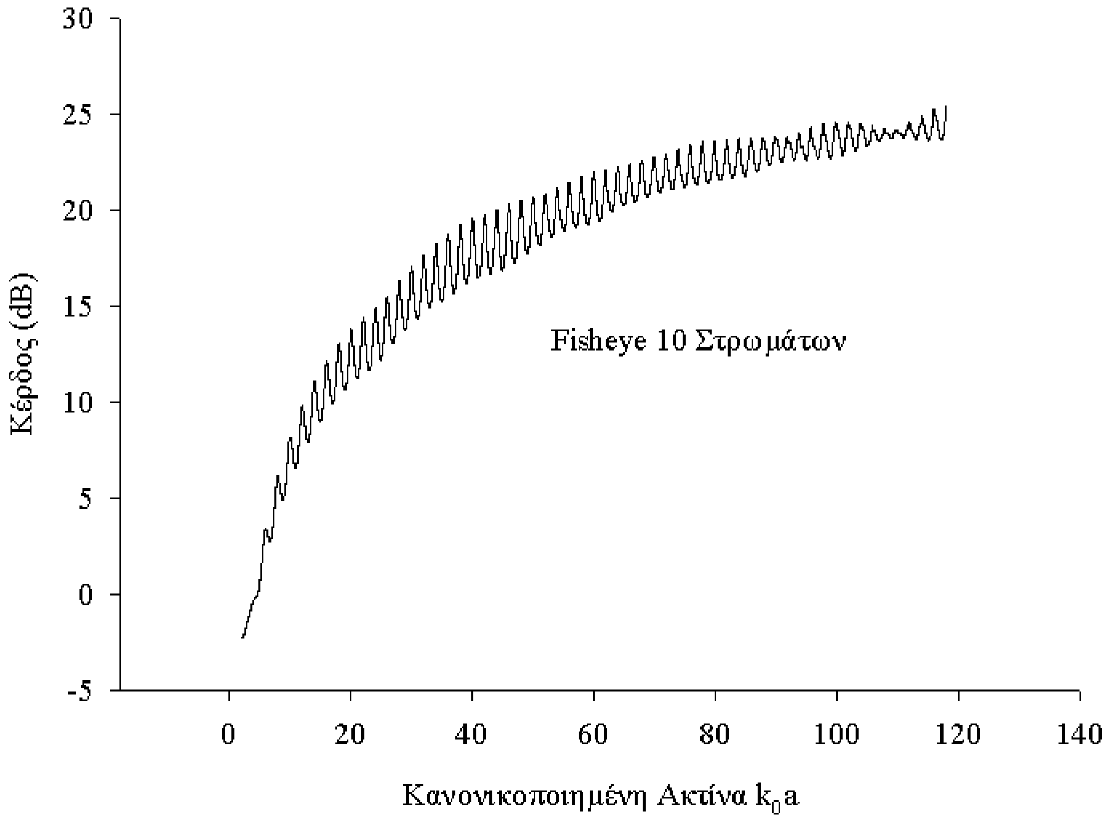


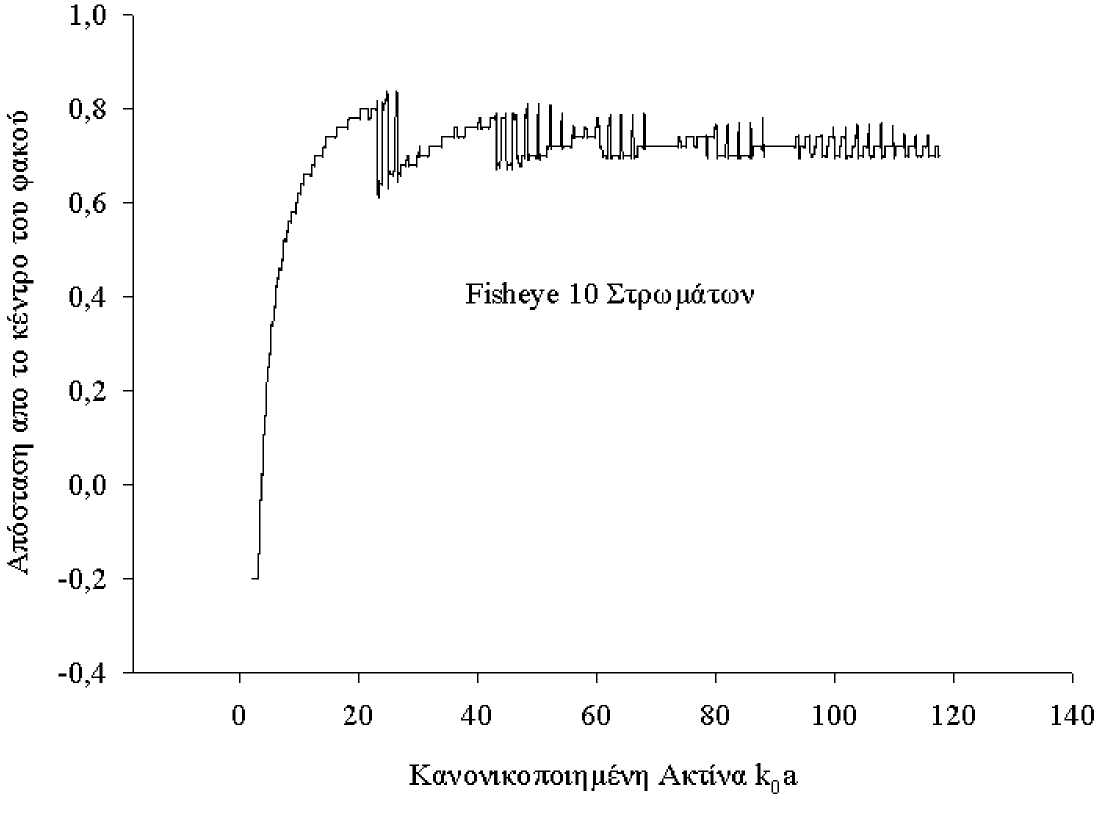
Σχήμα 5.19 Μεταβολή του κέρδους και θέση του σημείου συγκέντρωσης συναρτήσει της κανονικοποιημένης ακτίνας k_0a για φακό Luneburg 10 στρωμάτων





Σχήμα 5.20 Μεταβολή του κέρδους και θέση του σημείου συγκέντρωσης συναρτήσει της κανονικοποιημένης ακτίνας k_0a για φακό Fisheye 5 στρωμάτων





Σχήμα 5.21 Μεταβολή του κέρδους και θέση του σημείου συγκέντρωσης συναρτήσει της κανονικοποιημένης ακτίνας k_0a για φακό Fisheye 10 στρωμάτων

Σε ότι αφορά στο φακό Fisheye αντίθετα, η χρήση 5 και 10 στρωμάτων δε μεταβάλλει σημαντικά τα αποτελέσματα, τουλάχιστον όχι τόσο, όσο στο φακό Luneburg. Συγκεκριμένα και εδώ η αύξηση της τιμής της κανονικοποιημένης ακτίνας έχει και εδώ σαν αποτέλεσμα την αύξηση της τιμής του κέρδους του φακού. Ωστόσο, παρατηρούνται έντονες μεταβολές στην τιμή του κέρδους για γειτονικές τιμές της k_0a με αποτέλεσμα να παρατηρείται αυτή η κυματοειδής μορφή που φαίνεται στα σχήματα 5.20 και 5.21.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Ένα μέγεθος που εκφράζεται σε σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων έχει τρεις συνιστώσες κατά μήκος των μοναδιαίων διανυσμάτων βάσης $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$. Οι σχέσεις που συνδέουν το καρτεσιανό, με το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων δίνονται από τις παρακάτω εξισώσεις :

Εξισώσεις μετασχηματισμού καρτεσιανών σε σφαιρικές συντεταγμένες :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{Ι.1α}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \tag{Ι.1β}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{Ι.1γ}$$

Εξισώσεις μετασχηματισμού σφαιρικών σε καρτεσιανές συντεταγμένες :

$$x = r\sin\theta\cos\phi \tag{Ι.2α}$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi \tag{Ι.2β}$$

$$z = r\cos\theta \tag{I.2γ}$$

Για τις συνιστώσες του αυθαίρετου διανύσματος $\vec{f}$ στο σύστημα συντεταγμένων $(O;xyz)$ και $(O;r\theta\phi)$ ισχύουν οι εξής μετασχηματισμοί

$$\begin{bmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \tag{I.3α}$$

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\phi \end{bmatrix} \tag{I.3β}$$

Με εφαρμογή των (I.3) προκύπτουν και οι μετασχηματισμοί μεταξύ των μοναδιαίων διανυσμάτων $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ και $\hat{r}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$:

$$\hat{x} = \hat{r}\sin\theta\cos\phi + \hat{\theta}\cos\theta\cos\phi - \hat{\phi}\sin\phi \tag{I.4α}$$

$$\hat{y} = \hat{r}\sin\theta\sin\phi + \hat{\theta}\cos\theta\sin\phi + \hat{\phi}\cos\phi \tag{I.4β}$$

$$\hat{z} = \hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta \tag{I.4γ}$$

ενώ αντίστροφα, για μετατροπή από το καρτεσιανό στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων ισχύουν οι μετασχηματισμοί :

$$\hat{r} = \hat{x}\sin\theta\cos\phi + \hat{y}\sin\theta\sin\phi + \hat{z}\cos\theta \tag{I.5α}$$

$$\hat{\theta} = \hat{x}\cos\theta\cos\phi + \hat{y}\cos\theta\sin\phi - \hat{z}\sin\theta \tag{I.5β}$$

$$\hat{\phi} = -\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi \tag{I.5γ}$$

Αν Φ είναι ένα βαθμωτό μέγεθος εκφρασμένο σε σφαιρικές συντεταγμένες και $\vec{A}$ είναι ένα διανυσματικό μέγεθος με συνιστώσες τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{r}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$ του σφαιρικού συστήματος συντεταγμένων τότε ισχύουν οι εξής ορισμοί για τους διαφορικούς τελεστές $\nabla, \nabla\cdot, \nabla\times, \nabla^2$:

$$\nabla\Phi = \hat{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \frac{\hat{\phi}}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \tag{I.6}$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \tag{I.7}$$

$$\nabla\times\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\phi \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\hat{r}}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\phi\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right] + \frac{\hat{\theta}}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\phi\right)\right] + \frac{\hat{\phi}}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right] \tag{I.8}$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} \tag{I.9}$$

$$\nabla^2\vec{A} = \hat{r}\left(\frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2}A_r + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_r}{\partial\theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 A_r}{\partial\phi^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} - \frac{2\cot\theta}{r^2}A_\theta - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right) +$$

$$+\hat{\theta}\left(\frac{\partial^2 A_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}A_\theta + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_\theta}{\partial\theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \right.$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 A_\theta}{\partial\phi^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}-\frac{2}{r^2}\frac{\cot\theta}{\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\Bigg)+$$

$$+\hat{\phi}\left(\frac{\partial^2 A_\phi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial r}-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}A_\phi+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_\phi}{\partial\theta^2}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial\theta}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 A_\phi}{\partial\phi^2}+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}+\frac{2}{r^2}\frac{\cot\theta}{\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right) \tag{I.10}$$

Από την (Ι.10) διαπιστώνεται ότι $\nabla^2\vec{A}\neq\hat{r}\nabla^2 A_r+\hat{\theta}\nabla^2 A_\theta+\hat{\phi}\nabla^2 A_\phi$ κάτι που οφείλεται στο γεγονός ότι τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{r}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$ δεν έχουν σταθερή κατεύθυνση.

Η χρήση των εξισώσεων (Ι.6), (Ι.7), (Ι.8), (Ι.9) και (Ι.10) οδηγεί στην απόδειξη των παρακάτω διανυσματικών ταυτοτήτων οι οποίες ισχύουν για βαθμωτά και διανυσματικά μεγέθη εκφρασμένα σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων.

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{C}=\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\cdot\vec{A}=\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)\cdot\vec{B} \tag{I.11}$$

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B}-\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C} \tag{I.12}$$

$$\nabla\cdot\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=\nabla\cdot\vec{A}+\nabla\cdot\vec{B} \tag{I.13}$$

$$\nabla\left(\Phi+\Psi\right)=\nabla\Phi+\nabla\Psi \tag{I.14}$$

$$\nabla\times\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=\nabla\times\vec{A}+\nabla\times\vec{B} \tag{I.15}$$

$$\nabla\cdot\left(\Phi\vec{A}\right)=\vec{A}\cdot\nabla\Phi+\Phi\nabla\cdot\vec{A} \tag{I.16}$$

$$\nabla\left(\Phi\Psi\right)=\Phi\nabla\Psi+\Psi\nabla\Phi \tag{I.17}$$

$$\nabla\times\left(\Phi\vec{A}\right)=\nabla\Phi\times\vec{A}+\Phi\nabla\times\vec{A} \tag{I.18}$$

$$\nabla^2\left(\Phi\Psi\right)=\Phi\nabla^2\Psi+\Psi\nabla^2\Phi+2\nabla\Psi\cdot\nabla\Phi \tag{I.19}$$

$$\nabla\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{B}\cdot\nabla\times\vec{A}-\vec{A}\cdot\nabla\times\vec{B} \tag{I.20}$$

$$\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)=\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}+\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}+\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)+\vec{B}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right) \tag{I.21}$$

$$\nabla\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{A}\nabla\cdot\vec{B}-\vec{B}\nabla\cdot\vec{A}+\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}-\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B} \tag{I.22}$$

$$\nabla\cdot\nabla\Phi=\nabla^2\Phi \tag{I.23}$$

$$\nabla\cdot\nabla\times\vec{A}=0 \tag{I.24}$$

$$\nabla\times\nabla\Phi=0 \tag{I.25}$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A} \tag{I.26}$$

$$\int_V\nabla\cdot\vec{A}dV=\int_S\vec{A}\cdot d\vec{S} \tag{I.27}$$

$$\int_S\left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot d\vec{S}=\oint_l\vec{A}\cdot d\vec{l} \tag{I.28}$$

$$\nabla^2\left(\vec{r}\cdot\vec{A}\right)=\vec{r}\cdot\left(\nabla^2\vec{A}\right)+2\nabla\cdot\vec{A} \tag{I.29}$$

Απόδειξη της (Ι.29)

Έστω $\vec{A} = A_r\hat{r} + A_\theta\hat{\theta} + A_\phi\hat{\phi}$ τυχαίο διάνυσμα εκφρασμένο σε σφαιρικές συντεταγμένες και $\vec{r} = r\hat{r}$ το ακτινικό διάνυσμα. Προκειμένου να αποδειχθεί η (Ι.29) αρκεί να δειχθεί ότι

$$\nabla^2\left(\vec{r}\cdot\vec{A}\right) - \vec{r}\cdot\left(\nabla^2\vec{A}\right) - 2\nabla\cdot\vec{A} = 0 \qquad (\mathrm{I}.30)$$

Παρακάτω αναλύεται ο κάθε όρος της (Ι.30). Για τον πρώτο όρο ισχύουν τα εξής

$$\vec{r}\cdot\vec{A} = r\hat{r}\cdot\left(A_r\hat{r} + A_\theta\hat{\theta} + A_\phi\hat{\phi}\right) = rA_r \qquad (\mathrm{I}.31)$$

άρα

$$\nabla^2\left(\vec{r}\cdot\vec{A}\right) = \nabla^2\left(rA_r\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_r\right)\right] + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(rA_r\right)\right] + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\left(rA_r\right) =$$

$$= \frac{1}{r^2}\left[2r\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_r\right) + r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(rA_r\right)\right] + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(rA_r\right) + \sin\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(rA_r\right)\right] + \frac{1}{r\sin^2\theta}\frac{\partial^2 A_r}{\partial\phi^2} =$$

$$= \frac{1}{r^2}\left[2rA_r + 2r^2\frac{\partial A_r}{\partial r} + r^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_r\right)\right] + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\cos\theta\frac{\partial A_r}{\partial\theta} + \sin\theta\frac{\partial^2 A_r}{\partial\theta^2}\right] + \frac{1}{r\sin^2\theta}\frac{\partial^2 A_r}{\partial\phi^2} =$$

$$= \frac{1}{r^2}\left[2rA_r + 2r^2\frac{\partial A_r}{\partial r} + r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(A_r + r\frac{\partial A_r}{\partial r}\right)\right] + \frac{\cos\theta}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 A_r}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r\sin^2\theta}\frac{\partial^2 A_r}{\partial\phi^2} =$$

$$= \frac{2}{r}A_r + 2\frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_r}{\partial r}\right) + \frac{\cot\theta}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 A_r}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r\sin^2\theta}\frac{\partial^2 A_r}{\partial\phi^2} =$$

$$= \frac{2}{r}A_r + 3\frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{\partial A_r}{\partial r} + r\frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{\cot\theta}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 A_r}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r\sin^2\theta}\frac{\partial^2 A_r}{\partial\phi^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla^2\left(\vec{r}\cdot\vec{A}\right)=\frac{2}{r}A_r+4\frac{\partial A_r}{\partial r}+r\frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2}+\frac{\cot\theta}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 A_r}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r\sin^2\theta}\frac{\partial^2 A_r}{\partial\phi^2} \quad \text{(I.32)}$$

Για το δεύτερο όρο χρησιμοποιείται η ταυτότητα (I.10) και ακολουθείται η εξής διαδικασία:

$$\vec{r}\cdot\left(\nabla^2\vec{A}\right)=r\left(\frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial A_r}{\partial r}-\frac{2}{r^2}A_r+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_r}{\partial\theta^2}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 A_r}{\partial\phi^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}-\frac{2\cot\theta}{r^2}A_\theta-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right)=$$

$$=r\frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2}+2\frac{\partial A_r}{\partial r}-\frac{2}{r}A_r+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 A_r}{\partial\theta^2}+\frac{\cot\theta}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin^2\theta}\frac{\partial^2 A_r}{\partial\phi^2}-\frac{2}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}-\frac{2\cot\theta}{r}A_\theta-\frac{2}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \quad \text{(I.33)}$$

Τέλος, αναπτύσσεται ο τρίτος όρος με βάση την (I.7)

$$2\nabla\cdot\vec{A}=\frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_r\right)+\frac{2}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\theta\right)+\frac{2}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}=$$

$$=\frac{2}{r^2}\left(2rA_r+r^2\frac{\partial A_r}{\partial r}\right)+\frac{2\cos\theta}{r\sin\theta}A_\theta+\frac{2}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}+\frac{2}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\nabla\cdot\vec{A}=\frac{4}{r}A_r+2\frac{\partial A_r}{\partial r}+\frac{2\cot\theta}{r}A_\theta+\frac{2}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}+\frac{2}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \quad \text{(I.34)}$$

Επομένως, αντικαθιστώντας τις (I.32), (I.33) και (I.34) στην (I.30) προκύπτει το ζητούμενο:

$$\nabla^2\left(\vec{r}\cdot\vec{A}\right)-\vec{r}\cdot\left(\nabla^2\vec{A}\right)-2\nabla\cdot\vec{A}=$$

$$=\frac{2}{r}A_r+4\frac{\partial A_r}{\partial r}+r\frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2}+\frac{\cot\theta}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 A_r}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r\sin^2\theta}\frac{\partial^2 A_r}{\partial\phi^2}-$$

$$-r\frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2}-2\frac{\partial A_r}{\partial r}+\frac{2}{r}A_r-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 A_r}{\partial\theta^2}-\frac{\cot\theta}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}-\frac{1}{r\sin^2\theta}\frac{\partial^2 A_r}{\partial\phi^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}+\frac{2\cot\theta}{r}A_\theta+\frac{2}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}-$$

$$-\frac{4}{r}A_r-2\frac{\partial A_r}{\partial r}-\frac{2\cot\theta}{r}A_\theta-\frac{2}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}-\frac{2}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\nabla^2\left(\vec{r}\cdot\vec{A}\right)-\vec{r}\cdot\left(\nabla^2\vec{A}\right)-2\nabla\cdot\vec{A}=0$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ LEGENDRE

Σαν προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre πρώτου και δεύτερου είδους $P_\nu^\mu(z)$ και $Q_\nu^\mu(z)$ ορίζονται οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης Legendre που δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\left(1-z^2\right)\frac{d^2w}{dz^2}-2z\frac{dw}{dz}+\left(n\left(n+1\right)-\frac{m^2}{1-z^2}\right)w\left(z\right)=0 \qquad \text{(II.1)}$$

Στη γενική περίπτωση, η μεταβλητή z καθώς και οι σταθερές m, n είναι μιγαδικοί αριθμοί. Αν το όρισμα z είναι πραγματικός αριθμός, έστω $z=v=\cos\theta$ και οι δείκτες m, n είναι ακέραιοι, οι μόνες πεπερασμένες λύσεις της (II.1) στο διάστημα $-1\leq v\leq 1$, είναι οι προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους $P_n^m\left(\cos\theta\right)$. Σε προβλήματα ακτινοβολίας απορρίπτονται οι προσαρτημένες Legendre δευτέρου είδους επειδή απειρίζονται στους πόλους θ= 0, π. Ο δείκτης n ονομάζεται βαθμός, ενώ ο έκθετης m ονομάζεται τάξη της συνάρτησης $P_n^m\left(\cos\theta\right)$.

