Διδάσκων : Γουλιάνας Κωνσταντίνος
Email : gouliana@it.teithe.gr Ιστοσελίδα : www.it.teithe.gr/~gouliana

# Τ Ε Σ Τ  Π Ρ Ο Ο Δ Ο Υ

# Α Π Α Ν Τ Η Σ Ε Ι Σ

## Θέμα 1

a) Να ***αποδειχθεί*** ότι το Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα της στρογγυλοποίησης με **στρογγύλευση** ενός αριθμού στο δυαδικό σύστημα σε $k$ σημαντικά ψηφία είναι $2^{-k}$

**Απάντηση**: Σελίδα 18

b) Αφού μετατραπεί ο αριθμός $x = 0.35_{10}$ σε δυαδικό, να γίνει στρογγυλοποίηση με **στρογγύλευση** σε 4 σημαντικά ψηφία και να βρεθεί το **απόλυτο σχετικό σφάλμα** της στρογγυλοποίησης και το **μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα** της στρογγυλοποίησης.

**Απάντηση:**

$$
\begin{array}{lllllllllll}
x = 0.35_{10} = & 0.7 \rightarrow & 1.4 \rightarrow & 0.8 \rightarrow & 1.6 \rightarrow & 1.2 \rightarrow & 0.4 \rightarrow & 0.8 \rightarrow & 1.6 & \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
= 0.0101100110011..._2 = & 0.10110011... \times 2^{-1} \\
 & +0.00001 \\
\hline
 & 0.10111011 \cdot 2^{-1} =
\end{array}
$$

$$= 0.1011 \cdot 2^{-1} = 0.01011_2 = 2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-5} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{8+2+1}{32} = \frac{11}{32}$$

$$|\varepsilon| = |x^* - x| = \left|\frac{11}{32} - 0.35\right| = \left|\frac{11 - 11.2}{32}\right| = \frac{0.2}{32} = \frac{2}{320} = \frac{1}{160}$$

$$|\varepsilon_\sigma| = \frac{|\varepsilon|}{|x|} = \frac{\frac{1}{160}}{0.35} = \frac{1}{56} = 2^{-4} = \frac{1}{16}$$

## Θέμα 2

α) Να ***βρεθεί*** με το Σχήμα του **Horner** η τιμή **όλων** των **παραγώγων** του Πολυωνύμου $P(x) = -2x^4 + 3x$ στο $\xi = -2$ ( $P^{(k)}(\xi) = r_k \cdot k!,\ k = 1..4$ ).

<u>**Απάντηση:**</u>

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | -2 | 0 | 0 | 3 | 0 |
| -2 | | 4 | -8 | 16 | -38 |
| | -2 | 4 | -8 | 19 | $\boxed{-38 = r_0}$ |
| -2 | | 4 | -16 | 48 | |
| | -2 | 8 | -24 | $\boxed{67 = r_1}$ | |
| -2 | | 4 | -24 | | |
| | -2 | 12 | $\boxed{-48 = r_2}$ | | |
| -2 | | 4 | | | |
| | -2 | $\boxed{16 = r_3}$ | | | |
| | $r_4$ | | | | |

$p'(-2) = 1! \cdot r_1 = 1 \cdot 67 = 67$

$p''(-2) = 2! \cdot r_2 = 2(-48) = -96$

$p'''(-2) = 3! \cdot r_3 = 6 \cdot (16) = 96$

$p''''\ (-2) = 4! \cdot r_4 = 24 \cdot (-2) = -48$

## Θέμα 3

α) Αν **αναπτυχθεί** σε απειρο-σειρά MacLaurin η συνάρτηση $s = f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ προκύπτει ο **γενικός τύπος** $s = f(x) = \dfrac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} x^i$ . Να βρεθεί ο **γενικός** τύπος με τον οποίο δίνεται η **διόρθωση** $r_n(x) = s - s^* = f(x) - f^*(x)$, όταν στην προσεγγιστική τιμή $s^* = f^*(x)$χρησιμοποιηθούν οι ***n*** πρώτοι όροι.

<u>**Απάντηση:**</u>

$$r_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x^1 - \sum_{i=1}^{n} x^i = \sum_{i=n+1}^{\infty} x^i = x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots = x^{n+1}(1 + x + x^2 + \ldots) = \frac{x^n + 1}{1-x}$$

**b)** Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα στο a, να υπολογισθούν i) Η ακριβής τιμή $s = f(x) = \frac{x}{1-x}$ ii) Η προσεγγιστική τιμή $s^* = f^*(x)$ για $x = \frac{1}{3}$ και $n = 4$ και iii) με τη χρήση του τύπου που βρέθηκε στο ερώτημα a, το $r_n(x) = r_4\left(\frac{1}{3}\right) = s - s^* = f(x) - f^*(x)$.

__Απάντηση:__

$$f(x) = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$f^*(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = \frac{27+9+3+1}{81} = \frac{40}{81}$$

$$r_n(x) = \frac{x^n+1}{1-x} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{4+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3^5}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2\cdot 3^4} = \frac{1}{2\cdot 81} = \frac{1}{162}$$

$$r_n(x) = f(x) - f^*(x) = \frac{1}{2} - \frac{40}{81} = \frac{81-80}{162} = \frac{1}{162}$$