Αν m = 0, οι παραπάνω συναρτήσεις εκφυλίζονται στα *πολυώνυμα Legendre* $P_n\left(v\right)$ που ικανοποιούν την αναδρομική σχέση:

$$P_n\left(v\right)=\frac{2n-1}{n}vP_{n-1}\left(v\right)-\frac{n-1}{n}P_{n-2}\left(v\right) \qquad \text{(II.2)}$$

Η (II.2) εκκινεί με τα πολυώνυμα :

$$P_0(v)=1 \quad , \quad P_1(v)=v \tag{II.3}$$

Τα πολυώνυμα Legendre ορίζονται από την *εξίσωση Rodrigues* :

$$P_n(v)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n\left(v^2-1\right)^n}{dv^n} \tag{II.4}$$

Οι τιμές των πολυωνύμων Legendre στους πόλους θ = 0 (βόρειος) και θ = π (νότιος) είναι οι εξής :

$$P_n(1)=1, \quad P_n(-1)=(-1)^n \tag{II.5}$$

Οι προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους ορίζονται με την βοήθεια των πολυώνυμων Legendre από τις σχέσεις :

$$P_n^m(v)=0, \quad m>n \tag{II.6α}$$

$$P_n^m(v)=(-1)^m\left(1-v^2\right)^{m/2}\frac{d^m}{dv^m}P_n(v), \quad 0<m\le n \tag{II.6β}$$

Οι προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre μηδενίζονται και στους δυο πόλους:

$$P_n^m(\pm 1)=0 \tag{II.7}$$

Αυτό προκύπτει από την (II.6β) αν τεθεί $v=\pm 1$. Η έκφραση τους για αρνητική τάξη δίνεται από την εξίσωση

$$P_n^{-m}(v)=(-1)^m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(v) \tag{II.8}$$

Για m = n ισχύει η παρακάτω απλή έκφραση :

$$P_n^n\left(v\right)=\left(-1\right)^n\frac{\left(2n\right)!\sin^n\theta}{2^n n!}\qquad\text{(II.9)}$$

Οι προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους και η πρώτη παράγωγος τους, με όρισμα το συνημίτονο της γωνίας θ, όπως αυτές απαντώνται στην μαθηματική ανάλυση, ικανοποιούν τις αναδρομικές εξισώσεις :

$$P_n^m\left(\cos\theta\right)=\frac{\left(n-m+1\right)P_{n+1}^m\left(\cos\theta\right)+\left(n+m\right)P_{n-1}^m\left(\cos\theta\right)}{\left(2n+1\right)\left(\cos\theta\right)}\qquad\text{(II.10α)}$$

$$P_n^m\left(\cos\theta\right)=-\frac{P_n^{m+2}\left(\cos\theta\right)+2\left(m+1\right)\cot\theta P_n^{m+1}\left(\cos\theta\right)}{\left(n-m\right)\left(n+m+1\right)}\qquad\text{(II.10β)}$$

$$P_n^{m-1}\left(\cos\theta\right)=\frac{P_{n-1}^m\left(\cos\theta\right)-P_{n+1}^m\left(\cos\theta\right)}{\left(2n+1\right)\sin\theta}\qquad\text{(II.10γ)}$$

$$\frac{dP_n^m\left(\cos\theta\right)}{d\theta}=\frac{\left(n-m+1\right)P_{n+1}^m\left(\cos\theta\right)-\left(n+1\right)\cos\theta P_n^m\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta}\qquad\text{(II.11α)}$$

$$\frac{dP_n^m\left(\cos\theta\right)}{d\theta}=\frac{n\cos\theta P_n^m\left(\cos\theta\right)-\left(n+m\right)P_{n-1}^m\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta}\qquad\text{(II.11β)}$$

$$\frac{dP_n^m\left(\cos\theta\right)}{d\theta}=P_n^{m+1}\left(\cos\theta\right)+m\cot\theta P_n^m\left(\cos\theta\right)\qquad\text{(II.11γ)}$$

$$\frac{dP_n^m\left(\cos\theta\right)}{d\theta}=-\left(n-m+1\right)\left(n+m\right)P_n^{m-1}\left(\cos\theta\right)-m\cot\theta P_n^m\left(\cos\theta\right)\qquad\text{(II.11δ)}$$

Πέρα όμως από τις ιδιότητες αυτές, οι προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους καθώς και τα πολυώνυμα Legendre ικανοποιούν την εξίσωση ορθογωνικότητας:

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(v) P_{n'}^m(v) dv = \int_0^{\pi} P_n^m(\cos\theta) P_{n'}^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nn'} \quad (II.12)$$

Επιπλέον, ισχύει και η ορθογωνικότητα των P_n^m ως προς την τάξη m :

$$\int_0^{\pi} P_n^m(\cos\theta) P_n^{m'}(\cos\theta) \csc\theta d\theta = \frac{(n+m)!}{m(n-m)!} \delta_{mm'} \quad (II.13)$$

Οι ιδιότητες των προσαρτημένων συναρτήσεων Legendre πρώτου είδους και των πολυωνύμων Legendre χρησιμοποιούνται για να αποδειχθούν οι εξισώσεις (2.46β,γ) που συσχετίζονται με την απόδειξη της ορθογώνικοτητας των διανυσματικών σφαιρικών κυματοσυναρτήσεων. Για k=0 η (2.46β) προκύπτει αμέσως από τον ορισμό των πολυωνύμων Legendre. Όταν $k \neq 0$, το ολοκλήρωμα της (2.46β), έχει τη μορφή:

$$\int_0^{\pi} {}^1\Theta_{nl}^{-kk}(\theta) \sin\theta d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\frac{dP_n^{-k}(\cos\theta)}{d\theta} \frac{dP_l^k(\cos\theta)}{d\theta} + k^2 \frac{P_n^{-k}(\cos\theta)}{\sin\theta} \frac{P_l^k(\cos\theta)}{\sin\theta} \right] \sin\theta d\theta \quad (II.14)$$

Στο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της (II.14) πραγματοποιείται αλλαγή μεταβλητών και τίθεται $v = \cos\theta$, οπότε τα όρια ολοκλήρωσης τροποποιούνται και από $[0, \pi]$ γίνονται $[1, -1]$. Επιπλέον, ισχύουν τα εξής

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - v^2} \quad (II.15)$$

$$dv = -\sin\theta d\theta = -\sqrt{1-v^2} d\theta \Rightarrow d\theta = -\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} \quad (II.16)$$

$$\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} = -\sqrt{1-v^2} \frac{dP_n^m(v)}{dv} \quad (II.17)$$

Στη συνεχεία αντικαθίστανται οι (II.15), (II.16), (II.17) στην (II.14). Οι ιδιότητα που εφαρμόζεται είναι αυτή της μετάβασης από συναρτήσεις Legendre αρνητικής τάξης σε συναρτήσεις Legendre θετικής τάξης (II.8). Με βάση αυτά, η (II.14) μετασχηματίζεται στην παρακάτω:

$$\int_0^{\pi} {}^1\Theta_{nl}^{-kk}(\theta)\sin\theta d\theta =$$

$$= -\int_1^{-1}\left[\left(1-v^2\right)\frac{dP_n^{-k}(v)}{dv}\frac{dP_l^k(v)}{dv} + \frac{k^2}{\left(1-v^2\right)}P_n^{-k}(v)P_l^k(v)\right]dv =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[\left(1-v^2\right)\frac{dP_n^{-k}(v)}{dv}\frac{dP_l^k(v)}{dv} + \frac{k^2}{\left(1-v^2\right)}P_n^{-k}(v)P_l^k(v)\right]dv =$$

$$= (-1)^k\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\left[\int_{-1}^{1}\left(1-v^2\right)\frac{dP_n^{k}(v)}{dv}\frac{dP_l^k(v)}{dv}dv + \int_{-1}^{1}\frac{k^2}{\left(1-v^2\right)}P_n^{k}(v)P_l^k(v)dv\right] \tag{II.18}$$

Το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσης αναπτύσσεται με τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, που σε συνδυασμό με την ιδιότητα του μηδενισμού των προσαρτημένων συναρτήσεων Legendre στους πόλους (II.7), τροποποιεί την (II.18) ως εξής:

$$\int_0^{\pi} {}^1\Theta_{nl}^{-kk}(\theta)\sin\theta d\theta =$$

$$= (-1)^k\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\left\{\left[\left(1-v^2\right)\frac{dP_n^{k}(v)}{dv}P_l^k(v)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}P_l^k(v)\frac{d}{dv}\left[\left(1-v^2\right)\frac{dP_n^{k}(v)}{dv}\right]dv + \right.$$

$$\left. + \int_{-1}^{1}\frac{k^2}{\left(1-v^2\right)}P_n^{k}(v)P_l^k(v)dv\right\} =$$

$$=(-1)^k\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\left\{\int_{-1}^{1}\left[2vP_l^k(v)\frac{dP_n^k(v)}{dv}-\left(1-v^2\right)P_l^k(v)\frac{d^2P_n^k(v)}{dv^2}+\frac{k^2}{\left(1-v^2\right)}P_l^k(v)P_n^k(v)\right]dv\right\}=$$

$$=-(-1)^k\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\left\{\int_{-1}^{1}P_l^k(v)\left[\left(1-v^2\right)\frac{d^2P_n^k(v)}{dv^2}-2v\frac{dP_n^k(v)}{dv}-\frac{k^2}{\left(1-v^2\right)}P_n^k(v)\right]dv\right\}$$

(II.19)

Σύμφωνα με την (II.1) όμως, ισχύει ότι

$$\left(1-v^2\right)\frac{d^2P_n^k(v)}{dv^2}-2v\frac{dP_n^k(v)}{dv}-\frac{k^2}{\left(1-v^2\right)}P_n^k(v)=-n(n+1)P_n^k(v) \qquad \text{(II.20)}$$

Ο συνδυασμός των (II.19) και (II.20), με χρήση της ορθογωνικότητας των προσαρτημένων συναρτήσεων Legendre ίδιας τάξης k (II.12), προσδίδει στη (II.19) την τελική της μορφή

$$\int_0^{\pi}{}^{1}\Theta_{nl}^{-kk}(\theta)\sin\theta d\theta=(-1)^k\frac{(n-k)!}{(n+k)!}n(n+1)\int_{-1}^{1}P_l^k(v)P_n^k(v)dv\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_0^{\pi}{}^{1}\Theta_{nl}^{-kk}(\theta)\sin\theta d\theta=2(-1)^k\frac{n(n+1)}{2n+1}\delta_{nl} \qquad \text{(II.21)}$$

Ακολουθεί η απόδειξη της (2.46γ). Με χρήση του γνωστού μετασχηματισμού $v=\cos\theta$ προκύπτουν τα εξής:

$$\int_0^{\pi}{}^{2}\Theta_{nl}^{-kk}(\theta)\sin\theta d\theta=$$

$$=\int_0^{\pi}\left[k\frac{dP_n^{-k}(\cos\theta)}{d\theta}\frac{P_l^k(\cos\theta)}{\sin\theta}+k\frac{P_n^{-k}(\cos\theta)}{\sin\theta}\frac{dP_l^k(\cos\theta)}{d\theta}\right]\sin\theta d\theta=$$

$$=(-1)^k\frac{(n-k)!}{(n+k)!}k\int_{1}^{-1}\left[\frac{dP_n^k(v)}{dv}P_l^k(v)+P_n^k(v)\frac{dP_l^k(v)}{dv}\right]dv=$$

$$=-(-1)^k\frac{(n-k)!}{(n+k)!}k\int_{-1}^{1}\left[\frac{dP_n^k(v)}{dv}P_l^k(v)+P_n^k(v)\frac{dP_l^k(v)}{dv}\right]dv=$$

$$=-(-1)^k\frac{(n-k)!}{(n+k)!}k\int_{-1}^{1}\frac{d}{dv}\left[P_l^k(v)P_n^k(v)\right]dv=$$

$$=-(-1)^k\frac{(n-k)!}{(n+k)!}k\left[P_n^k(\nu)P_l^k(\nu)\right]_{-1}^{1} \tag{II.22}$$

Επειδή όμως οι προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους μηδενίζονται στους πόλους σύμφωνα με την εξίσωση (II.7), μηδενίζεται και το δεξιό μέλος της (II.22), με αποτέλεσμα την απόδειξη της εξίσωσης (2.46γ).

Για συναρτήσεις Legendre αρνητικού ορίσματος ισχύει η σχέση

$$P_n^m(-v)=(-1)^{n+m}P_n^m(v) \tag{II.23}$$

Η απόδειξη της (II.23) βασίζεται στην ιδιότητα (II.6β) καθώς και στην εξίσωση Rodrigues (II.4).

$$P_n^m(v)=(-1)^m\left(1-v^2\right)^{m/2}\frac{d^m}{dv^m}P_n(v)\Rightarrow P_n^m(-v)=(-1)^m\left(1-v^2\right)^{m/2}\frac{d^m}{d(-v)^m}P_n(-v)\Rightarrow$$

$$\xrightarrow{(II.4)}P_n^m(-v)=(-1)^m\left(1-v^2\right)^{m/2}\frac{d^m}{d(-v)^m}\left[\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n\left(v^2-1\right)^n}{d(-v)^n}\right]\xrightarrow{(II.4)}$$

$$\xrightarrow{(II.4)}P_n^m(-v)=(-1)^m(-1)^n(-1)^m\left(1-v^2\right)^{m/2}\frac{d^mP_n(v)}{dv^m}\xrightarrow{(II.6\beta)}$$

$$\xrightarrow{(II.6\beta)}P_n^m(-v)=(-1)^{n+m}P_n^m(v)$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ III

ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ BESSEL ΚΑΙ HANKEL

Είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης Bessel :

$$\left[z^2\frac{d^2}{dz^2}+2z\frac{d}{dz}+\left[z^2-n\left(n+1\right)\right]\right]z_n^{(i)}\left(z\right)=0 \qquad \text{(III.1)}$$

Με $z_n^{(i)}(z)$ συμβολίζονται οι σφαιρικές συναρτήσεις

Bessel 1ου είδους $z_n^{(1)}(z)=j_n(z)$

Bessel 2ου είδους $z_n^{(2)}(z)=y_n(z)$

Hankel 1ου είδους $z_n^{(3)}(z)=h_n^{(1)}(z)=j_n(z)+jy_n(z)$

Hankel 2ου είδους $z_n^{(4)}(z)=h_n^{(2)}(z)=j_n(z)-jy_n(z)$

Το όρισμα $z=x+jy$ μπορεί να είναι γενικά μιγαδικός αριθμός και η τάξη n είναι οποιοσδήποτε ακέραιος. Οι συναρτήσεις $j_n(z)$, $y_n(z)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (III.1) για κάθε τάξη n. Το ίδιο ισχύει και για τις σφαιρικές συναρτήσεις Hankel $h_n^{(1)}(z)$, $h_n^{(2)}(z)$.

Οι σφαιρικές συναρτήσεις $j_n(z)$, $y_n(z), h_n^{(1)}(z)$, $h_n^{(2)}(z)$ συνδέονται με τις αντίστοιχες κυλινδρικές συναρτήσεις ως εξής :

$$z_n^{(i)}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} Z_{n+1/2}^{(i)}(z) \tag{III.2}$$

Από τις τέσσερις σφαιρικές συναρτήσεις $j_n(z)$, $y_n(z), h_n^{(1)}(z)$, $h_n^{(2)}(z)$ μόνον η $j_n(z)$ είναι φραγμένη στο όριο $z \to 0$.

Το ενδιαφέρον, σε ότι αφορά προβλήματα ακτινοβολίας, επικεντρώνεται στη μορφή των σφαιρικών συντεταγμένων για μεγάλα ορίσματα :

$$j_n(z) \xrightarrow{|z|>>1} \frac{1}{z}\cos\left(z-(n+1)\pi/2\right) \qquad \left|\arg\{z\}\right| < \pi \tag{III.3α}$$

$$y_n(z) \xrightarrow{|z|>>1} \frac{1}{z}\sin\left(z-(n+1)\pi/2\right) \qquad \left|\arg\{z\}\right| < \pi \tag{III.3β}$$

$$h_n^{(1)}(z) \xrightarrow{|z|>>1} (-j)^{n+1}\frac{e^{jz}}{z} \tag{III.3γ}$$

$$h_n^{(2)}(z) \xrightarrow{|z|>>1} j^{n+1}\frac{e^{-jz}}{z} \tag{III.3δ}$$

Και οι τέσσερις σφαιρικές συναρτήσεις φθίνουν όπως ο παράγοντας $1/z$. Οι μεν συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους μοιάζουν με τριγωνομετρικές συναρτήσεις, ενώ οι σφαιρικές συναρτήσεις Hankel πρώτου και δεύτερου είδους εμφανίζουν το χαρακτηριστικό για ακτινοβολούμενες κυματομορφές εκθετικό παράγοντα $e^{\pm jz}$.

Για τις δυο σφαιρικές συναρτήσεις Bessel δίνονται οι παρακάτω χρήσιμοι ορισμοί

$$j_n(z) = \frac{z^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}\left[1-\frac{z^2/2}{1!(2n+3)}+\frac{\left(z^2/2\right)^2}{2!(2n+3)(2n+5)}-\ldots\right]=$$

$$= z^n \left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz} \right)^n \frac{\sin z}{z} = \frac{z^n}{2^{n+1} n!} \int_0^\pi \cos(z\cos\gamma)(\sin\gamma)^{2n+1} d\gamma =$$

$$= \frac{1}{2}(-j)^n \int_0^\pi e^{jz\cos\gamma} P_n(\cos\gamma)\sin\gamma d\gamma \qquad n \in Z_0^+ \tag{III.4α}$$

$$y_n(z) = -\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}{z^{n+1}} \left[1 - \frac{z^2/2}{1!(1-2n)} + \frac{(z^2/2)^2}{2!(1-2n)(3-2n)} - \ldots \right] =$$

$$= -z^n \left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz} \right)^n \frac{\cos z}{z} \qquad n \in Z_0^+ \tag{III.4β}$$

Οι κυριότερες ιδιότητες των τεσσάρων σφαιρικών συναρτήσεων Bessel και Hankel είναι οι εξής :

$$y_n(z) = (-1)^{n+1} j_{-n-1}(z) \tag{III.5}$$

$$h_{-n-1}^{(1)}(z) = j(-1)^n h_n^{(1)}(z) \qquad n \in Z_0^+ \tag{III.6}$$

$$h_{-n-1}^{(2)}(z) = j(-1)^{n+1} h_n^{(2)}(z) \qquad n \in Z_0^+ \tag{III.7}$$

$$j_n(-z) = (-1)^n j_n(z) \qquad n \in Z_0^+ \tag{III.8}$$

$$y_n(-z) = (-1)^{n+1} y_n(z) \qquad n \in Z_0^+ \tag{III.9}$$

$$h_n^{(1)}(-z) = (-1)^n h_n^{(2)}(z) \qquad n \in Z_0^+ \tag{III.10}$$

$$h_n^{(2)}(-z) = (-1)^n h_n^{(1)}(z) \qquad n \in Z_0^+ \tag{III.11}$$

$$W\left\{j_n(z), y_n(z)\right\} = j_{n+1}(z)\, y_n(z) - j_n(z)\, y_{n+1}(z) = \frac{1}{z^2} \tag{III.12}$$

$$j_{n+1}(z)\, y_{n-1}(z) - j_{n-1}(z)\, y_{n+1}(z) = \frac{2n+1}{z^3} \tag{III.13}$$

$$W\left\{h_n^{(1)}(z), h_n^{(2)}(z)\right\} = h_{n+1}^{(1)}(z)\, h_n^{(2)}(z) - h_n^{(1)}(z)\, h_{n+1}^{(2)}(z) = \frac{2}{jz^2} \qquad n \in Z_0^+ \tag{III.14}$$

$$z_{n-1}^{(i)}(z) + z_{n+1}^{(i)}(z) = \frac{2n+1}{z} z_n^{(i)}(z) \tag{III.15}$$

$$n z_{n-1}^{(i)}(z) - (n+1) z_{n+1}^{(i)}(z) = (2n+1)\left[z_n^{(i)}(z)\right]' \tag{III.16}$$

$$\left[z_n^{(i)}(z)\right]' = z_{n-1}^{(i)}(z) - \frac{n+1}{z} z_n^{(i)}(z) \tag{III.17}$$

$$\left[z_n^{(i)}(z)\right]' = -z_{n+1}^{(i)}(z) + \frac{n}{z} z_n^{(i)}(z) \tag{III.18}$$

$$\int_0^\infty j_n(k_1 r)\, j_n(k_2 r)\, r^2 dr = \frac{\pi}{2k_1 k_2} \delta(k_1 - k_2) \tag{III.19}$$

Equation Chapter 4 Section 4

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ IV

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Το παράρτημα αυτό γράφηκε με σκοπό να παρουσιαστούν οι αποδείξεις των μαθηματικών σχέσεων και των θεωρημάτων που χρησιμοποιούνται στο κύριο σκέλος της μαθηματικής ανάλυσης.

IV.1. Επίλυση της εξίσωσης Helmholtz

Στην ενότητα αυτή θα αποδειχθεί η σχέση $\nabla\pi_m \cdot \nabla\vec{r} = \nabla\pi_m$

$$\nabla\pi_m \cdot \nabla\vec{r} = \left(\frac{\partial\pi_m}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\pi_m}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\pi_m}{\partial z}\hat{z}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)\vec{r} =$$

$$= \left(\frac{\partial\pi_m}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\pi_m}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial\pi_m}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{r} = \frac{\partial\pi_m}{\partial x}\frac{\partial\vec{r}}{\partial x} + \frac{\partial\pi_m}{\partial y}\frac{\partial\vec{r}}{\partial y} + \frac{\partial\pi_m}{\partial z}\frac{\partial\vec{r}}{\partial z} =$$

$$\frac{\partial\pi_m}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\pi_m}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\pi_m}{\partial z}\hat{z} = \nabla\pi_m \qquad \text{(IV.1)}$$

Η (IV.1) αποδεικνύει το ζητούμενο και η χρήση της οδηγεί στη βαθμωτή εξίσωση Helmholtz.

IV.2. Διανυσματικές σφαιρικές κυματοσυναρτήσεις

Στην ενότητα αυτή θα αποδειχθούν οι σχέσεις

$$\vec{M}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)=\vec{L}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)\times\vec{r} \tag{IV.2}$$

$$\vec{M}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)=\frac{1}{k}\nabla\times\vec{N}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right) \tag{IV.3}$$

Για τη (IV.2) γίνεται χρήση των διανυσματικών ταυτοτήτων $\nabla\times\vec{r}=0$, και $\nabla\times\left(\Phi\vec{A}\right)=\nabla\Phi\times\vec{A}+\Phi\nabla\times\vec{A}$.

$$\vec{L}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)\times\vec{r}=\nabla f_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)\times\vec{r}=-f_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)\nabla\times\vec{r}+\nabla\times\left[\vec{r}f_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\vec{L}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)\times\vec{r}=\nabla\times\left[\vec{r}f_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)\right]\Rightarrow\vec{L}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)\times\vec{r}=\vec{M}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right) \tag{IV.4}$$

Η (IV.3) με παράλληλη ανάπτυξη και των δυο μελών της και με χρήση της διανυσματικής ταυτότητας $\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\nabla\nabla\cdot\vec{A}-\nabla^2\vec{A}$ καθώς και των εξισώσεων ορισμού (2.19) και (2.20) γράφεται:

$$\vec{M}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)=\frac{1}{k}\nabla\times\vec{N}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)\Leftrightarrow\nabla\times\left[\vec{r}f_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)\right]=\frac{1}{k^2}\nabla\times\nabla\times\nabla\times\left[\vec{r}f_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2\vec{M}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)-\nabla\times\nabla\times\vec{M}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2\vec{M}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)-\nabla\nabla\cdot\vec{M}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)+\nabla^2\vec{M}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\left(\nabla^2+k^2\right)\vec{M}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)-\nabla\nabla\cdot\vec{M}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}\right)=0 \tag{IV.5}$$

Στο κεφάλαιο 2 αποδεικνύεται ότι η κυματοσυνάρτηση $\vec{M}_{mn}^{(i)}(k\vec{r})$ είναι σωληνοειδής, δηλαδή $\nabla \cdot \vec{M}_{mn}^{(i)}(k\vec{r}) = 0$ οπότε η (IV.5) μετασχηματίζεται στη διανυσματική ομογενή εξίσωση Helmholz.

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\vec{M}_{mn}^{(i)}(k\vec{r}) = 0 \tag{IV.6}$$

που ισχύει (ως γνωστόν, οι διανυσματικές σφαιρικές κυματοσυναρτήσεις είναι λύσεις της ομογενούς διανυσματικής εξίσωσης Helmholtz), άρα ισχύει και η σχέση εκκίνησης.

IV.3. Επίλυση της μη ομογενούς βαθμωτής εξίσωσης κύματος

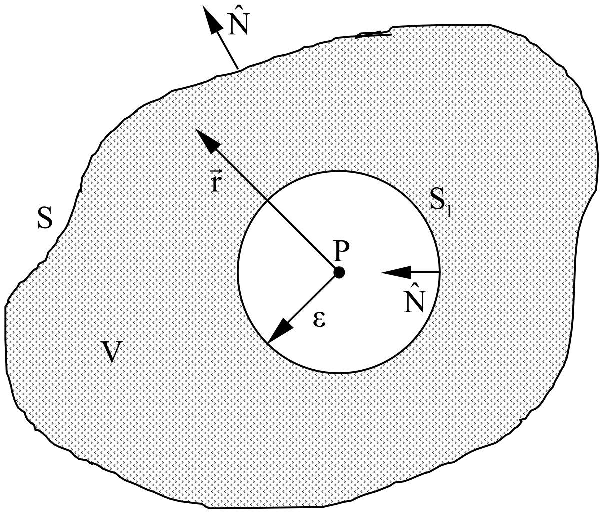
Η λύση $\phi(P,t)$ της μη ομογενούς βαθμωτής διαφορικής εξίσωσης κύματος

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = F(\vec{r}) \tag{IV.7}$$

σε αυθαίρετο σημείο P χώρου V που περικλείεται από επιφάνεια S (Σχήμα IV.1), θα προσδιοριστεί εδώ με τη μέθοδο της ολοκλήρωσης Kirchhoff που εκκινεί από το δεύτερο βαθμωτό θεώρημα Green

$$\int_V \left(\psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi\right)dv = \oiint_{S+S_1} \left(\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi\right)\cdot \hat{N}ds \tag{IV.8}$$

S_1 είναι η επιφάνεια της σφαίρας με ακτίνα ε και κέντρο το σημείο $P \in V$, ενώ το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{N}$ είναι κάθετο στην επιφάνεια S (ή S_1) και κατευθύνεται προς το εξωτερικό του χώρου V.



Σχήμα IV.1. Γεωμετρία ολοκλήρωσης Kirchhoff

Η ψ είναι βαθμωτή συνάρτηση που επιλύει την ομογενή εξίσωση κύματος

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi = 0 \tag{IV.9}$$

και συνεπώς έχει γενικά τη μορφή

$$\psi = \frac{f\left(r + ct\right)}{r} \tag{IV.10}$$

όπου $f\left(\cdot\right)$ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση. Οι εξισώσεις (IV.7) και (IV.9) υποδεικνύουν ότι

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + F\left(\vec{r}\right) \tag{IV.11}$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{IV.12}$$

Με αντικατάσταση των (IV.11) και (IV.12) στην (IV.8) προκύπτουν τα εξής

$$\int_V \left(\psi\nabla^2\phi-\phi\nabla^2\psi\right)dv=\oiint_{S+S_1}\left(\psi\nabla\phi-\phi\nabla\psi\right)\cdot\hat{N}ds\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_V\left[\psi\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+F(\vec{r})\right)-\phi\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right]dv=\oiint_{S+S_1}\left(\psi\nabla\phi-\phi\nabla\psi\right)\cdot\hat{N}ds\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{c^2}\int_V\left(\psi\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\phi\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)dv+\int_V\psi F(\vec{r})dv=\oiint_{S+S_1}\left(\psi\nabla\phi-\phi\nabla\psi\right)\cdot\hat{N}ds \qquad (IV.13)$$

Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι

$$\psi\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\phi\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi\frac{\partial\phi}{\partial t}-\phi\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) \qquad (IV.14)$$

Η (IV.13) ισχύει για κάθε τιμή της παραμέτρου t. Επομένως ισχύει και σαν ολοκλήρωμα στο διάστημα $\left[t_1,t_2\right]$. Με βάση τον παραπάνω συλλογισμό, αλλά και με χρήση των εξισώσεων (IV.10) και (IV.14), η (IV.13) μετασχηματίζεται στην παρακάτω

$$\frac{1}{c^2}\int_V\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi\frac{\partial\phi}{\partial t}-\phi\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)dtdv+\int_V\int_{t_1}^{t_2}\psi F(\vec{r})dtdv=\oiint_{S+S_1}\int_{t_1}^{t_2}\left(\psi\nabla\phi-\phi\nabla\psi\right)\cdot\hat{N}dtds\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{c^2}\int_V\left[\psi\frac{\partial\phi}{\partial t}-\phi\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]_{t_1}^{t_2}dv+\int_V\int_{t_1}^{t_2}\psi F(\vec{r})dtdv=\oiint_{S+S_1}\int_{t_1}^{t_2}\left(\psi\nabla\phi-\phi\nabla\psi\right)\cdot\hat{N}dtds\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{c^2}\int_V\left[\frac{f(r+ct)}{r}\frac{\partial\phi}{\partial t}-\phi\frac{\partial}{\partial t}\frac{f(r+ct)}{r}\right]_{t_1}^{t_2}dv+\int_V\int_{t_1}^{t_2}\frac{f(r+ct)}{r}F(\vec{r})dtdv=$$

$$=\oiint_{S+S_1}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{f(r+ct)}{r}\nabla\phi-\phi\nabla\frac{f(r+ct)}{r}\right)\cdot\hat{N}dtds\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2}\int_V \left[\frac{f(r+ct)}{r}\frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi c\frac{f'(r+ct)}{r}\right]_{t_1}^{t_2} dv + \int_V\int_{t_1}^{t_2} \frac{f(r+ct)}{r}F(\vec{r})dtdv =$$

$$= \oiint_{S+S_1}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{f(r+ct)}{r}\nabla\phi - \phi\frac{rf'(r+ct)-f(r+ct)}{r^2}\hat{r}\right)\cdot\hat{N}dtds \qquad \text{(IV.15)}$$

Για την επεξεργασία της (IV.15) είναι απαραίτητο να επιβληθούν οι παρακάτω περιορισμοί στην αυθαίρετη συνάρτηση $f(\cdot)$:

$$f(x)=0 \quad ; \quad |x|>\delta \qquad \text{(IV.16)}$$

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx = 1 \qquad \text{(IV.17)}$$

όπου δ είναι κάποια αυθαίρετη θετική ποσότητα. Είναι φανερό ότι $f'(x)=0$ για $|x|>\delta$. Επιπλέον, γίνεται δεκτό ότι οι οριακές τιμές t_1, t_2 έχουν επιλέγει έτσι ώστε $t_1<0<t_2$ και μάλιστα $|r+ct_1|>\delta$, $|r+ct_2|>\delta$ για κάθε $\vec{r}\in V$. Με τις προϋποθέσεις αυτές ισχύουν τα παρακάτω:

$$\left[\frac{f(r+ct)}{r}\frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi c\frac{f'(r+ct)}{r}\right]_{t_1}^{t_2} = 0 \qquad \text{(IV.18)}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{f(r+ct)}{r}F(\vec{r})dt = \frac{1}{c}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{f(x)}{r}F(\vec{r})dx \qquad \text{(IV.19)}$$

Η (IV.18) προκύπτει λόγω του περιορισμού που επιβάλλει η (IV.16), αλλά και λόγω της διαπίστωσης ότι $f'(x)=0$ για $|x|>\delta$. Η (IV.19) προκύπτει με αλλαγή της μεταβλητής ολοκλήρωσης από $r+ct$ σε x, αλλά και των περιορισμών $|r+ct_1|>\delta$, $|r+ct_2|>\delta$, οπότε

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{f(r+ct)}{r} F(\vec{r})\,dt = \frac{1}{c}\int_{r+ct_1}^{r+ct_2} \frac{f(x)}{r} F(\vec{r})\,dx =$$

$$= \frac{1}{c}\int_{r+ct_1}^{-\delta} \frac{f(x)}{r} F(\vec{r})\,dx + \frac{1}{c}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x)}{r} F(\vec{r})\,dx + \frac{1}{c}\int_{\delta}^{r+ct_2} \frac{f(x)}{r} F(\vec{r})\,dx = \frac{1}{c}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x)}{r} F(\vec{r})\,dx \qquad \text{(IV.20)}$$

Αν η ποσότητα δ θεωρηθεί πολύ μικρή, τότε ισχύει προσέγγιση

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{f(r+ct)}{r} F(\vec{r})\,dt \approx \frac{1}{c}\left[\frac{F(\vec{r})}{r}\right]_{x=0} \int_{-\delta}^{\delta} f(x)\,dx = \frac{1}{c}\left[\frac{F(\vec{r})}{r}\right]_{t=-r/c} \qquad \text{(IV.21)}$$

Σε ότι αφορά στο δεξί μέλος της (IV.15), το ολοκλήρωμα πάνω στη σφαιρική επιφάνεια S_1 (που είναι σφαιρική και έχει ακτίνα ε) γράφεται σαν άθροισμα δυο όρων

$$\oiint_{S_1}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{f(\varepsilon+ct)}{\varepsilon}\nabla\phi + \phi\frac{f'(\varepsilon+ct)}{\varepsilon}\hat{N}\right)\cdot\hat{N}\,dt\,ds - \oiint_{S_1}\int_{t_1}^{t_2}\phi\frac{f(\varepsilon+ct)}{\varepsilon^2}\hat{N}\cdot\hat{N}\,dt\,ds \qquad \text{(IV.22)}$$

με $\hat{r} = -\hat{N}$ επειδή τα διανύσματα είναι παράλληλα και έχουν πάντα αντίθετη φορά στην S_1. Αν $\varepsilon \to 0$, ο πρώτος όρος τείνει στο μηδέν επειδή οι συναρτήσεις f, f', ϕ, $\nabla\phi$ είναι φραγμένες για δεδομένο δ και επειδή το διαφορικό ds είναι $O(\varepsilon^2)$. Για το δεύτερο όρο ισχύει

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{t_1}^{t_2}\left(\oiint_{S_1}\phi\frac{f(\varepsilon+ct)}{\varepsilon^2}\hat{N}\cdot\hat{N}\,ds\right)dt\right\} \approx 4\pi\int_{t_1}^{t_2}\phi(P,t)\,f(ct)\,dt =$$

$$= \frac{4\pi}{c}\phi(P,t=0)\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\,dx = \frac{4\pi}{c}\phi(P,t=0) \qquad \text{(IV.23)}$$

Για το ολοκλήρωμα πάνω στην επιφάνεια S υπολογίζεται με ολοκλήρωση κατά παράγοντες οπότε προκύπτει

$$\oiint_S \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{f(r+ct)}{r} \nabla\phi - \phi \frac{rf'(r+ct) - f(r+ct)}{r^2} \hat{r} \right) \cdot \hat{N} dt ds \approx$$

$$\approx \frac{1}{c} \oiint_S \left[\frac{\nabla\phi}{r} - \phi\nabla\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{rc}\frac{\partial\phi}{\partial t}\nabla r \right]_{t=-r/c} \cdot \hat{N} ds \qquad \text{(IV.24)}$$

Στη συνέχεια γίνεται δεκτό ότι η επιφάνεια S διαστέλλεται προς την άπειρη σφαίρα και ακόμη ότι οι συναρτήσεις ϕ, $\nabla\phi$, $\partial\phi/\partial t$ που υπολογίζονται για $t=-r/c$, είναι μηδέν μέχρι κάποιο συγκεκριμένο χρόνο T. Καθώς η ακτινική απόσταση r αυξάνει, η ποσότητα $t=-r/c$ παραμένει αρνητική και επομένως είναι πάντα μικρότερη του χρόνου T. Συνεπώς, η συμβολή του επιφανειακού ολοκληρώματος της (IV.24) είναι μηδέν. Αντικαθιστώντας τα παραπάνω αποτελέσματα στην (IV.15) προκύπτει τελικά η λύση της μη ομογενούς βαθμωτής εξίσωσης κύματος

$$\frac{1}{c}\int_V \left[\frac{F(\vec{r})}{r}\right]_{t=-r/c} dV = -\frac{4\pi}{c}\phi(P,t=0) \Rightarrow \phi(P,t=0) = -\frac{1}{4\pi}\int_V \left[\frac{F(\vec{r})}{r}\right]_{t=-r/c} dv \qquad \text{(IV.25)}$$

και γενικότερα

$$\phi(P,t) = -\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{F(\vec{r}, t-r/c)}{r} dv \qquad \text{(IV.26)}$$

Η (IV.26) καθορίζει ότι η δράση $d\phi(P,t)$ της στοιχειώδους πηγής Φdv σε απόσταση r από αυτήν εξαρτάται από την απόσταση της πηγής σε χρονική στιγμή προηγούμενη κατά r/c. Είναι φανερό ότι r/c είναι η χρονική διάρκεια για τη διάδοση της διαταραχής σε απόσταση r από την πηγή, όταν η ταχύτητα διάδοσης είναι c. Από τα παραπάνω δικαιολογείται ο χαρακτηρισμός *καθυστερημένα δυναμικά* για τη λύση της μη ομογενούς εξίσωσης κύματος.

IV.4. Συνάρτηση Green

Η ανάλυση που προηγήθηκε για την επίλυση της μη ομογενούς εξίσωσης κύματος στη γενική περίπτωση χρονικά μεταβαλλόμενης συνάρτησης, συγκεκριμενοποιείται εδώ στην περίπτωση που η πηγή ταλαντώνεται αρμονικά, δηλαδή $F(\vec{r},t)=F(\vec{r})e^{-j\omega t}$. Ως γνωστόν, τότε η (IV.7) μετατρέπεται στη μη ομογενή βαθμωτή εξίσωση Helmholtz

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi(P,t)=F(\vec{r})e^{-j\omega t} \qquad \text{(IV.27)}$$

και σύμφωνα με την (IV.26) η λύση της είναι

$$\phi(P,t)=-\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{F(\vec{r},t-r/c)}{r}dv=-\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{F(\vec{r})}{r}e^{-j\omega(t-r/c)}dv=-\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{F(\vec{r})}{r}e^{-j\omega t}e^{jr(\omega/c)}dv\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\phi(P,t)=-\frac{e^{-j\omega t}}{4\pi}\int_V \frac{e^{jkr}}{r}F(\vec{r})dv \qquad \text{(IV.28)}$$

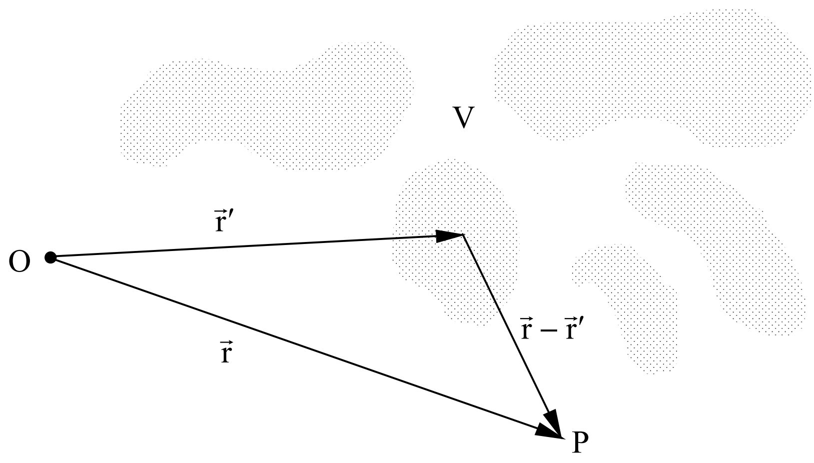
δηλαδή της μορφής $\phi(P,t)=\phi(P)e^{-j\omega t}$. Η (IV.28) δείχνει ότι η αρμονική ταλάντωση της πηγής επιβάλλεται σε όλο το πεδίο, συνεπώς ο παράγοντας $e^{-j\omega t}$ είναι δυνατό να παραλειφθεί. Υπό τις παραπάνω προϋποθέσεις η μη ομογενής εξίσωση κύματος μετατρέπεται στη μη ομογενή, βαθμωτή εξίσωση Helmholtz

$$\left(\nabla^2+k^2\right)\phi(P)=F(\vec{r}) \qquad \text{(IV.29)}$$

Η λύση της (IV.29) προέρχεται απευθείας από την έκφραση (IV.28):

$$\phi(P)=-\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{e^{jkr}}{r}F(\vec{r})dv \qquad \text{(IV.30)}$$

Το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της (IV.30) εκτείνεται ουσιαστικά οπουδήποτε είναι μη μηδενική η συνάρτηση $F(\vec{r})$, δηλαδή όπου υπάρχουν πήγες. Το πεδιακό μέγεθος $\phi(P)$ εκπροσωπεί τη συνολική δράση (ακτινοβολία) των πηγών.



Σχήμα IV.2 Η συνολική ακτινοβολία προς το σημείο P, που έχει διάνυσμα θέσης $\vec{r}$, προκύπτει με υπέρθεση της επιμέρους ακτινοβολίας από κάθε σημειακή πηγή. Οι σημειακές πήγες θεωρούνται στις θέσεις $\vec{r}' \in V$ και V είναι ο χώρος που καταλαμβάνεται από αυτές. Ο χώρος των πηγών μπορεί να είναι μη συνεχής.

Αν υπάρχει μια μόνο σημειακή πηγή στη θέση $\vec{r}_0$ (σχήμα IV.1), η συνάρτηση $F(\vec{r})$ μπορεί να είναι της μορφής $F(\vec{r}) = -\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$, οπότε οι (IV.29) και (IV.30) αποκτούν την παρακάτω μορφή

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\phi(P) = -\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right) \tag{IV.31}$$

$$\phi(P) = -\frac{e^{jkr_0}}{4\pi r_0} \tag{IV.32}$$

Η έκφραση (IV.32) για την ακτινοβολία της εν λόγω σημειακής πηγής προς τη θέση P είναι γνωστή ως *συνάρτηση Green*. Το αποτέλεσμα αυτό γράφεται συνήθως με τη γενικότερη μορφή:

$$G\left(\vec{r};\vec{r}_0\right)=\frac{e^{jk\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|}}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|} \tag{IV.33}$$

θεωρώντας ότι η σημειακή πηγή είναι στη θέση $\vec{r}_0$ και η ακτινοβολία της, που συμβολίζεται με $G\left(\vec{r};\vec{r}_0\right)$, προσδιορίζεται στη θέση $\vec{r}$. Η (IV.33) ορίζει τη συνάρτηση Green απεριόριστου ομογενούς χώρου. Οι ηλεκτρικές ιδιότητες του χώρου ενσωματώνονται στον κυματικό αριθμό $k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$, που επιπλέον, φέρει και την πληροφορία για τη συχνότητα ταλάντωσης της πηγής.

Η συνάρτηση Green υπεισέρχεται και στον προσδιορισμό της ακτινοβολίας από κατανομή σημειακών πηγών, που εκπροσωπούνται από κάποια συνάρτηση $F\left(\vec{r}\right)$. Αν V είναι ο χώρος που καταλαμβάνουν οι πήγες, δηλαδή $F\left(\vec{r}\right)\neq 0$ για $\vec{r}\in V$, τότε από την (IV.30) προσδιορίζεται η συνολική ακτινοβολία τους στην αυθαίρετη θέση $\vec{r}$ ως εξής:

$$\phi\left(P\right)=-\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{e^{jk\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}F\left(\vec{r}'\right)d^3\vec{r}' \tag{IV.34}$$

Η (IV.34) δείχνει ότι $\phi\left(P\right)=-\left(F*G\right)\left(\vec{r}\right)$ (ο αστερίσκος σημαίνει συνέλιξη), δηλαδή ότι η συνάρτηση Green της (IV.33) είναι ουσιαστικά ότι η κρουστική απόκριση του ομογενούς, απεριόριστου χώρου, που όταν διεγερθεί από την κατανομή πηγών $F\left(\vec{r}\right)$, φιλοξενεί την ακτινοβολία τους $\phi\left(P\right)$.

Με βάση την ανάλυση που προηγήθηκε στις παραγράφους (IV.2) και (IV.3) είναι πλέον εύκολο να διατυπωθεί η λύση των (2.111) και (2.112) που αναδιατυπώνονται εδώ για λόγους ευκολίας

$$\left(\nabla^2+k^2\right)\vec{r}\cdot\vec{E}'=-\frac{j}{\omega\varepsilon}\vec{r}\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{J} \tag{IV.35}$$

$$\left(\nabla^2+k^2\right)\vec{r}\cdot\vec{H}'=\nabla\cdot\left(\vec{r}\times\vec{J}\right) \tag{IV.36}$$

Η (IV.35) ταυτίζεται με την (IV.29) αν

$$\phi\left(P\right)=\vec{r}\cdot\vec{E}' \tag{IV.37}$$

$$F\left(\vec{r}\right)=-\frac{j}{\omega\varepsilon}\vec{r}\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{J} \tag{IV.38}$$

και η λύση της θα είναι:

$$\vec{r}\cdot\vec{E}'=\frac{j}{\omega\varepsilon}\int_{V'}\frac{e^{jk\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\vec{r}'\cdot\nabla'\times\nabla'\times\vec{J}\left(\vec{r}'\right)dv' \tag{IV.39}$$

Επιπλέον, η (IV.36) ταυτίζεται με την (IV.29) αν

$$\phi\left(P\right)=\vec{r}\cdot\vec{H}' \tag{IV.40}$$

$$F\left(\vec{r}\right)=\nabla\cdot\left(\vec{r}\times\vec{J}\right) \tag{IV.41}$$

και συνεπώς η λύση της θα είναι

$$\vec{r}\cdot\vec{H}'=-\int_{V'}\frac{e^{jk\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\nabla'\cdot\left[\vec{r}'\times\vec{J}\left(\vec{r}'\right)\right]dv' \tag{IV.42}$$

Οι (IV.39) και (IV.42) ταυτίζονται με τις (2.113) και (2.114).

IV.5. Προσδιορισμός των κυματικών συντελεστών

IV.5.A. Διέγερση από επίπεδο κύμα

Η ηλεκτρική πεδιακή ένταση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας, μπορεί να γραφεί σε κλειστή μορφή με βάση τη θεωρία που αναπτύσσεται στην παράγραφο 2.6, σύμφωνα με την οποία είναι

$$\vec{E}^{\iota}_{inc}\left(\vec{r}\right)=\hat{e}_{\iota}e^{j\vec{k}_{inc}\cdot\vec{r}} \tag{IV.43}$$

Το διάνυσμα $\hat{e}_{\iota}$ με ι=1 ή 2, εκπροσωπεί την πόλωση του προσπίπτοντος κύματος, που μπορεί να είναι *κάθετη (οριζόντια)* ή *παράλληλη (κατακόρυφη)* ως προς το καρτεσιανό επίπεδο xOz $\left(y=0,\phi=0\right)$. Το διάνυσμα $\vec{k}_{inc}$ είναι το κυματικό διάνυσμα του προσπίπτοντος κύματος που στο συγκεκριμένο επίπεδο, αναπτύσσεται στο σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων ως εξής:

$$\vec{k}_{inc}=k_0\left(\hat{x}\sin\theta_{inc}+\hat{z}\cos\theta_{inc}\right)\Rightarrow\vec{k}_{inc}=k_0\hat{i} \tag{IV.44}$$

Και το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{k}_{inc}\cdot\vec{r}$ είναι

$$\vec{k}_{inc}\cdot\vec{r}=k_0r\hat{i}\cdot\hat{r}=k_0r\left(\hat{x}\sin\theta_{inc}+\hat{z}\cos\theta_{inc}\right)\cdot\left(\hat{x}\sin\theta\cos\phi+\hat{y}\sin\theta\sin\phi+\hat{z}\cos\theta\right)=$$

$$\Rightarrow\vec{k}_{inc}\cdot\vec{r}=k_0r\left(\sin\theta_{inc}\sin\theta\cos\phi+\cos\theta_{inc}\cos\theta\right) \tag{IV.45}$$

Οπότε η ηλεκτρική πεδιακή ένταση σε κλειστή μορφή γράφεται:

$$\vec{E}^{\iota}_{inc}\left(\vec{r}\right)=\hat{e}_{\iota}e^{jk_0r\left(\sin\theta_{inc}\sin\theta\cos\phi+\cos\theta_{inc}\cos\theta\right)} \tag{IV.46}$$

ενώ παράλληλα, μπορεί να αναπτυχθεί και σαν γραμμικός συνδυασμός διανυσματικών σφαιρικών κυματοσυναρτήσεων κατά τα γνωστά:

$$\vec{E}_{inc}^{\iota}(\vec{r})=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[C_{1,mn}\vec{M}_{mn}^{(1)}(k_0\vec{r})+C_{2,mn}\vec{N}_{mn}^{(1)}(k_0\vec{r})\right] \tag{IV.47}$$

Το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσματικών σφαιρικών κυματοσυναρτήσεων που εκφράζονται στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων, ορίζεται ως γνωστόν

$$(\vec{x},\vec{y})=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\vec{x}\cdot\vec{y}r^2\sin\theta drd\theta d\phi \tag{IV.48}$$

όπου με $\vec{x}$, $\vec{y}$ υπονοείται οποιαδήποτε από τις $\vec{M}_{mn}^{(1)}(k_0\vec{r})$, $\vec{N}_{mn}^{(1)}(k_0\vec{r})$, $\vec{L}_{mn}^{(1)}(k_0\vec{r})$.

Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά με τη διανυσματική σφαιρική κυματοσυνάρτηση $\vec{M}_{kl}^{(1)}(k_0\vec{r})$ τα δυο μέλη της (IV.48), προκύπτουν τα εξής

$$\left(\vec{E}_{inc}^{\iota}(\vec{r}),\vec{M}_{kl}^{(1)}(k_0\vec{r})\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[C_{1,mn}\vec{M}_{mn}^{(1)}(k_0\vec{r})+C_{2,mn}\vec{N}_{mn}^{(1)}(k_0\vec{r})\right],\vec{M}_{kl}^{(1)}(k_0\vec{r})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\vec{E}_{inc}^{\iota}(\vec{r}),\vec{M}_{kl}^{(1)}(k_0\vec{r})\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}C_{1,mn}\left(\vec{M}_{mn}^{(1)}(k_0\vec{r}),\vec{M}_{kl}^{(1)}(k_0\vec{r})\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}C_{2,mn}\left(\vec{N}_{mn}^{(1)}(k_0\vec{r}),\vec{M}_{kl}^{(1)}(k_0\vec{r})\right) \tag{IV.49}$$

Η χρήση των εξισώσεων ορθογωνικότητας των διανυσματικών σφαιρικών κυματοσυναρτήσεων στη (IV.49) μηδενίζει το δεύτερο διπλό άθροισμα και την τροποποιεί ως εξής:

$$\left(\vec{E}_{inc}^{\iota}(\vec{r}),\vec{M}_{kl}^{(1)}(k_0\vec{r})\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}C_{1,mn}\left(\vec{M}_{mn}^{(1)}(k_0\vec{r}),\vec{M}_{kl}^{(1)}(k_0\vec{r})\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\vec{E}_{inc}^{\iota}(\vec{r})\cdot\vec{M}_{kl}^{(1)}(k_0\vec{r})r^2\sin\theta drd\theta d\phi=\frac{\pi^2}{k_0^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(-1)^k\frac{2n(n+1)}{2n+1}C_{1,mn}\delta_{nl}\delta_{m,-k}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \vec{E}^{\iota}_{inc}(\vec{r})\cdot \vec{M}^{(1)}_{kl}(k_0\vec{r}) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = \frac{\pi^2}{k_0^2}(-1)^k \frac{2l(l+1)}{2l+1} C_{1,-kl} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{1,-kl} = (-1)^k \frac{k_0^2}{\pi^2}\frac{2l+1}{2l(l+1)} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \vec{E}^{\iota}_{inc}(\vec{r})\cdot \vec{M}^{(1)}_{kl}(k_0\vec{r}) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \tag{IV.50}$$

Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά τα δυο μέλη της (IV.47) με τη διανυσματική σφαιρική κυματοσυνάρτηση $\vec{N}^{(1)}_{kl}(k_0\vec{r})$ προκύπτει με παρόμοιο τρόπο για το συντελεστή $C_{2,mn}$:

$$C_{2,-kl} = (-1)^k \frac{k_0^2}{\pi^2}\frac{2l+1}{2l(l+1)} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \vec{E}^{\iota}_{inc}(\vec{r})\cdot \vec{N}^{(1)}_{kl}(k_0\vec{r}) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \tag{IV.51}$$

Το ολοκλήρωμα στη (IV.50) υπολογίζεται ως εξής:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \vec{E}^{\iota}_{inc}(\vec{r})\cdot \vec{M}^{(1)}_{kl}(k_0\vec{r}) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{j\vec{k}_{inc}\cdot\vec{r}}\hat{e}_{\iota}\cdot\left[jkj_l(k_0r)\frac{P_l^k(\cos\theta)}{\sin\theta}\hat{\theta} - j_l(k_0r)\frac{dP_l^k(\cos\theta)}{d\theta}\hat{\phi}\right] e^{jk\phi} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \tag{IV.52}$$

Για την επεξεργασία της (IV.52) απαιτείται η εισαγωγή της παρακάτω προσεγγιστικής έκφρασης για τον εκθετικό όρο $e^{j\vec{k}_{inc}\cdot\vec{r}}$ [*Methods of Theoretical Physics; Morse and Feshbach, 1953*].

$$e^{j\vec{k}_{inc}\cdot\vec{r}} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} j^n (2n+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!} j_n(k_0r) P_n^m(\cos\theta_{inc}) P_n^m(\cos\theta) e^{-jm\phi_{inc}} e^{jm\phi} \tag{IV.53}$$

Αντικαθιστώντας την (IV.53) στην (IV.52) προκύπτει για το δεύτερο μέλος της (IV.52)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} j^n(2n+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!} j_n(k_0 r) P_n^m(\cos\theta_{inc}) P_n^m(\cos\theta) e^{-jm\phi_{inc}} e^{jm\phi} e^{jk\phi}$$

$$\left[jkj_l(k_0 r)\frac{P_l^k(\cos\theta)}{\sin\theta}\hat{\theta}\cdot\hat{e}_\iota - j_l(k_0 r)\frac{dP_l^k(\cos\theta)}{d\theta}\hat{\phi}\cdot\hat{e}_\iota \right] r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} j^n(2n+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta_{inc}) e^{-jm\phi_{inc}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} j_n(k_0 r) P_n^m(\cos\theta) e^{j\phi(m+k)}$$

$$\left[jkj_l(k_0 r)\frac{P_l^k(\cos\theta)}{\sin\theta}\hat{\theta}\cdot\hat{e}_\iota - j_l(k_0 r)\frac{dP_l^k(\cos\theta)}{d\theta}\hat{\phi}\cdot\hat{e}_\iota \right] r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \qquad (IV.54)$$

Το διάνυσμα πόλωσης της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης $\hat{e}_\iota$ για $\phi_{inc} = 0$ δίνεται από τη σχέση (2.82) $\hat{e}_1 = \hat{y}$ για *κάθετη* πόλωση και $\hat{e}_2 = -\hat{x}\cos\theta_{inc} + \hat{z}\sin\theta_{inc}$ για *παράλληλη* πόλωση. Στην περίπτωση της *κάθετης* πόλωσης τα εσωτερικά γινόμενα διανυσμάτων $\hat{\theta}\cdot\hat{e}_1$ και $\hat{\phi}\cdot\hat{e}_1$ θα είναι ίσα με

$$\hat{\theta}\cdot\hat{e}_1 = (\hat{x}\cos\theta\cos\phi + \hat{y}\cos\theta\sin\phi - \hat{z}\sin\theta)\cdot\hat{y} = \cos\theta\sin\phi \qquad (IV.55)$$

$$\hat{\phi}\cdot\hat{e}_1 = (-\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi)\cdot\hat{y} = \cos\phi \qquad (IV.56)$$

Αντικαθιστώντας τις (IV.55) και (IV.56) στην (IV.54) και για $\phi_{inc} = 0$ προκύπτει (το σύμβολο × παριστάνει πολλαπλασιασμό με την επόμενη σειρά και όχι εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\vec{E}_{inc}^{\iota}(\vec{r})\cdot\vec{M}_{kl}^{(1)}(k_0\vec{r}) r^2\sin\theta dr d\theta d\phi = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} j^n(2n+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta_{inc})\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} j_n\left(k_0 r\right) P_n^m\left(\cos\theta\right) e^{j\phi(m+k)} \times$$

$$\times\left[jkj_l\left(k_0 r\right)\frac{P_l^k\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta}\cos\theta\sin\phi - j_l\left(k_0 r\right)\frac{dP_l^k\left(\cos\theta\right)}{d\theta}\cos\phi\right] r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi =$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} j^n\left(2n+1\right)\frac{\left(n-m\right)!}{\left(n+m\right)!} P_n^m\left(\cos\theta_{inc}\right)\int_0^{\infty} j_n\left(k_0 r\right) j_l\left(k_0 r\right) r^2 dr \times$$

$$\times\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_n^m\left(\cos\theta\right)\left[jk\frac{P_l^k\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta}\cos\theta\sin\phi - \frac{dP_l^k\left(\cos\theta\right)}{d\theta}\cos\phi\right] e^{j\phi(m+k)} \sin\theta d\theta d\phi =$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} j^n\left(2n+1\right)\frac{\left(n-m\right)!}{\left(n+m\right)!} P_n^m\left(\cos\theta_{inc}\right)\int_0^{\infty} j_n\left(k_0 r\right) j_l\left(k_0 r\right) r^2 dr \times$$

$$\times\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_n^m\left(\cos\theta\right)\left[jkP_l^k\left(\cos\theta\right)\cos\theta\sin\phi - \frac{dP_l^k\left(\cos\theta\right)}{d\theta}\sin\theta\cos\phi\right] e^{j\phi(m+k)} d\theta d\phi =$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} j^n\left(2n+1\right)\frac{\left(n-m\right)!}{\left(n+m\right)!} P_n^m\left(\cos\theta_{inc}\right)\int_0^{\infty} j_n\left(k_0 r\right) j_l\left(k_0 r\right) r^2 dr \times$$

$$\times\left[\int_0^{2\pi} e^{j\phi(m+k)} \sin\phi d\phi \int_0^{\pi} jkP_n^m\left(\cos\theta\right) P_l^k\left(\cos\theta\right)\cos\theta d\theta - \right.$$

$$\left. -\int_0^{2\pi} e^{j\phi(m+k)} \cos\phi d\phi \int_0^{\pi} P_n^m\left(\cos\theta\right)\frac{dP_l^k\left(\cos\theta\right)}{d\theta}\sin\theta d\theta\right] \qquad \text{(IV.57)}$$

Γράφοντας το $\sin\phi$ και το $\cos\phi$ της σχέσης (IV.57) στην εκθετική μορφή

$$\sin\phi = \frac{1}{2j}\left(e^{j\phi} - e^{-j\phi}\right) \qquad \text{(IV.58)}$$

$$\cos\phi = \frac{1}{2}\left(e^{j\phi} + e^{-j\phi}\right) \tag{IV.59}$$

το δεύτερο μέλος της σχέσης (IV.57) μετασχηματίζεται στο εξής

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} j^n (2n+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta_{inc})\int_0^{\infty} j_n(k_0 r)\, j_l(k_0 r)\, r^2 dr \times$$

$$\times\left\{\int_0^{2\pi}\frac{1}{2j}\left[e^{j\phi(m+k+1)} - e^{j\phi(m+k-1)}\right]d\phi\int_0^{\pi} jkP_n^m(\cos\theta)P_l^k(\cos\theta)\cos\theta d\theta -\right.$$

$$\left.-\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left[e^{j\phi(m+k+1)} + e^{j\phi(m+k-1)}\right]d\phi\int_0^{\pi} P_n^m(\cos\theta)\frac{dP_l^k(\cos\theta)}{d\theta}\sin\theta d\theta\right\} \tag{IV.60}$$

Εάν παραγοντοποιηθεί η παραπάνω μορφή με κοινούς παράγοντες τους $e^{j\phi(m+k+1)}$ και $e^{j\phi(m+k-1)}$ θα προκύψει η παρακάτω σχέση

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\vec{E}_{inc}^{\iota}(\vec{r})\cdot\vec{M}_{kl}^{(1)}(k_0\vec{r})\, r^2\sin\theta dr d\theta d\phi =$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} j^n (2n+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta_{inc})\int_0^{\infty} j_n(k_0 r)\, j_l(k_0 r)\, r^2 dr$$

$$\frac{1}{2}\left\{\int_0^{2\pi} e^{j\phi(m+k+1)}d\phi\int_0^{\pi}\left[kP_n^m(\cos\theta)P_l^k(\cos\theta)\cos\theta - P_n^m(\cos\theta)\frac{dP_l^k(\cos\theta)}{d\theta}\sin\theta\right]d\theta +\right.$$

$$\left.+\int_0^{2\pi} e^{j\phi(m+k-1)}d\phi\int_0^{\pi}\left[-kP_n^m(\cos\theta)P_l^k(\cos\theta)\cos\theta - P_n^m(\cos\theta)\frac{dP_l^k(\cos\theta)}{d\theta}\sin\theta\right]d\theta\right\}$$

(IV.61)

Στην σχέση (IV.61) τα ολοκληρώματα ως προς ϕ μηδενίζονται εκτός από την περίπτωση όπου $m=-k-1$ και $m=-k+1$ στο πρώτο και στο δεύτερο ολοκλήρωμα αντίστοιχα, οπότε

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\vec{E}_{inc}^{\iota}\left(\vec{r}\right)\cdot\vec{M}_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)r^2\sin\theta dr d\theta d\phi =$$

$$=\pi\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} j^n\left(2n+1\right)\frac{\left(n-m\right)!}{\left(n+m\right)!}P_n^m\left(\cos\theta_{inc}\right)\int_0^{\infty} j_n\left(k_0 r\right) j_l\left(k_0 r\right) r^2 dr\times$$

$$\times\left\{\int_0^{\pi}\left[kP_n^{-k-1}\left(\cos\theta\right)P_l^k\left(\cos\theta\right)\cos\theta - P_n^{-k-1}\left(\cos\theta\right)\frac{dP_l^k\left(\cos\theta\right)}{d\theta}\sin\theta\right]d\theta\delta_{m,-k-1}+\right.$$

$$\left.+\int_0^{\pi}\left[-kP_n^{-k+1}\left(\cos\theta\right)P_l^k\left(\cos\theta\right)\cos\theta - P_n^{-k+1}\left(\cos\theta\right)\frac{dP_l^k\left(\cos\theta\right)}{d\theta}\sin\theta\right]d\theta\delta_{m,-k+1}\right\}$$

Εάν στα δυο παραπάνω ολοκληρώματα ως προς θ εφαρμοστούν αντίστοιχα οι ιδιότητες (II.11.γ) και (II.11.δ) των προσαρτημένων συναρτήσεων Legendre θα προκύψει

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\vec{E}_{inc}^{\iota}\left(\vec{r}\right)\cdot\vec{M}_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)r^2\sin\theta dr d\theta d\phi =$$

$$=\pi\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} j^n\left(2n+1\right)\frac{\left(n-m\right)!}{\left(n+m\right)!}P_n^m\left(\cos\theta_{inc}\right)\int_0^{\infty} j_n\left(k_0 r\right) j_l\left(k_0 r\right) r^2 dr\times$$

$$\times\left\{\int_0^{\pi}\left[kP_n^{-k-1}\left(\cos\theta\right)P_l^k\left(\cos\theta\right)\cos\theta - P_n^{-k-1}\left(\cos\theta\right)\left[P_l^{k+1}\left(\cos\theta\right)\sin\theta + k\cos\theta P_l^k\left(\cos\theta\right)\right]\right]d\theta\delta_{m,-k-1}+\right.$$

$$+\int_0^{\pi}\left[-kP_n^{-k+1}\left(\cos\theta\right)P_l^k\left(\cos\theta\right)\cos\theta -\right.$$

$$-P_n^{-k+1}\left(\cos\theta\right)\left[-\left(n-k+1\right)\left(n+k\right)\sin\theta P_l^{k-1}\left(\cos\theta\right)-k\cos\theta P_l^{k}\left(\cos\theta\right)\right]\Big]d\theta\delta_{m,-k+1}\Big\}=$$

$$=\pi\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} j^n\left(2n+1\right)\frac{\left(n-m\right)!}{\left(n+m\right)!}P_n^m\left(\cos\theta_{inc}\right)\int_0^{\infty} j_n\left(k_0 r\right)j_l\left(k_0 r\right)r^2 dr\times$$

$$\times\left[-\int_0^{\pi}P_n^{-k-1}\left(\cos\theta\right)P_l^{k+1}\left(\cos\theta\right)\sin\theta d\theta\delta_{m,-k-1}+\right.$$

$$\left.+\int_0^{\pi}\left(n-k+1\right)\left(n+k\right)P_n^{-k+1}\left(\cos\theta\right)P_l^{k-1}\left(\cos\theta\right)\sin\theta d\theta\delta_{m,-k+1}\right] \qquad \text{(IV.62)}$$

Εφαρμόζοντας στα δυο τελευταία ολοκληρώματα των Legendre την ιδιότητα (ΙΙ.8) θα προκύψει:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\vec{E}_{inc}^{\iota}\left(\vec{r}\right)\cdot\vec{M}_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)r^2\sin\theta dr d\theta d\phi=$$

$$=\pi\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} j^n\left(2n+1\right)\frac{\left(n-m\right)!}{\left(n+m\right)!}P_n^m\left(\cos\theta_{inc}\right)\int_0^{\infty} j_n\left(k_0 r\right)j_l\left(k_0 r\right)r^2 dr\times$$

$$\times\left[\left(-1\right)\left(-1\right)^{k+1}\frac{\left(n-k-1\right)!}{\left(n+k+1\right)!}\int_0^{\pi}P_n^{k+1}\left(\cos\theta\right)P_l^{k+1}\left(\cos\theta\right)\sin\theta d\theta\delta_{m,-k-1}+\right.$$

$$\left.+\left(n-k+1\right)\left(n+k\right)\left(-1\right)^{k-1}\frac{\left(n-k+1\right)!}{\left(n+k-1\right)!}\int_0^{\pi}P_n^{k-1}\left(\cos\theta\right)P_l^{k-1}\left(\cos\theta\right)\sin\theta d\theta\delta_{m,-k+1}\right] \qquad \text{(IV.63)}$$

Εφαρμόζοντας την ορθογωνικότητα των προσαρτημένων συναρτήσεων Legendre ως προς την τάξη n αλλά και την εξίσωση πληρότητας των σφαιρικών συναρτήσεων Bessel πρώτου είδους, προκύπτει

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\vec{E}_{inc}^{\iota}\left(\vec{r}\right)\cdot\vec{M}_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)r^2\sin\theta dr d\theta d\phi=$$

$$=\pi\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} j^n\left(2n+1\right)\frac{\left(n-m\right)!}{\left(n+m\right)!}P_n^m\left(\cos\theta_{inc}\right)\int_0^{\infty} j_n\left(k_0 r\right) j_l\left(k_0 r\right) r^2 dr\times$$

$$\times\left[\left(-1\right)^k\frac{2}{2n+1}\frac{\left(n-k-1\right)!}{\left(n+k+1\right)!}\frac{\left(n+k+1\right)!}{\left(n-k-1\right)!}+\right.$$

$$\left.+\left(n-k+1\right)\left(n+k\right)\left(-1\right)^{k-1}\frac{2}{2n+1}\frac{\left(n-k+1\right)!}{\left(n+k-1\right)!}\frac{\left(n+k-1\right)!}{\left(n-k+1\right)!}\right]\delta_{m,-k-1}\delta_{n,l}=$$

$$=j^l\frac{\pi^2}{k_0^2}\left(-1\right)^k\left[\frac{\left(l+k+1\right)!}{\left(l-k-1\right)!}P_l^{-k-1}\left(\cos\theta_{inc}\right)-\left(l-k+1\right)\left(l+k\right)\frac{\left(l+k-1\right)!}{\left(l-k+1\right)!}P_l^{-k+1}\left(\cos\theta_{inc}\right)\right]=$$

$$=j^l\frac{\pi^2}{k_0^2}\left(-1\right)^k\left[\frac{\left(l+k+1\right)!}{\left(l-k-1\right)!}P_l^{-k-1}\left(\cos\theta_{inc}\right)-\frac{\left(l+k\right)!}{\left(l-k\right)!}P_l^{-k+1}\left(\cos\theta_{inc}\right)\right]=$$

$$=j^l\frac{\pi^2}{k_0^2}\left(-1\right)^k\frac{\left(l+k\right)!}{\left(l-k\right)!}\left[\left(l-k\right)\left(l+k+1\right)P_l^{-k-1}\left(\cos\theta_{inc}\right)-P_l^{-k+1}\left(\cos\theta_{inc}\right)\right]\qquad\text{(IV.64)}$$

Με χρήση της ιδιότητας (ΙΙ.10.β) η (IV.64) μετασχηματίζεται στην

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\vec{E}_{inc}^{\iota}\left(\vec{r}\right)\cdot\vec{M}_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)r^2\sin\theta dr d\theta d\phi=$$

$$=j^l\frac{\pi^2}{k_0^2}\left(-1\right)^k\frac{\left(l+k\right)!}{\left(l-k\right)!}\left[-2P_l^{-k+1}\left(\cos\theta_{inc}\right)-2\left(-k\right)\cot\theta\,P_l^{-k}\left(\cos\theta_{inc}\right)\right]=$$

$$=-j^l\frac{2\pi^2}{k_0^2}\left(-1\right)^k\frac{\left(l+k\right)!}{\left(l-k\right)!}\left[P_l^{-k+1}\left(\cos\theta_{inc}\right)+\left(-k\right)\cot\theta\,P_l^{-k}\left(\cos\theta_{inc}\right)\right]\qquad\text{(IV.65)}$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα (ΙΙ.11.γ)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\vec{E}_{inc}^{\iota}(\vec{r})\cdot\vec{M}_{kl}^{(1)}(k_0\vec{r})r^2\sin\theta drd\theta d\phi=$$

$$-j^l\frac{2\pi^2}{k_0^2}(-1)^k\frac{(l+k)!}{(l-k)!}\frac{dP_l^{-k}(\cos\theta_{inc})}{d\theta}=-j^l\frac{2\pi^2}{k_0^2}\frac{dP_l^k(\cos\theta_{inc})}{d\theta}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\vec{E}_{inc}^{\iota}(\vec{r})\cdot\vec{M}_{kl}^{(1)}(k_0\vec{r})r^2\sin\theta drd\theta d\phi=-j^l\frac{2\pi^2}{k_0^2}\frac{dP_l^k(\cos\theta_{inc})}{d\theta}\qquad\text{(IV.66)}$$

Συνδυάζοντας την (IV.50) και την (IV.66) προκύπτει ότι

$$C_{1,-kl}=-j^l(-1)^k\frac{2l+1}{l(l+1)}\frac{dP_l^k(\cos\theta_{inc})}{d\theta}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{1,kl}=-j^l(-1)^k\frac{2l+1}{l(l+1)}\frac{dP_l^{-k}(\cos\theta_{inc})}{d\theta}\qquad\text{(IV.67)}$$

Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία και στην περίπτωση όπου έχουμε παράλληλη πόλωση $\hat{e}_2$ προκύπτει ο γενικός τύπος:

$$C_{1,mn}=j^n(-1)^m\frac{2n+1}{\sqrt{n(n+1)}}\hat{e}_\iota\cdot\vec{C}_{-mn}(\theta_{inc},\phi_{inc})\qquad\text{(IV.68)}$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για την περίπτωση του κυματικού συντελεστή $C_{2,mn}$ εξάγεται η σχέση:

$$C_{2,mn}=j^n(-1)^m\frac{2n+1}{\sqrt{n(n+1)}}\hat{e}_\iota\cdot\vec{B}_{-mn}(\theta_{inc},\phi_{inc})\qquad\text{(IV.69)}$$

IV.5.B. Διέγερση από πηγή περιορισμένων διαστάσεων

Απόδειξη της $\int_V \nabla\cdot\left[\mathbf{r}\mathbf{f}_{\mathbf{kl}}^{(1)}\left(\mathbf{k_0}\vec{\mathbf{r}}\right)\left(\hat{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{E}}\right)\right]\mathbf{dv}=\mathbf{0}$

Όπως θα αποδειχτεί παρακάτω ο κυματικός συντελεστής $C_{1,-kl}$ δίνεται από τη σχέση

$$C_{1,-kl}=\frac{k_0^2}{\pi^2\left(-1\right)^k}\frac{2l+1}{2l\left(l+1\right)}\left[\int_V \nabla\cdot\left[f_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)\left(\vec{r}\times\vec{E}\right)\right]dv+j\omega\mu_0\int_V f_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)\vec{r}\cdot\vec{H}dv\right]$$

Στην παράγραφο αυτή θα αποδειχθεί ότι ο πρώτος όρος του παραπάνω αθροίσματος ισούται με μηδέν δηλαδή

$$\int_V \nabla\cdot\left[rf_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)\left(\hat{r}\times\vec{E}\right)\right]dv=0 \qquad \text{(IV.70)}$$

Το αριστερό μέλος της (IV.70) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\int_V \nabla\cdot\left[rf_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)\left(\hat{r}\times\vec{E}\right)\right]dv=$$

$$=\int_V \nabla\cdot\left[rf_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[C_{1,mn}\left(\hat{r}\times\vec{M}_{mn}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)\right)+C_{2,mn}\left(\hat{r}\times\vec{N}_{mn}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)\right)\right]\right]dv$$

Τα δυο παραπάνω εξωτερικά γινόμενα δίνουν τις επιφανειακές διανυσματικές συναρτήσεις, όπως υποδεικνύουν οι σχέσεις (2.76β) και (2.76γ). Άρα με εφαρμογή των προαναφερθέντων εξισώσεων καθώς και των (2.77) και (2.79) προκύπτουν τα παρακάτω:

$$\int_V \nabla\cdot\left[rf_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)\left(\hat{r}\times\vec{E}\right)\right]dv=$$

$$=\int_V \nabla\cdot\left[r f_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sqrt{n\left(n+1\right)}\left[C_{1,mn} j_n\left(k_0 r\right)\vec{B}_{nm}\left(\theta,\phi\right)-C_{2,mn}\eta_n^{(1)}\left(k_0 r\right)\vec{C}_{nm}\left(\theta,\phi\right)\right]\right]dv=$$

$$=\int_V \nabla\cdot\left\{ r f_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}C_{1,mn} j_n\left(k_0 r\right)\left[\hat{\theta}\frac{dP_n^m\left(\cos\theta\right)}{d\theta}+jm\hat{\phi}\frac{P_n^m\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right]e^{jm\phi}-\right.$$

$$\left.-r f_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}C_{2,mn}\eta_n^{(1)}\left(k_0 r\right)\left[jm\hat{\theta}\frac{P_n^m\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta}-\hat{\phi}\frac{dP_n^m\left(\cos\theta\right)}{d\theta}\right]e^{jm\phi}\right\}dv=$$

$$=\int_V \nabla\cdot\left\{ r f_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)\right.$$

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[C_{1,mn} j_n\left(k_0 r\right)\frac{dP_n^m\left(\cos\theta\right)}{d\theta}-jmC_{2,mn}\eta_n^{(1)}\left(k_0 r\right)\frac{P_n^m\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right]e^{jm\phi}\hat{\theta}+\right.$$

$$\left.\left.\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[jmC_{1,mn} j_n\left(k_0 r\right)\frac{P_n^m\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta}+C_{2,mn}\eta_n^{(1)}\left(k_0 r\right)\frac{dP_n^m\left(\cos\theta\right)}{d\theta}\right]e^{jm\phi}\hat{\phi}\right\}\right\}dv=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\int_V \nabla\cdot\left\{ r j_l\left(k_0 r\right)\left[C_{1,mn} j_n\left(k_0 r\right)P_l^k\left(\cos\theta\right)\frac{dP_n^m\left(\cos\theta\right)}{d\theta}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-jmC_{2,mn}\eta_n^{(1)}\left(k_0 r\right)P_l^k\left(\cos\theta\right)\frac{P_n^m\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right]e^{j(m+k)\phi}\hat{\theta}\right\}dv+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\int_V \nabla\cdot\left\{ r j_l\left(k_0 r\right)\left[jmC_{1,mn} j_n\left(k_0 r\right)P_l^k\left(\cos\theta\right)\frac{P_n^m\left(\cos\theta\right)}{\sin\theta}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+C_{2,mn}\eta_n^{(1)}\left(k_0 r\right)P_l^k\left(\cos\theta\right)\frac{dP_n^m\left(\cos\theta\right)}{d\theta}\right]e^{j(m+k)\phi}\hat{\phi}\right\}dv=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\int_V \frac{j_l(k_0r)}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin\theta P_l^k(\cos\theta)\left[-C_{1,mn}j_n(k_0r)\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+jmC_{2,mn}\eta_n^{(1)}(k_0r)\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\right]e^{j(m+k)\phi}\right\}dv+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\int_V \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left\{j_l(k_0r)\left[jmC_{1,mn}j_n(k_0r)P_l^k(\cos\theta)\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+C_{2,mn}\eta_n^{(1)}(k_0r)P_l^k(\cos\theta)\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}\right]e^{j(m+k)\phi}\right\}dv=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\int_V \frac{j_l(k_0r)}{\sin\theta}\left\{-C_{1,mn}j_n(k_0r)\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta P_l^k(\cos\theta)\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}\right]+\right.$$

$$\left.+jmC_{2,mn}\eta_n^{(1)}(k_0r)\frac{d}{d\theta}\left[P_l^k(\cos\theta)P_n^m(\cos\theta)\right]\right\}e^{j(m+k)\phi}dv+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}j(m+k)\int_V \frac{j_l(k_0r)}{\sin\theta}\left[jmC_{1,mn}j_n(k_0r)P_l^k(\cos\theta)\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}+\right.$$

$$\left.+C_{2,mn}\eta_n^{(1)}(k_0r)P_l^k(\cos\theta)\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}\right]e^{j(m+k)\phi}dv=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\int_0^{2\pi}e^{j(m+k)\phi}d\phi\int_0^{\infty}j_l(k_0r)\int_0^{\pi}\left\{-C_{1,mn}j_n(k_0r)\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta P_l^k(\cos\theta)\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}\right]+\right.$$

$$\left.+jmC_{2,mn}\eta_n^{(1)}(k_0r)\frac{d}{d\theta}\left[P_l^k(\cos\theta)P_n^m(\cos\theta)\right]\right\}d\theta r^2dr+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} j(m+k)\int_V \frac{j_l(k_0 r)}{\sin\theta}\left[jmC_{1,mn} j_n(k_0 r) P_l^k(\cos\theta)\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\right.$$

$$\left.+C_{2,mn}\eta_n^{(1)}(k_0 r)P_l^k(\cos\theta)\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}\right]e^{j(m+k)\phi}dv =$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} C_{1,mn}\int_0^{2\pi} e^{j(m+k)\phi}d\phi\int_0^{\infty} j_l(k_0 r)\, j_n(k_0 r) r^2 dr\int_0^{\pi}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta P_l^k(\cos\theta)\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}\right]d\theta -$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} jmC_{2,mn}\int_0^{2\pi} e^{j(m+k)\phi}d\phi\int_0^{\infty} j_l(k_0 r)\,\eta_n^{(1)}(k_0 r) r^2 dr\int_0^{\pi}\frac{d}{d\theta}\left[P_l^k(\cos\theta)P_n^m(\cos\theta)\right]d\theta +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} j(m+k)\int_0^{2\pi} e^{j(m+k)\phi}d\phi\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{j_l(k_0 r)}{\sin\theta}\left[jmC_{1,mn} j_n(k_0 r) P_l^k(\cos\theta)\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} +\right.$$

$$\left.+C_{2,mn}\eta_n^{(1)}(k_0 r)P_l^k(\cos\theta)\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}\right] r^2\sin\theta d\theta dr = 0 \qquad \text{(IV.71)}$$

Τα δυο πρώτα αθροίσματα της (IV.71) με χρήση της ιδιότητας των προσαρτημένων συναρτήσεων Legendre να μηδενίζονται στους πόλους, είναι ίσα με το μηδέν. Το τρίτο άθροισμα της (IV.71), λόγω της εξίσωσης (2.46α) που υποδεικνύει ότι θα πρέπει $m=-k$, μηδενίζεται.

Υπολογισμός των συντελεστών του προσπίπτοντος κύματος

Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά τη (2.117) με τη διανυσματική σφαιρική κυματοσυνάρτηση $\vec{M}_{kl}^{(1)}(k_0 r)$ και εφαρμόζοντας τις γνωστές σχέσεις ορθογωνικότητας (2.40α και 2.41α) θα προκύψει:

$$\vec{E}\cdot\vec{M}_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[C_{1,mn}\vec{M}_{mn}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)\cdot\vec{M}_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)+C_{2,mn}\vec{N}_{mn}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)\cdot\vec{M}_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)\right]\Rightarrow$$

$$\int_V \vec{E}\cdot\vec{M}_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)dv=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[C_{1,mn}\int_V\vec{M}_{mn}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)\cdot\vec{M}_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)dv\right]+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[C_{2,mn}\int_V\vec{N}_{mn}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)\cdot\vec{M}_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)dv\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_V \vec{E}\cdot\vec{M}_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)dv=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[C_{1,mn}\frac{\pi^2}{k_0^2}\left(-1\right)^k\frac{2n(n+1)}{2n+1}\delta_{nl}\delta_{m,-k}\right]\Rightarrow$$

$$\int_V \vec{E}\cdot\vec{M}_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)dv=C_{1,-kl}\frac{\pi^2}{k_0^2}\left(-1\right)^k\frac{2l\left(l+1\right)}{2l+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{1,-kl}=\frac{k_0^2}{\pi^2\left(-1\right)^k}\frac{2l+1}{2l\left(l+1\right)}\int_V\vec{E}\cdot\vec{M}_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)dv \qquad \text{(IV.72)}$$

Η ποσότητα στο ολοκλήρωμα της (IV.72) με χρήση της διανυσματικής ταυτότητας $\nabla\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{B}\cdot\nabla\times\vec{A}-\vec{A}\cdot\nabla\times\vec{B}$ γίνεται:

$$\vec{E}\cdot\vec{M}_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)=\vec{E}\cdot\nabla\times\left[\vec{r}f_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)\right]=\nabla\cdot\left[f_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)\left(\vec{r}\times\vec{E}\right)\right]+f_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)\vec{r}\cdot\left(\nabla\times\vec{E}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\vec{E}\cdot\vec{M}_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)=\nabla\cdot\left[f_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)\left(\vec{r}\times\vec{E}\right)\right]+j\omega\mu_0 f_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)\vec{r}\cdot\vec{H} \qquad \text{(IV.73)}$$

Οπότε ο συνδυασμός των (IV.72) και (IV.73) δίνει:

$$C_{1,-kl}=\frac{k_0^2}{\pi^2\left(-1\right)^k}\frac{2l+1}{2l\left(l+1\right)}\int_V\left[\nabla\cdot\left[f_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)\left(\vec{r}\times\vec{E}\right)\right]+j\omega\mu_0 f_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)\vec{r}\cdot\vec{H}\right]dv\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{1,-kl} = \frac{k_0^2}{\pi^2\left(-1\right)^k}\frac{2l+1}{2l\left(l+1\right)}\left[\int_V \nabla\cdot\left[f_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)\left(\vec{r}\times\vec{E}\right)\right]dv + \int_V j\omega\mu_0 f_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)\vec{r}\cdot\vec{H}dv\right] \tag{IV.74}$$

Ο πρώτος όρος της παραπάνω εξίσωσης ισούται με μηδέν, όπως έχει ήδη αποδειχθεί. Επομένως η (IV.74) απλοποιείται στην παρακάτω:

$$C_{1,-kl} = \frac{j\omega\mu_0 k_0^2}{\pi^2\left(-1\right)^k}\frac{2l+1}{2l\left(l+1\right)}\int_V f_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)\vec{r}\cdot\vec{H}dv \tag{IV.75}$$

Στην παράγραφο 2.7 όμως, τέθηκε $\vec{H}=\vec{H}'$, οπότε $\vec{r}\cdot\vec{H}=\vec{r}\cdot\vec{H}'$. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{r}\cdot\vec{H}'$ που προέκυψε από τη λύση της μη ομογενούς βαθμωτής εξίσωσης Helmholtz, δίνεται από τη (IV.42). Αντικαθιστώντας στη (IV.75) προκύπτει ότι:

$$C_{1,-kl} = -\frac{j\omega\mu_0 k_0^2}{\pi^2\left(-1\right)^k}\frac{2l+1}{2l\left(l+1\right)}\int_V f_{kl}^{(1)}\left(k_0\vec{r}\right)\left[\int_{V'}\frac{e^{jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\nabla'\cdot\left(\vec{r}'\times\vec{J}\left(\vec{r}'\right)\right)dv'\right]dv \tag{IV.76}$$

Για τον υπολογισμό του εσωτερικού ολοκληρώματος της (IV.76) χρησιμοποιείται η προσέγγιση (2.115) για τη συνάρτηση Green που αναδιατυπώνεται εδώ για λόγους ευκολίας:

$$\frac{e^{jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = jk\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\nu}^{\nu}\frac{\left(2\nu+1\right)\left(\nu-\mu\right)!}{\left(\nu+\mu\right)!}j_\nu\left(kr'\right)h_\nu^{(1)}\left(kr\right)P_\nu^\mu\left(\cos\theta'\right)P_\nu^\mu\left(\cos\theta\right)e^{-j\mu\phi'}e^{j\mu\phi} \tag{IV.77}$$

Με αντικατάσταση της (IV.77) στην (IV.76) προκύπτει ότι:

$$\int_{V'}\frac{e^{jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\nabla'\cdot\left(\vec{r}'\times\vec{J}\left(\vec{r}'\right)\right)dv' =$$

$$=\frac{jk_0}{4\pi}\int_V \nabla'\cdot\left(\vec{r}'\times\vec{J}\left(\vec{r}'\right)\right)$$

$$\left[\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\nu}^{\nu}\frac{(2\nu+1)(\nu-\mu)!}{(\nu+\mu)!}j_\nu\left(k_0r'\right)h_\nu^{(1)}\left(k_0r\right)P_\nu^\mu\left(\cos\theta'\right)P_\nu^\mu\left(\cos\theta\right)e^{-j\mu\phi'}e^{j\mu\phi}\right]dv'=$$

$$=\frac{jk_0}{4\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\nu}^{\nu}\frac{(2\nu+1)(\nu-\mu)!}{(\nu+\mu)!}\int_{V'}\nabla'\cdot\left(\vec{r}'\times\vec{J}\left(\vec{r}'\right)\right)$$

$$\left[j_\nu\left(k_0r'\right)h_\nu^{(1)}\left(k_0r\right)P_\nu^\mu\left(\cos\theta'\right)P_\nu^\mu\left(\cos\theta\right)e^{-j\mu\phi'}e^{j\mu\phi}\right]dv'\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_{V'}\frac{e^{jk_0\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\nabla'\cdot\left(\vec{r}'\times\vec{J}\left(\vec{r}'\right)\right)dv'=$$

$$=\frac{jk_0}{4\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\nu}^{\nu}\frac{(2\nu+1)(\nu-\mu)!}{(\nu+\mu)!}h_\nu^{(1)}\left(k_0r\right)P_\nu^\mu\left(\cos\theta\right)e^{j\mu\phi}$$

$$\int_{V'}\nabla'\cdot\left(\vec{r}'\times\vec{J}\left(\vec{r}'\right)\right)\left[j_\nu\left(k_0r'\right)P_\nu^\mu\left(\cos\theta'\right)e^{-j\mu\phi'}\right]dv' \qquad \text{(IV.78)}$$

Αντικαθιστώντας την (IV.78) στην (IV.76) προκύπτει ότι:

$$C_{1,-kl}=-\frac{j\omega\mu_0k_0^2}{\pi^2(-1)^k}\frac{2l+1}{2l(l+1)}\int_V j_l\left(k_0r\right)P_l^k\left(\cos\theta\right)e^{jk\phi}$$

$$\frac{jk_0}{4\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\nu}^{\nu}\frac{(2\nu+1)(\nu-\mu)!}{(\nu+\mu)!}h_\nu^{(1)}\left(k_0r\right)P_\nu^\mu\left(\cos\theta\right)e^{j\mu\phi}$$

$$\int_{V'}\nabla'\cdot\left(\vec{r}'\times\vec{J}\left(\vec{r}'\right)\right)\left[j_\nu\left(k_0r'\right)P_\nu^\mu\left(\cos\theta'\right)e^{-j\mu\phi'}\right]dv'dv$$

$$=\frac{\omega\mu_0 k_0^3}{4\pi^3(-1)^k}\frac{2l+1}{2l(l+1)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\nu}^{\nu}\int_V \frac{(2\nu+1)(\nu-\mu)!}{(\nu+\mu)!}j_l(k_0 r)h_\nu^{(1)}(k_0 r)P_l^k(\cos\theta)P_\nu^\mu(\cos\theta)e^{jk\phi}e^{j\mu\phi}$$

$$\int_{V'}\nabla'\cdot\left(\vec{r}'\times\vec{J}(\vec{r}')\right)\left[j_\nu(k_0 r')P_\nu^\mu(\cos\theta')e^{-j\mu\phi'}\right]dv'dv=$$

$$=\frac{\omega\mu_0 k_0^3}{4\pi^3(-1)^k}\frac{2l+1}{2l(l+1)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\nu}^{\nu}\frac{(2\nu+1)(\nu-\mu)!}{(\nu+\mu)!}\int_0^\infty j_l(k_0 r)h_\nu^{(1)}(k_0 r)r^2 dr\int_0^{2\pi}e^{jk\phi}e^{j\mu\phi}d\phi$$

$$\int_0^\pi P_l^k(\cos\theta)P_\nu^\mu(\cos\theta)\sin\theta d\theta\int_{V'}\nabla'\cdot\left(\vec{r}'\times\vec{J}(\vec{r}')\right)\left[j_\nu(k_0 r')P_\nu^\mu(\cos\theta')e^{-j\mu\phi'}\right]dv'=$$

$$=\frac{\pi\omega\mu_0 k_0^3}{2\pi^3(-1)^k}\frac{2l+1}{2l(l+1)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\nu}^{\nu}\frac{(2\nu+1)(\nu-\mu)!}{(\nu+\mu)!}\delta_{\mu,-k}\int_0^\infty j_l(k_0 r)h_\nu^{(1)}(k_0 r)r^2 dr$$

$$\int_0^\pi P_l^k(\cos\theta)P_\nu^\mu(\cos\theta)\sin\theta d\theta\int_{V'}\nabla'\cdot\left(\vec{r}'\times\vec{J}(\vec{r}')\right)\left[j_\nu(k_0 r')P_\nu^\mu(\cos\theta')e^{-j\mu\phi'}\right]dv'=$$

$$=\frac{\pi\omega\mu_0 k_0^3}{2\pi^3(-1)^k}\frac{2l+1}{2l(l+1)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(2\nu+1)(\nu+k)!}{(\nu-k)!}\int_0^\infty j_l(k_0 r)h_\nu^{(1)}(k_0 r)r^2 dr$$

$$\int_0^\pi P_l^k(\cos\theta)P_\nu^{-k}(\cos\theta)\sin\theta d\theta\int_{V'}\nabla'\cdot\left(\vec{r}'\times\vec{J}(\vec{r}')\right)\left[j_\nu(k_0 r')P_\nu^{-k}(\cos\theta')e^{jk\phi'}\right]dv'=$$

$$=\frac{\pi\omega\mu_0 k_0^3}{2\pi^3(-1)^k}\frac{2l+1}{2l(l+1)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(2\nu+1)(\nu+k)!}{(\nu-k)!}(-1)^k\frac{(\nu-k)!}{(\nu+k)!}\frac{2}{2\nu+1}\frac{(\nu+k)!}{(\nu-k)!}\delta_{\nu l}$$

$$\int_0^\infty j_l(k_0 r)h_\nu^{(1)}(k_0 r)r^2 dr\int_{V'}\nabla'\cdot\left(\vec{r}'\times\vec{J}(\vec{r}')\right)\left[j_\nu(k_0 r')P_\nu^{-k}(\cos\theta')e^{jk\phi'}\right]dv'$$

$$=\frac{\pi\omega\mu_0 k_0^3}{2\pi^3(-1)^k}\frac{2l+1}{2l(l+1)}\frac{(2l+1)(l+k)!}{(l-k)!}(-1)^k\frac{(l-k)!}{(l+k)!}\frac{\pi}{k_0^2}\frac{1}{2l+1}\frac{(l+k)!}{(l-k)!}$$

$$\int_{V'} \nabla' \cdot \left(\vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') \right) \left[j_l(k_0 r') P_l^{-k}(\cos\theta') e^{jk\phi'} \right] dv' \qquad \text{(IV.79)}$$

Η παραπάνω σχέση πρόκυψε με τη χρήση της ιδιότητας των συναρτήσεων Legendre η οποία μετατρέπει τις συναρτήσεις αρνητικής τάξης σε συναρτήσεις θετικής τάξης (II.8), καθώς και της εξίσωσης ορθογωνικότητας των συναρτήσεων Legendre (II.12). Επίσης χρησιμοποιήθηκαν οι ιδιότητες (2.46α) και (III.21). Τελικά προκύπτει ότι:

$$C_{1,-kl} = \frac{\omega\mu_0 k_0}{4\pi} \frac{2l+1}{l(l+1)} \frac{(l+k)!}{(l-k)!} \int_V \nabla \cdot \left(\vec{r} \times \vec{J}(\vec{r}) \right) \left[j_l(k_0 r) P_l^{-k}(\cos\theta) e^{jk\phi} \right] dv \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{1,mn} = \frac{Z_0 k_0^2}{4\pi} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_V \nabla \cdot \left(\vec{r} \times \vec{J}(\vec{r}) \right) \left[j_n(k_0 r) P_n^{m}(\cos\theta) e^{-jm\phi} \right] dv$$

$$\text{(IV.80)}$$

Με ανάλογη διαδικασία, αποδεικνύεται ότι ο κυματικός συντελεστής $C_{2,mn}$ δίνεται από τη σχέση:

$$C_{2,mn} = j\frac{k_0^2}{4\pi} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_V \left[\frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{d}{dr}\left[r j_n(k_0 r) \right] + j\omega\mu_0 \left(\vec{r} \cdot \vec{J} \right) j_n(k_0 r) \right] P_n^m(\cos\theta) e^{-jm\phi} dv$$

$$\text{(IV.81)}$$

IV.5.Γ. Διέγερση από γραμμική διπολική κεραία

Η περίπτωση της διέγερσης από γραμμική διπολική κεραία μήκους l είναι μια ειδική περίπτωση της διέγερσης από πηγή περιορισμένων διαστάσεων. Αυτή η πηγή αναπαρίσταται από μια σφαιρική επιφάνεια που συμβολίζεται με V και έχει ακτίνα $l/2$. Η κεραία είναι τοποθετημένη παράλληλα προς το αυθαίρετο διάνυσμα πόλωσης $\hat{e}$. Στο εσωτερικό αυτής της νοητής σφαίρας η πυκνότητα της ρευματικής κατανομής δίνεται από την εξίσωση

$$I = \iint_S \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \vec{J}(\vec{r}) 2\pi r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{J}(\vec{r}) = \frac{I(r)}{2\pi r^2}\left[\delta(\theta-\theta_e)\delta(\phi-\phi_e) - \delta(\theta-\pi+\theta_e)\delta(\phi-\pi-\phi_e)\right]\hat{r} \quad \text{(IV.82)}$$

Οι κυματικοί συντελεστές $C_{1,mn}$ και $C_{2,mn}$ που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό των πεδιακών μεγεθών θα προκύψουν συνδυάζοντας τη (IV.82) με τις (IV.80) και (IV.81). Έστω ότι το ρεύμα που διαρρέει το δίπολο είναι ημιτονοειδούς μορφής, δηλαδή δίνεται από τον τύπο:

$$I(r) = I_0 \sin\left[\frac{k_0(l-2r)}{2}\right] \quad \text{(IV.83)}$$

Ο συνδυασμός της (IV.82) με τη (IV.83) δίνει την πυκνότητα της ρευματικής κατανομής:

$$\vec{J}(\vec{r}) = \frac{I_0}{2\pi r^2}\sin\left[\frac{k_0(l-2r)}{2}\right]\left[\delta(\theta-\theta_e)\delta(\phi-\phi_e) - \delta(\theta-\pi+\theta_e)\delta(\phi-\pi-\phi_e)\right]\hat{r}$$

(IV.84)

Θέτοντας την (IV.84) στη (IV.80) προκύπτουν τα εξής για το κυματικό πλάτος $C_{1,mn}$.

$$C_{1,mn} = Z_0 \frac{k_0^2}{4\pi}\frac{2n+1}{n(n+1)}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_V \nabla\cdot(\vec{r}\times\vec{J})\, j_n(k_0 r) P_n^m(\cos\theta) e^{-jm\phi} dv =$$

$$= Z_0 \frac{k_0^2}{4\pi}\frac{2n+1}{n(n+1)}\frac{(n-m)!}{(n+m)!} I_0 \int_V j_n(k_0 r) P_n^m(\cos\theta) e^{-jm\phi}\left\{\nabla\left[\frac{1}{2\pi r^2}\sin\left(\frac{k_0(l-2r)}{2}\right)\right]\right.$$

$$\left.\delta(\theta-\theta_e)\delta(\phi-\phi_e) - \delta(\theta-\pi+\theta_e)\delta(\phi-\pi-\phi_e)(\vec{r}\times\hat{r})\right\} dv \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{1,mn} = 0 \quad \text{(IV.85)}$$

Η (IV.85) προέκυψε με χρήση της ιδιότητας $\vec{r}\times\hat{r}=0$. Για τον προσδιορισμό του $C_{2,mn}$ απαιτείται ο υπολογισμός του εσωτερικού γινομένου $\vec{r}\cdot\vec{J}$:

$$\vec{r}\cdot\vec{J}=\frac{I(r)}{2\pi r^2}\left[\delta(\theta-\theta_e)\delta(\phi-\phi_e)-\delta(\theta-\pi+\theta_e)\delta(\phi-\pi-\phi_e)\right](\vec{r}\cdot\hat{r})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\vec{r}\cdot\vec{J}=\frac{I(r)}{2\pi r}\left[\delta(\theta-\theta_e)\delta(\phi-\phi_e)-\delta(\theta-\pi+\theta_e)\delta(\phi-\pi-\phi_e)\right]$$

(IV.86)

Επίσης, η πυκνότητα επιφανειακών φορτίων $\rho(\vec{r})$ θα είναι

$$\rho(\vec{r})=\frac{1}{j\omega}\nabla\cdot\vec{J}(\vec{r})=\frac{1}{j\omega}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2J_r\right)\right]\left[\delta(\theta-\theta_e)\delta(\phi-\phi_e)-\delta(\theta-\pi+\theta_e)\delta(\phi-\pi-\phi_e)\right]=$$

$$\Rightarrow\rho(\vec{r})=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{j\omega r^2}\left[\delta(\theta-\theta_e)\delta(\phi-\phi_e)-\delta(\theta-\pi+\theta_e)\delta(\phi-\pi-\phi_e)\right]\frac{dI(r)}{dr}$$

(IV.87)

Αντικαθιστώντας απευθείας τη (IV.86) και τη (IV.87) στη (IV.81) προκύπτει:

$$C_{2,mn}=j\frac{k_0^2}{4\pi}\frac{2n+1}{n(n+1)}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{l/2}\left[\frac{1}{2\pi j\omega\varepsilon_0 r^2}\frac{dI(r)}{dr}\frac{d}{dr}\left[rj_n(k_0r)\right]+j\omega\mu_0\frac{I(r)}{2\pi r}j_n(k_0r)\right]r^2dr$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}P_n^m(\cos\theta)e^{-jm\phi}\left[\delta(\theta-\theta_e)\delta(\phi-\phi_e)-\delta(\theta-\pi+\theta_e)\delta(\phi-\pi-\phi_e)\right]d\Omega$$

(IV.88)

Το διπλό ολοκλήρωμα στο δεύτερο μέλος της (IV.88) γράφεται ως εξής.

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}P_n^m(\cos\theta)e^{-jm\phi}\left[\delta(\theta-\theta_e)\delta(\phi-\phi_e)-\delta(\theta-\pi+\theta_e)\delta(\phi-\pi-\phi_e)\right]d\Omega=$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_n^m\left(\cos\theta\right)e^{-jm\phi}\delta\left(\theta-\theta_e\right)\delta\left(\phi-\phi_e\right)d\Omega - \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_n^m\left(\cos\theta\right)e^{-jm\phi}\delta\left(\theta-\pi+\theta_e\right)\delta\left(\phi-\pi-\phi_e\right)d\Omega =$$

$$= 4\pi P_n^m\left(\cos\theta_e\right)e^{-jm\phi_e} - 4\pi P_n^m\left(\cos\left(\pi-\theta_e\right)\right)e^{-jm\left(\pi+\phi_e\right)} = 4\pi e^{-jm\phi_e}\left[P_n^m\left(\cos\theta_e\right) - P_n^m\left(\cos\left(\pi-\theta_e\right)\right)e^{-jm\pi}\right] =$$

$$= 4\pi\left[P_n^m\left(\cos\theta_e\right) - P_n^m\left(-\cos\theta_e\right)\left(-1\right)^m\right]e^{-jm\phi_e} \tag{IV.89}$$

Στην παραπάνω ανάλυση χρησιμοποιήθηκε η ιδιότητα $e^{-jm\pi} = \cos\left(m\pi\right) - j\sin\left(m\pi\right) =$ $= \cos\left(m\pi\right) = \left(-1\right)^m$. Επιπλέον, με χρήση της ιδιότητας (ΙΙ.23) για προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre αρνητικού ορίσματος το ολοκλήρωμα της (IV.89) παίρνει τη μορφή:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_n^m\left(\cos\theta\right)e^{-jm\phi}\left[\delta\left(\theta-\theta_e\right)\delta\left(\phi-\phi_e\right) - \delta\left(\theta-\pi+\theta_e\right)\delta\left(\phi-\pi-\phi_e\right)\right]d\Omega =$$

$$= 4\pi\left[P_n^m\left(\cos\theta_e\right) - \left(-1\right)^m\left(-1\right)^m\left(-1\right)^n P_n^m\left(\cos\theta_e\right)\right]e^{-jm\phi_e} = 4\pi P_n^m\left(\cos\theta_e\right)\left[1-\left(-1\right)^{2m}\left(-1\right)^n\right]e^{-jm\phi_e} =$$

$$= 4\pi P_n^m\left(\cos\theta_e\right)\left[1-\left(-1\right)^n\right]e^{-jm\phi_e} = 4\pi P_n^m\left(\cos\theta_e\right)\left[1-\cos\left(n\pi\right)\right]e^{-jm\phi_e} \tag{IV.90}$$

Οπότε με αντικατάσταση της (IV.90) στην (IV.88) ο συντελεστής $C_{2,mn}$ είναι δυνατό να γραφεί ως εξής:

$$C_{2,mn} = 4\pi j\frac{k_0^2}{4\pi}\frac{2n+1}{n\left(n+1\right)}\frac{\left(n-m\right)!}{\left(n+m\right)!}P_n^m\left(\cos\theta_e\right)e^{jm\phi_e}\left[1-\cos\left(n\pi\right)\right]$$

$$\int_0^{l/2}\left[\frac{1}{2\pi j\omega\varepsilon_0 r^2}\frac{dI\left(r\right)}{dr}\frac{d}{dr}\left[rj_n\left(k_0r\right)\right] + j\omega\mu_0\frac{I\left(r\right)}{2\pi r}j_n\left(k_0r\right)\right]r^2dr \tag{IV.91}$$

Το ολοκλήρωμα της (IV.91) υπολογίζεται ακολουθώντας την παρακάτω διαδικασία:

$$\int_0^{l/2}\left[\frac{1}{2\pi j\omega\varepsilon_0 r^2}\frac{d}{dr}\left[rj_n\left(k_0r\right)\right]\frac{dI\left(r\right)}{dr}+j\omega\mu_0\frac{I\left(r\right)}{2\pi r}j_n\left(k_0r\right)\right]r^2dr=$$

$$\frac{j}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{l/2}\left[-\frac{1}{\omega}\frac{d}{dr}\left[rj_n\left(kr\right)\right]\frac{dI\left(r\right)}{dr}+r\omega\mu_0\varepsilon_0 I\left(r\right)j_n\left(k_0r\right)\right]dr=$$

$$=-\frac{j}{2\pi\omega\varepsilon_0}\int_0^{l/2}\left[\frac{d}{dr}\left[rj_n\left(k_0r\right)\right]\frac{dI\left(r\right)}{dr}-k_0^2 rI\left(r\right)j_n\left(k_0r\right)\right]dr \tag{IV.92}$$

Επειδή όμως το ρεύμα μεταβάλλεται ημιτονοειδώς, σύμφωνα με τη (IV.83) ισχύει ότι

$$\frac{dI\left(r\right)}{dr}=-k_0I_0\cos\left[\frac{k_0\left(l-2r\right)}{2}\right] \tag{IV.93}$$

και

$$\frac{d^2I\left(r\right)}{dr^2}=-k_0^2I_0\sin\left[\frac{k_0\left(l-2r\right)}{2}\right]=-k_0^2I\left(r\right) \tag{IV.94}$$

Συνδυάζοντας τη (IV.94) με τη (IV.92) και με χρήση των γνωστών σχέσεων $k_0c=\omega$, $\varepsilon_0c=1/Z_0$ και $Z_0\approx 120\pi$ η τελευταία παίρνει τελικά τη μορφή:

$$\int_0^{l/2}\left[\frac{1}{2\pi j\omega\varepsilon_0 r^2}\frac{dI\left(r\right)}{dr}\frac{d}{dr}\left[rj_n\left(k_0r\right)\right]+j\omega\mu_0\frac{I\left(r\right)}{2\pi r}j_n\left(k_0r\right)\right]r^2dr=\frac{-j}{2\pi\varepsilon_0k_0c}\int_0^{l/2}\frac{d}{dr}\left[rj_n\left(k_0r\right)\frac{dI\left(r\right)}{dr}\right]dr=$$

$$=\frac{-j}{2\pi\varepsilon_0k_0c}\left[rj_n\left(k_0r\right)\frac{dI\left(r\right)}{dr}\right]_0^{l/2}=\frac{jZ_0I_0}{2\pi}\frac{l}{2}j_n\left(k_0\frac{l}{2}\right)I_0 \tag{IV.95}$$

Θέτοντας τη (IV.95) στη (IV.91) προκύπτει ο κυματικός συντελεστής $C_{2,mn}$

$$C_{2,mn}=-30k_0^2I_0l\left[1-\cos\left(n\pi\right)\right]\frac{2n+1}{2n\left(n+1\right)}\frac{\left(n-m\right)!}{\left(n+m\right)!}j_n\left(\frac{k_0l}{2}\right)P_n^m\left(\cos\theta\right)e^{-jm\phi} \tag{IV.96}$$

Αν το διάνυσμα πόλωσης ταυτίζεται με τον άξονα των z δηλαδή $\hat{e}=\hat{z}$ τότε η (IV.96) απλοποιείται σημαντικά:

$$C_{2,mn}=-30k_0^2 I_0 l\delta_{m,0}\left[1-\cos\left(n\pi\right)\right]\frac{2n+1}{2n\left(n+1\right)}j_n\left(\frac{k_0 l}{2}\right) \qquad \text{(IV.97)}$$

όπου $\delta_{m,0}$ είναι το δέλτα του Kronecker. Η εισαγωγή του στη (IV.97) φανερώνει ότι το κυματικό πλάτος $C_{2,mn}$ είναι ίσο με το μηδέν πάντα, εκτός από την περίπτωση που m=0 και ο αριθμός n είναι περιττός.

IV.6 Το Προσθετικό Θεώρημα

Το προσθετικό θεώρημα εφαρμόζεται στην περίπτωση που απαιτείται η αναλυτική θεμελίωση προβλημάτων σκέδασης από σύνθετα σφαιρικά σώματα. Μέσω του θεωρήματος αυτού, θεωρούνται πολλά κέντρα σκέδασης. Είναι φανερό, ότι στις εκφράσεις της ηλεκτρικής και της μαγνητικής πεδιακής έντασης θα συνυπάρχουν διανυσματικές σφαιρικές κυματοσυναρτήσεις διαφορετικών συστημάτων συντεταγμένων. Η μεταφορά των διανυσματικών σφαιρικών κυματοσυναρτήσεων από ένα σύστημα συντεταγμένων σ' ένα άλλο γίνεται με εφαρμογή του *προσθετικού θεωρήματος* [*Stein, 1961; Cruzan, 1962*].

Έστω δυο καρτεσιανά συστήματα συντεταγμένων $\left(O_1:x_1y_1z_1\right)$ και $\left(O_2:x_2y_2z_2\right)$ $\left(\sigma\chi.\text{IV}.3\right)$.Η θέση του σημείου O_2 ως προς το σημείο O_1 καθορίζεται από το διάνυσμα $\vec{d}_{12}$, που στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων $\left(O_1:r_1\theta_1\phi_1\right)$ έχει συντεταγμένες $\left(d,\theta_0,\phi_0\right)$. Η θέση οποιουδήποτε σημείου P στο χώρο, που έχει κυματικό αριθμό k, καθορίζεται από τα διανύσματα $\vec{r}_1$ ή $\vec{r}_2$. Οι διανυσματικές σφαιρικές κυματοσυναρτήσεις για το σημείο P του συστήματος $\left(O_1:r_1\theta_1\phi_1\right)$ αναπτύσσονται σε αθροίσματα διανυσματικών σφαιρικών κυματοσυναρτήσεων του συστήματος $\left(O_2:r_2\theta_2\phi_2\right)$ επίσης για το σημείο P ως εξής:

$r_2 \le d$

$$\begin{bmatrix} \vec{M}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}_1\right) \\ \vec{N}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}_1\right) \end{bmatrix} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \begin{bmatrix} A_{\mu\nu,i}^{mn}\left(k\vec{d}_{12}\right) & B_{\mu\nu,i}^{mn}\left(k\vec{d}_{12}\right) \\ B_{\mu\nu,i}^{mn}\left(k\vec{d}_{12}\right) & A_{\mu\nu,i}^{mn}\left(k\vec{d}_{12}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{M}_{\mu\nu}^{(1)}\left(k\vec{r}_2\right) \\ \vec{N}_{\mu\nu}^{(1)}\left(k\vec{r}_2\right) \end{bmatrix} \tag{IV.98}$$

και για

$r_2 \ge d$

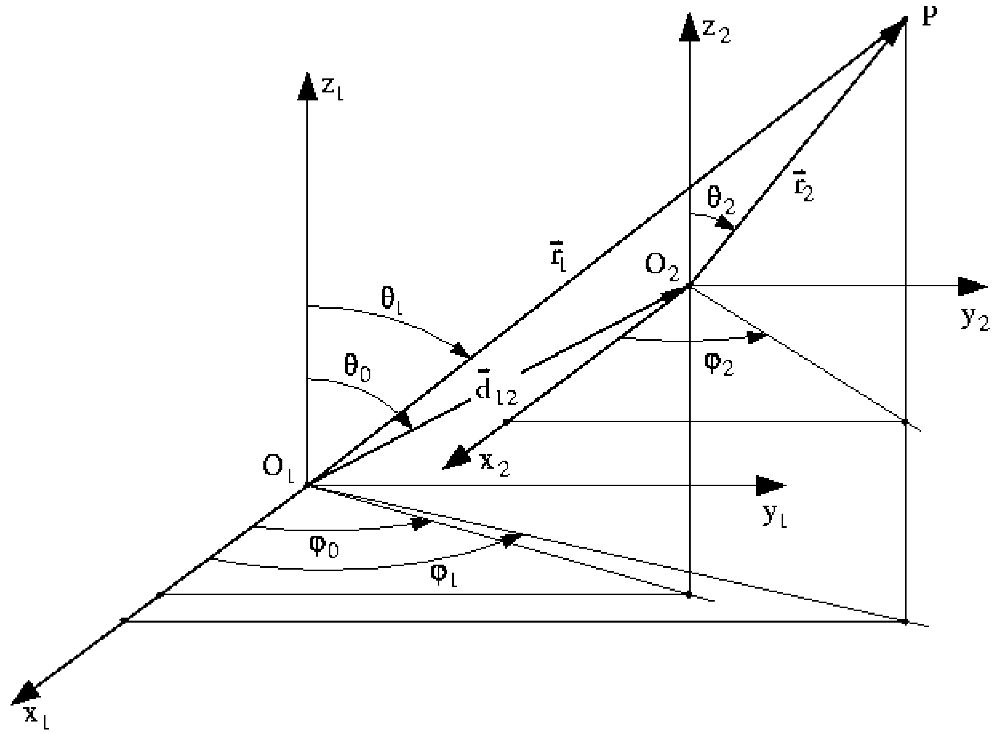
$$\begin{bmatrix} \vec{M}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}_1\right) \\ \vec{N}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}_1\right) \end{bmatrix} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \begin{bmatrix} A_{\mu\nu,1}^{mn}\left(k\vec{d}_{12}\right) & B_{\mu\nu,1}^{mn}\left(k\vec{d}_{12}\right) \\ B_{\mu\nu,1}^{mn}\left(k\vec{d}_{12}\right) & A_{\mu\nu,1}^{mn}\left(k\vec{d}_{12}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{M}_{\mu\nu}^{(i)}\left(k\vec{r}_2\right) \\ \vec{N}_{\mu\nu}^{(i)}\left(k\vec{r}_2\right) \end{bmatrix} \tag{IV.99}$$

Ο άνω ή κάτω δείκτης i στις παραπάνω εξισώσεις παίρνει τις τιμές 1 ή 3, ανάλογα με το είδος των σφαιρικών συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται στις διανυσματικές σφαιρικές κυματοσυναρτήσεις. Η τιμή 1 αντιστοιχεί σε σφαιρικές συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους, ενώ η τιμή 3 σε σφαιρικές συναρτήσεις Hankel πρώτου είδους. Οι *συντελεστές σύζευξης* ορίζονται από τις παρακάτω εκφράσεις [*Cruzan, 1962; Fikioris & Kanellopoulos, 1979*]:

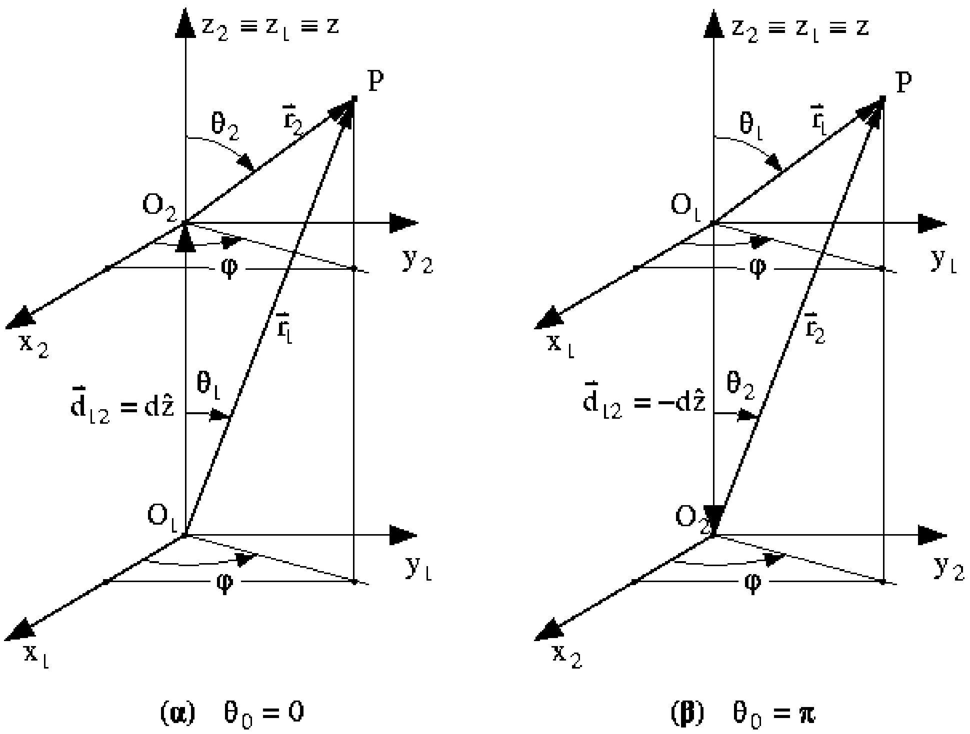
$$A_{\mu\nu,i}^{mn}\left(k\vec{d}_{12}\right) = \left(-1\right)^{\mu}\sum_{p}\alpha\left(m,n\middle|-\mu,\nu\middle|p\right)\alpha\left(n,\nu,p\right)z_p^{(i)}\left(kd\right)P_p^{m-\mu}\left(\cos\theta_0\right)e^{j(m-\mu)\phi_0} \tag{IV.100}$$

$$B_{\mu\nu,i}^{mn}\left(k\vec{d}_{12}\right) = \left(-1\right)^{\mu}\sum_{p}\alpha\left(m,n\middle|-\mu,\nu\middle|p+1,p\right)b\left(n,\nu,p+1\right)z_{p+1}^{(i)}\left(kd\right)P_{p+1}^{m-\mu}\left(\cos\theta_0\right)e^{j(m-\mu)\phi_0} \tag{IV.101}$$

και ο δείκτης άθροισης p παίρνει τις τιμές $\left|n-\nu\right|,\left|n-\nu\right|+2,\ldots,n+\nu$. Οι διάφοροι παράγοντες στο δεξιό μέλος των (IV.100) και (IV.101) θα οριστούν παρακάτω.



Σχήμα IV.3: Γεωμετρία εφαρμογής προσθετικού θεωρήματος



Σχήμα IV.4: Μεταφορά κατά τον z άξονα

Για τη μεταφορά διανυσματικών σφαιρικών κυματοσυναρτήσεων από το σύστημα $\left(O_2 : x_2 y_2 z_2\right)$ στο σύστημα $\left(O_1 : x_1 y_1 z_1\right)$ χρησιμοποιούνται οι συντελεστές σύζευξης $A_{\mu\nu,i}^{mn}\left(k\vec{d}_{21}\right)$ και $B_{\mu\nu,i}^{mn}\left(k\vec{d}_{21}\right)$ που συνδέονται με τους προηγούμενους με χρήση των παρακάτω εξισώσεων:

$$A_{\mu\nu,i}^{mn}\left(k\vec{d}_{21}\right) = \left(-1\right)^{\nu+n} A_{\mu\nu,i}^{mn}\left(k\vec{d}_{12}\right) \tag{IV.102}$$

$$B_{\mu\nu,i}^{mn}\left(k\vec{d}_{21}\right) = \left(-1\right)^{n+\nu+1} B_{\mu\nu,i}^{mn}\left(k\vec{d}_{12}\right) \tag{IV.103}$$

Οι (IV.102) και (IV.103) προκύπτουν με εφαρμογή των ιδιοτήτων:

$$P_p^{m-\mu}\left[\cos\left(\pi - \theta_0\right)\right] = P_p^{m-\mu}\left(-\cos\theta_0\right) = \left(-1\right)^{p+m-\mu} P_p^{m-\mu}\left(\cos\theta_0\right) \tag{IV.104}$$

$$e^{j(m-\mu)(\phi_0 \pm \pi)} = \left(-1\right)^{m-\mu} e^{j(m-\mu)\phi_0} \tag{IV.105}$$

Αν τα δυο συστήματα συντεταγμένων $\left(O_1 : x_1 y_1 z_1\right)$ και $\left(O_2 : x_2 y_2 z_2\right)$ έχουν κοινό z-άξονα (σχήμα. IV.4) η γωνία θ_0 έχει τιμή 0 ή π και οι (IV.98), (IV.99) απλοποιούνται ως εξής:

$r_2 \le d$

$$\begin{bmatrix} \vec{M}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}_1\right) \\ \vec{N}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}_1\right) \end{bmatrix} = \sum_{\nu=m'}^{\infty} \begin{bmatrix} A_{m\nu,i}^{mn}\left(\pm kd\hat{z}\right) & B_{m\nu,i}^{mn}\left(\pm kd\hat{z}\right) \\ B_{m\nu,i}^{mn}\left(\pm kd\hat{z}\right) & A_{m\nu,i}^{mn}\left(\pm kd\hat{z}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{M}_{m\nu}^{(1)}\left(k\vec{r}_2\right) \\ \vec{N}_{m\nu}^{(1)}\left(k\vec{r}_2\right) \end{bmatrix} \tag{IV.106}$$

$r_2 \ge d$

$$\begin{bmatrix} \vec{M}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}_1\right) \\ \vec{N}_{mn}^{(i)}\left(k\vec{r}_1\right) \end{bmatrix} = \sum_{\nu=m'}^{\infty} \begin{bmatrix} A_{m\nu,1}^{mn}\left(\pm kd\hat{z}\right) & B_{m\nu,1}^{mn}\left(\pm kd\hat{z}\right) \\ B_{m\nu,1}^{mn}\left(\pm kd\hat{z}\right) & A_{m\nu,1}^{mn}\left(\pm kd\hat{z}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{M}_{m\nu}^{(i)}\left(k\vec{r}_2\right) \\ \vec{N}_{m\nu}^{(i)}\left(k\vec{r}_2\right) \end{bmatrix} \tag{IV.107}$$

Ο δείκτης ν στις (IV.106), (IV.107) εκκινεί από την τιμή $m' = \max\{1, |m|\}$. Το θετικό πρόσημο στο όρισμα των συντελεστών σύζευξης αντιστοιχεί στη γωνία $\theta_0 = 0$ (σχ. IV.4α) ενώ το αρνητικό πρόσημο αντιστοιχεί στη γωνία $\theta_0 = \pi$ (σχ. IV.4β). Και στις δυο αυτές περιπτώσεις οι συντελεστές σύζευξης είναι ανεξάρτητοι της γωνίας ϕ_0. Πραγματι, αν $\theta_0 = 0$ ή $\theta_0 = \pi$ οι προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους έχουν τη μορφή:

$$P_p^{m-\mu}(\cos 0) = \delta_{m\mu} \qquad \text{(IV.108)}$$

$$P_p^{m-\mu}(\cos \pi) = (-1)^p \delta_{m\mu} \qquad \text{(IV.109)}$$

και οι εκφράσεις των συντελεστών σύζευξης απλοποιούνται σημαντικά:

$$A_{m\nu,i}^{mn}(kd\hat{z}) = (-1)^m \sum_p \alpha(m,n|-m,\nu|p)\,\alpha(n,\nu,p)\,z_p^{(i)}(kd) \qquad \text{(IV.110)}$$

$$B_{m\nu,i}^{mn}(kd\hat{z}) = (-1)^m \sum_p \alpha(m,n|-m,\nu|p+1,p)\,b(n,\nu,p+1)\,z_{p+1}^{(i)}(kd) \qquad \text{(IV.111)}$$

$$A_{m\nu,i}^{mn}(-kd\hat{z}) = (-1)^{n+\nu} A_{m\nu,i}^{mn}(kd\hat{z}) \qquad \text{(IV.112)}$$

$$B_{m\nu,i}^{mn}(-kd\hat{z}) = (-1)^{n+\nu+1} B_{m\nu,i}^{mn}(kd\hat{z}) \qquad \text{(IV.113)}$$

Συντελεστές σύζευξης

Ο παράγοντας $\alpha(m,n|\mu,\nu|p)$ ονομάζεται συντελεστής Gaunt ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$\alpha(m,n|\mu,\nu|p) = \frac{2p+1}{2}\frac{(p-m-\mu)!}{(p+m+\mu)!}\int_{-1}^{1} P_n^m(v)\,P_\nu^\mu(v)\,P_p^{m+\mu}(v)\,dv \qquad v = \cos\theta$$

(IV.114)

Ισχύει επίσης και η παρακάτω έκφραση [*Cruzan, 1962; Kanellopoulos & Fikioris, 1979*].

$$\alpha\left(m,n\middle|\mu,\nu\middle|p\right)=\left(-1\right)^{m+\mu}\left(2p+1\right)\begin{pmatrix} n & \nu & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n & \nu & p \\ m & \mu & -m-\mu \end{pmatrix}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{\left(n+m\right)!\left(\nu+\mu\right)!\left(p-m-\mu\right)!}{\left(n-m\right)!\left(\nu-\mu\right)!\left(p+m+\mu\right)!}} \qquad \text{(IV.115)}$$

Οι παράγοντες της μορφής $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ στο δεξιό μέλος της (IV.115) ονομάζονται σύμβολα *Wigner 3-j* [*Brink & Satchler, 1962; Jones, 1985*] που ορίζονται με τη *συμμετρική εξίσωση Racah:*

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}=\left(-1\right)^{j_1-j_2-m_3}\sqrt{\frac{\left(j_1+j_2-j_3\right)!\left(j_1-j_2+j_3\right)!\left(-j_1+j_2+j_3\right)!}{\left(j_1+j_2+j_3+1\right)!}}\times$$

$$\times\sqrt{\left(j_1+m_1\right)!\left(j_1-m_1\right)!\left(j_2+m_2\right)!\left(j_2-m_2\right)!\left(j_3+m_3\right)!\left(j_3-m_3\right)!}\times$$

$$\times\sum_k\frac{\left(-1\right)^k}{k!\left(j_1+j_2-j_3-k\right)!\left(j_1-m_1-k\right)!\left(j_2+m_2-k\right)!\left(j_3-j_2+m_1+k\right)!\left(j_3-j_1-m_2+k\right)!}$$

(IV.116)

Ο ακέραιος k στη (IV.116) παίρνει μόνο εκείνες τις τιμές που εξασφαλίζουν ότι τα ορίσματα των παραγοντικών είναι μη αρνητικά. Το σύμβολο Wigner 3-j ισούται με 0 αν παραβιάζεται οποιαδήποτε από τις παρακάτω συνθήκες [*Kanellopoulos & Fikioris, 1979; Jones, 1985*]

$$m_1+m_2+m_3=0 \qquad \text{(IV.117)}$$

$$\left|j_1-j_2\right|\le j_3\le j_1+j_2 \qquad \text{(IV.118)}$$

$$\left|m_n\right| \le j_n\,, \qquad n = 1,2,3 \tag{IV.119}$$

Η συνθήκη (IV.118) πρέπει να ικανοποιείται κυκλικά από όλους τους δείκτες j_1, j_2, j_3. Στην ειδική περίπτωση που $m_1 = m_2 = m_3 = 0$ ισχύει η απλοποιημένη έκφραση [*Jones, 1985*]:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(-1\right)^{J/2} \sqrt{\frac{\left(J-2j_1\right)!\left(J-2j_2\right)!\left(J-2j_3\right)!}{\left(J+1\right)!}} \times \frac{\left(J/2\right)!}{\left(J/2-j_1\right)!\left(J/2-j_2\right)!\left(J/2-j_3\right)!} \tag{IV.120}$$

που έχει την τιμή 0 αν το άθροισμα $J = j_1 + j_2 + j_3$ είναι περιττός αριθμός.

Το σύμβολο Wigner 3-j ικανοποιεί τη συμμετρική ιδιότητα [*Jones, 1985*]

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = \left(-1\right)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \tag{IV.121}$$

Ακόμη, παραμένει αμετάβλητο για άρτιο πλήθος εναλλαγών και στηλών του και πολλαπλασιάζεται επί $\left(-1\right)^{j_1+j_2+j_3}$ για περιττό αριθμό εναλλαγών των στηλών του. Επιπλέον, ισχύουν οι παρακάτω ορθογωνικές ιδιότητες [*Brink & Satchler, 1962*]:

$$\sum_{j_3, m_3} \left(2j_3+1\right) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1' & m_2' & m_3' \end{pmatrix} = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'} \tag{IV.122}$$

$$\sum_{m_1, m_2} \left(2j_3+1\right) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1' & m_2' & m_3' \end{pmatrix} = \delta_{j_3 j_3'} \delta_{m_3 m_3'} \tag{IV.123}$$

Ο παράγοντας $\alpha\left(m,n\middle|\mu,\nu\middle|p,q\right)$ που εμφανίζεται στο δεξιό μέλος της (IV.101) εκφράζεται επίσης με σύμβολα Wigner 3-j [*Kanellopoulos & Fikioris, 1979*]:

$$\alpha\left(m,n\middle|\mu,\nu\middle|p,q\right) = \left(-1\right)^{m+\mu} \left(2p+1\right) \begin{pmatrix} n & \nu & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & \nu & p \\ m & \mu & -m-\mu \end{pmatrix} \times$$

$$\times\sqrt{\frac{(n+m)!(\nu+\mu)!(p-m-\mu)!}{(n-m)!(\nu-\mu)!(p+m+\mu)!}} \qquad \text{(IV.124)}$$

Όταν ο παράγοντας αυτός έχει τη μορφή $\alpha\left(m,n\middle|\mu,\nu\middle|p+1,p\right)$, με την οποία εμφανίζεται στην, (IV.101) συνδέεται με το συντελεστή Gaunt με την έκφραση [*Cruzan, 1962; Mackowski, 1991*]:

$$\alpha\left(m,n\middle|\mu,\nu\middle|p+1,p\right)=\frac{2p+3}{2p+1}\times$$

$$\times\left[(n+\nu+p+2)(\nu-n+p+1)(n-\nu+p+1)(n+\nu-p)\right]^{-1/2}\times$$

$$\times\left[(\nu+\mu)(\nu-\mu+1)\alpha\left(m,n\middle|\mu-1,\nu\middle|p\right)-(p+1-m-\mu)(p-m-\mu)\alpha\left(m,n\middle|\mu+1,\nu\middle|p\right)-\right.$$

$$\left.-2\mu(p+1-m-\mu)\alpha\left(m,n\middle|\mu,\nu\middle|p\right)\right] \qquad \text{(IV.125)}$$

Τέλος, οι παράγοντες $a(n,\nu,p)$ και $b(n,\nu,p)$ στις (IV.100) και (IV.101) ορίζονται ως εξής [*Cruzan, 1962; Kanellopoulos & Fikioris, 1979*]:

$$a(n,\nu,p)=j^{p+\nu-n}\left[2\nu(\nu+1)(2\nu+1)+(\nu+1)(n-\nu+p+1)(n+\nu-p)-\right.$$

$$\left.-\nu(\nu-n+p+1)(n+\nu+p+2)\right]/\left[2\nu(\nu+1)\right] \qquad \text{(IV.126)}$$

$$b(n,\nu,p)=j^{p+\nu-n}\,\frac{2\nu+1}{2\nu(\nu+1)}\sqrt{p^2-(\nu-n)^2}\sqrt{(\nu+n+1)^2-p^2} \qquad \text{(IV.127)}$$

Equation Chapter 5 Section 5

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ V

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΗΣ ΑΚΤΙΝΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

V.1. Χρήσιμα Ολοκληρώματα

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστούν τρία ολοκληρώματα που χρησιμοποιούνται στην αναλυτική θεμελίωση της ακτινικής θεωρίας του φακού Luneburg.

Αρχικά, θα δειχθεί ότι

$$I_1 = \int \frac{da}{\sqrt{a^2 - p^2}} = \ln\left(a + \ln\sqrt{a^2 - p^2}\right) + C \qquad (V.1)$$

Η απόδειξη εκκινεί με την αντικατάσταση

$$\sqrt{a^2 - p^2} = t - a \Rightarrow a = \frac{t^2 + p^2}{2t} \qquad (V.2)$$

οπότε

$$da = \frac{t^2 - p^2}{2t^2} dt \qquad (V.3)$$

Με χρήση των (V.2), (V.3) το ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους της (V.1) μετασχηματίζεται στο παρακάτω

$$I=\int \frac{t^2-p^2}{2t^2}\frac{1}{t-\frac{t^2+p^2}{2t}}dt=\int \frac{t^2-p^2}{2t^2}\frac{2t}{t^2-p^2}dt=\int \frac{dt}{t}=\ln t \tag{V.4}$$

Αντικαθιστώντας την (V.2) στην (V.4) επαναφέρεται στο ολοκλήρωμα η μεταβλητή a, οπότε αποδεικνύεται το ζητούμενο

$$I_1=\int \frac{da}{\sqrt{a^2-p^2}}=\ln\left(a+\ln\sqrt{a^2-p^2}\right)+C \tag{V.5}$$

Εν συνεχεία, παρουσιάζεται το ολοκλήρωμα

$$I_2=\int \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}}=-2\arcsin\sqrt{1-z}+C \tag{V.6}$$

Για την απόδειξη της (V.6) πρέπει να γίνει η αντικατάσταση

$$\sqrt{1-z}=t\Rightarrow 1-z=t^2\Rightarrow z=1-t^2 \tag{V.7}$$

οπότε

$$dz=-2tdt \tag{V.8}$$

Με αντικατάσταση των (V.7) και (V.8) στο ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους της (V.6) προκύπτει το ζητούμενο

$$I_2=\int \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}}=-2\int \frac{tdt}{t\sqrt{1-t^2}}=-2\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=-2\arcsin t\xrightarrow{V.7}$$

$$\xrightarrow{V.7}\int \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}}=-2\arcsin\sqrt{1-z}+C \tag{V.9}$$

Τέλος, αποδεικνύεται ότι ισχύει η ολοκληρωτική σχέση

$$I_3 = \int \frac{a\,dr}{r\sqrt{r^2 - a^2}} = -\arcsin\frac{a}{r} \qquad (V.10)$$

Για την απόδειξη της (V.10) αρκεί να δειχθεί ότι

$$\frac{d}{dr}\left(\arcsin\frac{a}{r}\right) = -\frac{a}{r\sqrt{r^2 - a^2}} \qquad (V.11)$$

Πράγματι

$$\frac{d}{dr}\left(\arcsin\frac{a}{r}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(a/r\right)^2}}\frac{d}{dr}\left(\frac{a}{r}\right) = -\frac{a}{r^2}\frac{r}{\sqrt{r^2 - a^2}} = -\frac{a}{r\sqrt{r^2 - a^2}} \qquad (V.12)$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.

V.2. Αποδείξεις που σχετίζονται με το δείκτη διάθλασης του φακού Luneburg

V.2.A. Απόδειξη της (4.56)

Η απόδειξη της (4.56) εκκινεί από την (4.55). Με διαχωρισμό των δυο ολοκληρωμάτων της (4.55) θα προκύψει:

$$-\pi = a\int_{r_0}^{1} \frac{dr}{r\sqrt{p^2 - a^2}} + a\int_{1}^{r^*} \frac{dr}{r\sqrt{p^2 - a^2}} - a\int_{r^*}^{1} \frac{dr}{r\sqrt{p^2 - a^2}} - a\int_{1}^{r_1} \frac{dr}{r\sqrt{p^2 - a^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\pi = -a\int_{1}^{r_0}\frac{dr}{r\sqrt{p^2-a^2}} - a\int_{r^*}^{1}\frac{dr}{r\sqrt{p^2-a^2}} - a\int_{r^*}^{1}\frac{dr}{r\sqrt{p^2-a^2}} - a\int_{1}^{r_1}\frac{dr}{r\sqrt{p^2-a^2}} \qquad (V.13)$$

λόγω του ότι $p(r)=r$ για $r\geq 1$ η παραπάνω σχέση μετασχηματίζεται στην

$$2a\int_{r^*}^{1}\frac{dr}{r\sqrt{p^2-a^2}} = \pi - a\int_{1}^{r_0}\frac{dr}{r\sqrt{r^2-a^2}} - a\int_{1}^{r_1}\frac{dr}{r\sqrt{r^2-a^2}} \qquad (V.14)$$

και δεδομένου ότι ισχύει η (V.10)

$$a\int\frac{dr}{r\sqrt{r^2-a^2}} = -\arcsin\frac{a}{r} \qquad (V.15)$$

η εξίσωση (V.14) μετασχηματίζεται στην

$$2a\int_{r^*}^{1}\frac{dr}{r\sqrt{p^2-a^2}} = \pi - \left[-\arcsin\frac{a}{r}\right]_1^{r_0} + \left[-\arcsin\frac{a}{r}\right]_1^{r_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a\int_{r^*}^{1}\frac{dr}{r\sqrt{p^2-a^2}} = \pi - \arcsin a + \arcsin\frac{a}{r_0} + \arcsin\frac{a}{r_1} - \arcsin a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\int_{r^*}^{1}\frac{dr}{r\sqrt{p^2-a^2}} = \frac{1}{2}\left(\pi - 2\arcsin a + \arcsin\frac{a}{r_0} + \arcsin\frac{a}{r_1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\int_{r^*}^{1}\frac{dr}{r\sqrt{p^2-a^2}} = f(a) \qquad (V.16)$$

V.2.B. Το θεώρημα της αντιστροφής

Το θεώρημα της αντίστροφης διατυπώνεται ως εξής: ότι: Εάν η συνάρτηση $f(a)$ ορίζεται από την εξίσωση

$$f(a) = -a\int_a^{\lambda} \frac{dg(p)}{\sqrt{p^2 - a^2}} \tag{V.17}$$

για το διάστημα $0 \le a \le \lambda$, τότε η συνάρτηση $g(p)$ ορίζεται από το ολοκλήρωμα

$$g(p) - g(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_p^{\lambda} \frac{f(a)}{\sqrt{a^2 - p^2}} da \tag{V.18}$$

Αποδεικνύουμε αυτό το θεώρημα της αντιστροφής ως εξής: Αρχικά, γίνεται αλλαγή μεταβλητής $p = s$ στο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της (V.17). Εν συνεχεία, πολλαπλασιάζονται τα δυο μέλη της σχέσης (V.17) επί $\dfrac{2da}{\sqrt{a^2 - p^2}}$ και πραγματοποιείται ολοκλήρωση ως προς a με όρια ολοκλήρωσης p έως λ. Επομένως θα προκύψει:

$$2\int_p^{\lambda} \frac{f(a)}{\sqrt{a^2 - p^2}} da = -\int_p^{\lambda} \frac{2a}{\sqrt{a^2 - p^2}} \int_a^{\lambda} \frac{dg(s)}{\sqrt{s^2 - a^2}} da \tag{V.19}$$

Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης, η (V.19) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$2\int_p^{\lambda} \frac{f(a)}{\sqrt{a^2 - p^2}} da = -\int_p^{\lambda} dg(s) \int_p^{s} \frac{2a da}{\sqrt{a^2 - p^2}\sqrt{s^2 - a^2}} \tag{V.20}$$

Για την επίλυση του παραπάνω ολοκληρώματος γίνεται η αντικατάσταση:

$$a^2 = \left(s^2 - p^2\right)z + p^2 \tag{V.21}$$

από την οποία προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις

$$2ada = \left(s^2 - p^2\right)dz \Rightarrow \tag{V.22}$$

$$\Rightarrow a^2 - p^2 = \left(s^2 - p^2\right)z \Rightarrow \tag{V.23}$$

$$\Rightarrow s^2 - a^2 = \left(s^2 - p^2\right)\left(1 - z\right) \tag{V.24}$$

Με την βοήθεια των παραπάνω σχέσεων η (V.20) μετασχηματίζεται στην εξής σχέση

$$2\int_p^\lambda \frac{f(a)}{\sqrt{a^2 - p^2}}da = -\int_p^\lambda dg(s)\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}} = -\pi\int_p^\lambda dg(s) \tag{V.25}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η ολοκληρωτική σχέση (V.6). Από την (V.25) εύκολα προκύπτει ότι

$$g(p) - g(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_p^\lambda \frac{f(a)}{\sqrt{a^2 - p^2}}da \tag{V.26}$$

V.2.Γ. Απόδειξη της (4.65)

Έστω η συνάρτηση

$$\phi(a) = \frac{\pi}{2} - \arcsin a \tag{V.27}$$

η οποία είναι ένα μέρος της (4.62). Με την βοήθεια της (V.15) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\phi(a) = a\int_a^1 \frac{dp}{p\sqrt{p^2 - a^2}} = a\int_a^1 \frac{d\ln p}{\sqrt{p^2 - a^2}} \tag{V.28}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα της αντιστροφής στη σχέση (V.28) για $g(p)=\ln p$, προκύπτει ότι

$$-\ln p=\frac{2}{\pi}\int_p^1\frac{\phi(a)}{\sqrt{a^2-p^2}}da\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\ln p=\frac{2}{\pi}\int_p^1\frac{\frac{\pi}{2}-\arcsin a}{\sqrt{a^2-p^2}}da \tag{V.29}$$

V.2.Δ. Απόδειξη των Εξ.(4.69) και (4.70)

Η (4.64) για $k=1$ καταλήγει στην εξίσωση

$$\omega(p,1)=\frac{1}{\pi}\int_p^1\frac{\arcsin\frac{t}{1}}{\sqrt{t^2-p^2}}dt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega(p,1)=\frac{1}{\pi}\int_p^1\frac{\arcsin t}{\sqrt{t^2-p^2}}dt=\frac{1}{2}\frac{2}{\pi}\int_p^1\frac{\arcsin t}{\sqrt{t^2-p^2}}dt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\omega(p,1)=-\frac{2}{\pi}\int_p^1\frac{\frac{\pi}{2}-\arcsin t-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{t^2-p^2}}dt\Rightarrow \tag{V.30}$$

με την βοήθεια της (V.29), αλλά και του ολοκληρώματος (V.1), η (V.30) μετατρέπεται στην

$$2\omega(p,1)=\ln p+\int_p^1\frac{da}{\sqrt{a^2-p^2}}=\ln\left(1+\sqrt{1-p^2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega(p,1)=\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{1-p^2}\right) \tag{V.31}$$

Η (4.64) για $k=\infty$ μετασχηματίζεται στην εξίσωση

$$\omega(p,\infty)=\frac{1}{\pi}\int_{p}^{1}\frac{\arcsin 0}{\sqrt{t^2-p^2}}dt=0 \tag{V.32}$$

V.3. Απόδειξη της εξίσωσης ακτίνας σε φακό Luneburg

Για την εύρεση της τροχιάς που ακολουθούν οι ακτίνες φωτός όταν προσπίπτουν σε φακό Luneburg, απαιτείται ο υπολογισμός του παρακάτω ολοκληρώματος

$$\theta-\gamma=\int\frac{\sin\gamma dr}{r\sqrt{\cos^2\gamma-\left(r^2-1\right)^2}} \tag{V.33}$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος της (V.33) γίνεται η αντικατάσταση

$$\frac{r^2-\sin^2\gamma}{r^2\cos\gamma}=t \tag{V.34}$$

οπότε προκύπτουν τα παρακάτω για τη μεταβλητή r και τη διαφορική ποσότητα dr.

$$\frac{r^2-\sin^2\gamma}{r^2\cos\gamma}=t\Rightarrow r^2-\sin^2\gamma=tr^2\cos\gamma\Rightarrow r^2=\frac{\sin^2\gamma}{1-t\cos\gamma}\Rightarrow r=\frac{\sin\gamma}{\sqrt{1-t\cos\gamma}} \tag{V.35}$$

και

$$dr=\sin\gamma\frac{-\frac{1}{2\sqrt{1-t\cos\gamma}}}{1-t\cos\gamma}\left(-\cos\gamma\right)dt\Rightarrow dr=\frac{\sin\gamma\cos\gamma}{2\sqrt{1-t\cos\gamma}\left(1-t\cos\gamma\right)}dt \tag{V.36}$$

Αντικαθιστώντας τις (V.35) και (V.36) στην (V.33) τότε το ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται με τρόπο που υποδεικνύεται παρακάτω.

$$\theta-\gamma=\int\frac{\sin\gamma dr}{r\sqrt{\cos^2\gamma-\left(r^2-1\right)^2}}=$$

$$=\int\frac{\sin\gamma\sin\gamma\cos\gamma}{2\frac{\sin\gamma}{\sqrt{1-t\cos\gamma}}\sqrt{1-t\cos\gamma}\left(1-t\cos\gamma\right)}\frac{dt}{\sqrt{\cos^2\gamma-\left[\frac{\sin^2\gamma}{1-t\cos\gamma}-1\right]^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\sin\gamma\cos\gamma}{\left(1-t\cos\gamma\right)}\frac{dt}{\sqrt{\left(\cos\gamma-\frac{\sin^2\gamma}{1-t\cos\gamma}+1\right)\left(\cos\gamma+\frac{\sin^2\gamma}{1-t\cos\gamma}-1\right)}}\qquad(V.37)$$

Η ποσότητα μέσα στη ρίζα στη (V.37) είναι:

$$\sqrt{\left(\cos\gamma-\frac{\sin^2\gamma}{1-t\cos\gamma}+1\right)\left(\cos\gamma+\frac{\sin^2\gamma}{1-t\cos\gamma}-1\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{\cos\gamma-t\cos^2\gamma-\sin^2\gamma+1-t\cos\gamma}{1-t\cos\gamma}\frac{\cos\gamma-t\cos^2\gamma+\sin^2\gamma-1+t\cos\gamma}{1-t\cos\gamma}}=$$

$$=\frac{1}{1-t\cos\gamma}\sqrt{\left[\cos^2\gamma\left(1-t\right)+\cos\gamma\left(1-t\right)\right]\left[-\cos^2\gamma\left(1+t\right)+\cos\gamma\left(1+t\right)\right]}=$$

$$=\frac{1}{1-t\cos\gamma}\sqrt{\cos^2\gamma\left(1-t\right)\left(1+t\right)-\cos^4\gamma\left(1-t\right)\left(1+t\right)}=$$

$$=\frac{1}{1-t\cos\gamma}\sqrt{\left(1-t^2\right)\cos^2\gamma\left(1-\cos^2\gamma\right)}=\frac{\cos\gamma\sin\gamma}{1-t\cos\gamma}\sqrt{\left(1-t^2\right)}\qquad(V.38)$$

Συνδυάζοντας τη (V.37) και τη (V.38) προκύπτει

$$\theta-\gamma=\frac{1}{2}\int\frac{\sin\gamma\cos\gamma}{\left(1-t\cos\gamma\right)}\frac{dt}{\frac{\cos\gamma\sin\gamma}{1-t\cos\gamma}\sqrt{\left(1-t^2\right)}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{2}\arcsin t\qquad(V.39)$$

Τελικά, με αντικατάσταση της (V.34) στη (V.39) επαναφέρεται στο ολοκλήρωμα η μεταβλητή r.

$$\theta-\gamma=\frac{1}{2}\arcsin t \Rightarrow \theta-\gamma=\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2-\sin^2\gamma}{r^2\cos\gamma}$$

και το ζητούμενο αποδείχθηκε.

V.4. Απόδειξη της εξίσωσης ακτίνας σε φακό Fisheye

Για την εύρεση της τροχιάς που ακολουθούν οι ακτίνες φωτός όταν προσπίπτουν σε φακό Fisheye, απαιτείται ο υπολογισμός του παρακάτω ολοκληρώματος

$$I=\pm\int\frac{K\left(1+r^2\right)dr}{r\sqrt{r^2-K^2\left(1+r^2\right)^2}}=\pm\int\frac{K\left(1+r^2\right)}{rr}\frac{dr}{\sqrt{1-\left(\frac{K\left(1+r^2\right)}{r}\right)^2}} \qquad \text{(V.40)}$$

Στην (V.40) μπορεί να τεθεί:

$$u=\frac{K\left(1+r^2\right)}{r}\Rightarrow Kr^2-ur+K=0\Rightarrow r^2-\frac{u}{K}r+1=0 \qquad \text{(V.41)}$$

Η (V.41) περιλαμβάνει ένα τριώνυμο με διακρίνουσα:

$$\Delta=\left(u/K\right)^2-4 \qquad \text{(V.42)}$$

και λύσεις τις

$$r=\frac{\frac{u}{K}\pm\sqrt{\left(u/K\right)^2-4}}{2}\Rightarrow r=\frac{u}{2K}\pm\frac{\sqrt{\left(u/K\right)^2-4}}{2}\Rightarrow r=\frac{u\pm K\sqrt{\left(u/K\right)^2-4}}{2K} \qquad \text{(V.43)}$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος απαιτείται αντικατάσταση και της διαφορικής ποσότητας dr. Από την (V.43) προκύπτουν τα εξής:

$$dr = \frac{du}{2K} \pm \frac{K}{2K} \frac{1}{2\sqrt{\left(u/K\right)^2 - 4}} \frac{2u}{K^2} du \Rightarrow dr = \frac{K\sqrt{\left(u/K\right)^2 - 4} \pm u}{2K^2\sqrt{\left(u/K\right)^2 - 4}} du \qquad (V.44)$$

Θέτοντας τις (V.43) και (V.44) στην (V.40) το ολοκλήρωμα τροποποιείται ως εξής:

$$I = \pm\int \frac{K\left(1+r^2\right)}{rr} \frac{dr}{\sqrt{1-\left(\frac{K\left(1+r^2\right)}{r}\right)^2}} = \pm\int \frac{u}{r} \frac{dr}{\sqrt{1-u^2}} =$$

$$= \pm\int \frac{u}{\frac{u \pm K\sqrt{\left(u/K\right)^2 - 4}}{2K}} \frac{K\sqrt{\left(u/K\right)^2 - 4} \pm u}{2K^2\sqrt{\left(u/K\right)^2 - 4}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du =$$

$$= \pm\int \frac{2Ku}{u \pm K\sqrt{\left(u/K\right)^2 - 4}} \frac{K\sqrt{\left(u/K\right)^2 - 4} \pm u}{2K^2\sqrt{\left(u/K\right)^2 - 4}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \int \frac{u}{\sqrt{\left(u/K\right)^2 - 4}} \frac{1}{K\sqrt{1-u^2}} du \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2K}\int \frac{1}{\sqrt{\left(u/K\right)^2 - 4}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du^2 \qquad (V.45)$$

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος της (V.45) γίνεται με την αντικατάσταση

$$u^2 = t \qquad (V.46)$$

οπότε:

$$I = \frac{1}{2K}\int \frac{1}{\sqrt{t/K^2 - 4}} \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t-4K^2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t}} \qquad (V.47)$$

Νέα αντικατάσταση στην (V.47)

$$\sqrt{t-4K^2}=x \Rightarrow t-4K^2=x^2 \Rightarrow t=x^2+4K^2 \Rightarrow dt=2xdx \qquad (V.48)$$

Ο συνδυασμός των (V.47) και (V.48) δίνει:

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}\frac{2xdx}{\sqrt{1-4K^2-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-4K^2-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-4K^2}\sqrt{1-\left(x/\sqrt{1-4K^2}\right)^2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{\sqrt{1-4K^2}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(x/\sqrt{1-4K^2}\right)^2}} \qquad (V.49)$$

Τέλος, γίνεται η αντικατάσταση

$$\frac{x}{\sqrt{1-4K^2}}=y \Rightarrow dx=\sqrt{1-4K^2}dy \qquad (V.50)$$

οπότε:

$$I=\frac{1}{\sqrt{1-4K^2}}\int\frac{\sqrt{1-4K^2}dy}{\sqrt{1-y^2}}=\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\arcsin y+C\xrightarrow{(V.50)}I=\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1-4K^2}}\right)+C\Rightarrow$$

$$\xrightarrow{(V.48)}I=\arcsin\frac{\sqrt{t-4K^2}}{\sqrt{1-4K^2}}+C\xrightarrow{(V.46)}I=\arcsin\frac{\sqrt{u^2-4K^2}}{\sqrt{1-4K^2}}+C\xrightarrow{(V.41)}$$

$$\Rightarrow I=\arcsin\frac{\sqrt{\frac{K^2\left(1+r^2\right)^2}{r^2}-4K^2}}{\sqrt{1-4K^2}}+C=$$

$$=\arcsin\left[\frac{K}{\sqrt{1-4K^2}}\sqrt{\frac{1+r^4+2r^2-4r^2}{r^2}}\right]+C=\arcsin\left[\frac{K}{\sqrt{1-4K^2}}\sqrt{\left(\frac{r^2-1}{r}\right)^2}\right]+C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \pm\int \frac{K\left(1+r^2\right)dr}{r\sqrt{r^2 - K^2\left(1+r^2\right)^2}} = \arcsin\frac{K}{\sqrt{1-4K^2}}\frac{r^2-1}{r} + C \qquad (V.51)$$

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

J. D. Jackson: 'Classical Electrodynamics', 1975

Morse and Feshbach: 'Methods of Theoretical Physics; International Series in Pure and Applied Physics', Part I & II, 1953

E. E. Kriezis, D. P. Chrissoulidis, A. G. Papagiannakis: 'Electromagnetics and Optics', 1992

Θ. Δ. Τσιμπούκης: 'Εισαγωγή στη Βασική Θεωρία του Ηλεκτρομαγνητικού Πεδίου' Τόμοι I, II, III, 1991

Δ. Π. Χρυσουλίδης: 'Θεωρία Σκέδασης', Α.Π.Θ 1995

Μ. Π. Ιωαννίδου: 'Ηλεκτρομαγνητική Σκέδαση από Πολύκεντρες Σφαιρικές Διατάξεις', Α.Π.Θ 1996

Σ. Σ. Κουρής: 'Στοιχεία Θεωρίας Κεραιών και Διαδόσεως Ηλεκτρομαγνητικών Κυμάτων', Α.Π.Θ. 1996

Abramowitz M and A. Stegun: 'Handbook of Mathematical Functions', Dover, New York, 1972

Collin R .E.: 'Field Theory of Guided Waves', IEEE Press, New York, 1991

Cruzan O. R.: 'Translational Addition Theorems for spherical Vector Wave Functions', Quart. Appl. Math. 33-40 (1962)

J. A. Stratton: 'Electromagnetic Theory' (McGraw-Hill, New York), 1941

S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik 'Table of Integrals, Series and Product', Academic, New York 1980

C. T. Tai 'Maxwell Fisheye treated by Maxwell Equations' Nature 182, 1958

R. K. Luneburg 'Mathematical Theory of Optics ', University of California Press, Berkley, 1964.

S.P. Morgan, 'General solution of the Luneburg lens problem' J.Applied Physics, vol 29, no 9, September 1958, pp1358-1368.

A.S. Gutman, 'Modified Luneburg lens' J.Applied Physics, vol 25, no 7 July 1954

J.M. Gordon 'Sperical gradient-index lenses as perfect imaging and maximum power tranfer devices' Applied optics, 39, 1,August 2000,pp3825-3832.

Y.Koike, Y sumi, Y. Ohtsuka 'Spherical gradient-index sphere lens' Applied optics, vol 25, no 19, 1 October 1986

P. Dixon 'A broadband, High-Gain, Steerable Luneberg Lens' Applied Microwave and Wireless

M. Rayner 'Use of the Luneburg Lens for Low Profile Applications' Microwave Product, December 1999

J. Graeme, A. Parfitt, J. Kot 'A Case for the Luneburg Lens as the Antenna Element for the Square Kilometre Array Radio Telescope'

S.K. Tewksbury F.Boesch 'Luneburg Lens: Initial Comments'

M. Rayler 'A low profile Luneburg lens Arborne GBS antenna' cited at http://www.ecs.umass.edu/ece/allerton/papers/GBS/

'Tri-lens Radar Reflectors-Luneberg lens Technology' cited at http://www.buoys.com.au./luneberg.html

'An Airborne Global Broadcast Servise/Military Stragestic and Tactical Relay Satellite Wideband Antenna' cited at http://www.afrlhorizons.com/Briefs/0009/IF9906.html

N.C.Skaropoulos, M.P. Ioannidou, D.P. Xrissoulidis 'Induced EM Field in a Layered Eccentric Spheres Model of the Head: Plane-Wave and Localized Source Exposure IEEE Transaction on Microwave Theory and Techniques, vol. 44, no 10, October 1996.

N.C. Skaropoulos, M.P. Ioannidou, D.P. Xrisoulidis: 'Indirect mode matching solution to scattering from a dielectric sphere with an eccentric inclusion' Journal Optics Soc. Am. A. vol. 11, no 6, pp. 1859-1866, June 1994.

J. R. Sanford 'A Luneburg Lens Update' republished in IEEE Antennas and Propagation Magazine, vol. 37, no 1, February 1995

S.K. Yao, D.B. Anderson, R.R. August, and C.M. Oania 'Guided-wave optical thin-film Luneberg lenses: fabrication technique and properties' Applied Optics, vol. 18, pp. 4067-4079, 1979

E. Colombini, 'Design of thin-film Luneburg lenses for maximum focal length control' Appl. Optics, vol. 20, pp.3589-3593, 1981

D.A. Bryan et al, 'Development of a tantalum pentoxide Luneberg lens.' SPIE Proc. Of Integrated Optics II, pp. 2-8, January 1982

S.Doric and E.Munro, 'General solution of the non-full-aperture Luneburg lens problem,' J.Opt.Soc.Am. vol. 73, pp. 1083-1086, 1983.

S. Doric, 'Generalized non-ful-aperture Luneburg lens: a new solution,' Opt. Eng. vol. 32, pp. 2118-2121, 1993.

A.Fletcher, T. Murphy, and A. Young, 'Solutions of two optical problems,' Proc. R. Soc. London Ser. A 223,pp. 216-225, 1954.

S.P. Morgan, 'Microwave Heating of a Luneberg lens,' Bell System Technical Journal, pp. 659-677, March 1964.

S. P. Morgan, 'Scattering loses in a Large Luneberg Lens Due to Random Dielectric Inhomogeneitie'. Bell System Technical Journal, pp. 679-696, March 1964

E. F. Buckley, 'Stepped-Index Luneberg Lenses: Antennas and Reflective Devices,' Electronic Devices vol 8,April 13, 1960.

H.J. Gerritsen and S.J. Mckenna, 'The Luneburg lens and the importance of transmission in establishing contact with extraterrestrial civilizations', Icarus, vol. 26, pp. 250-256, 1975

P.G. Ingerson , TRW Corp, 'Feasibility of Luneberg lens for 20/30 GHz applications,' cited at http://emild.jpl.nasa.gov/EMLIB/APS98/

Computer Generated Angular Fisheye Projections Written by Paul Bourke May 2001

Andrew D. Greenwood 'Wave Propagation in Inhomogenous Dielectric Lenses';

Haret C.Rosu, Marco Reyes 'Supersymmetric features of the Maxwell Fisheye Lens' , SPIE Vol.2370, pp. 436-439, 1996

Paul Janecek, Pearl Pu 'A Framework for Designing Fisheye Views to Support Multiple Semantic Contexts' Swiss Federal Institute of Technology

Furnas, G.W. 'Generalized Fisheye Views In: Proceedings of ACM CHI86 Conference on Human Factors in Computer Systems' pp.16-23,1986

Sarkar M, and Brown (1992) 'Graphical Fisheye Views of Graphs' pp83-91

Noik, E.G. (1996) 'Dynamic Fisheye Views: Combining Dynamic Queries and Mapping with Database Views', Department of Computer Science pp.142 University of Toronto, Ontario, Canada.

Bartram F, Dill J, and Henigman F (1995) 'The Continuous Zoom: A Constrained Fisheye Technique for Viewing and Navigating Large Information Spaces' Proceedings of the ACM Symposium on User Interface Software and Technology pp.207-215.