Διδάσκων : Γουλιάνας Κωνσταντίνος
Email : gouliana@it.teithe.gr Ιστοσελίδα : www.it.teithe.gr/~gouliana

Α Π Α Ν Τ Η Σ Ε Ι Σ
Τ Ε Σ Τ Π Ρ Ο Ο Δ Ο Υ #1β

Θέμα 1

a) Να ***αποδειχθεί*** ότι το Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα του πηλίκου *2* αριθμών x, y ισούται με το άθροισμα των Απολύτων Σχετικών Σφαλμάτων των *2* αριθμών ($|\varepsilon_{\sigma(x/y)}| \leq |\varepsilon_{\sigma x}| + |\varepsilon_{\sigma y}|$).

Απάντηση: Σημειώσεις, Σελίδα 28.

b) Αν $x^* = 6.0$ και $y^* = 3.0$ οι στρογγυλοποιημένες τιμές 2 αριθμών x, y, να βρεθεί το **Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα** και το **Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα** του πηλίκου x / y, όταν οι αριθμοί x και y δίνονται στρογγυλοποιημένοι σε *2* δεκαδικά ψηφία. Αν $x = 6.03$ και $y = 3.00$ οι ακριβείς τιμές των 2 αριθμών x, y, να βρεθεί και το **Απόλυτο Σφάλμα** του πηλίκου x / y.

Απάντηση:

$$|\varepsilon_{\sigma x}| = \frac{|\varepsilon_x|}{|x^*|} \leq \frac{\frac{1}{2} * 10^{-1}}{6} = \frac{1}{120}$$

$$|\varepsilon_{\sigma y}| = \frac{|\varepsilon_y|}{|y^*|} \leq \frac{\frac{1}{2} * 10^{-1}}{3} = \frac{1}{60}$$

$$|\varepsilon_{\sigma(x/y)}| = |\varepsilon_{\sigma x}| + |\varepsilon_{\sigma y}| = \frac{1}{120} + \frac{1}{60} = \frac{1+2}{120} = \frac{3}{120} = \frac{1}{40}$$

$$\frac{x^*}{y^*} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\frac{x}{y} = \frac{6.03}{3} = 2.01$$

$$|\varepsilon_{\sigma(x/y)}| = \frac{|\varepsilon x/y|}{|x^*/y^*|} \Rightarrow |\varepsilon x/y| = |\varepsilon_{\sigma(x/y)}| \, |x^*/y^*| \leq \frac{1}{40} 2 = \frac{1}{20} = \frac{5}{100}$$

$$|\varepsilon x/y| = |2.0 - 2.01| = 0.01 = \frac{1}{100}$$

c) Αφού μετατραπεί ο αριθμός $x = 0.45_{10}$ σε δυαδικό, να γίνει στρογγυλοποίηση σε 5 σημαντικά ψηφία και να βρεθεί το **απόλυτο σχετικό σφάλμα** της στρογγυλοποίησης και το **μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα** της στρογγυλοποίησης.

<u>Απάντηση:</u>

$$x = 0.45 * 2 \to \underset{\displaystyle 0}{\underset{\downarrow}{0.9 * 2}} \to \underset{\displaystyle 1}{\underset{\downarrow}{1.8}} \to \underset{\displaystyle 1}{\underset{\downarrow}{1.6}} \to \underset{\displaystyle 1}{\underset{\downarrow}{1.2}} \to \underset{\displaystyle 0}{\underset{\downarrow}{0.4}} \to \underset{\displaystyle 0}{\underset{\downarrow}{0.8}} \to \cdots$$

$$x = 0.45 = 0.011100110011\ldots$$
$$+\ 0.0000001$$

$$0.011101010011.. = 0.011101 = x^*$$

$$x^* = 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} = \frac{16+8+4+1}{64} = \frac{29}{64}$$

$$|\varepsilon| = |x^* - x| = \left|\frac{29}{64} - 0.45\right| = \left|\frac{29-28.8}{64}\right| = \frac{0.2}{64}$$

$$|\varepsilon_\sigma| = \left|\frac{\varepsilon}{x}\right| = \frac{0.2/64}{0.45} = \frac{0.2}{28.8} = \frac{2}{288} = \frac{1}{144} \le 2^{-5} = \frac{1}{32}$$

d) Να ***δειχθεί*** ότι με την εφαρμογή του Σχήματος του **Horner** μπορεί να βρεθεί η τιμή **ενός Πολυωνύμου** $P(x)$ σε κάποιο ξ, δηλαδή το $P(\xi)$.

<u>Απάντηση:</u> Σημειώσεις, Σελίδα 40.

e) Να ***βρεθεί*** με το Σχήμα του **Horner** η τιμή **όλων** των **παραγώγων** του Πολυωνύμου $P(x) = -2x^5 + x^3 - 2x$ στο $\xi = -1$ ($P^{(k)}(\xi) = r_k \cdot k!,\ k = 1..5$).

<u>Απάντηση:</u>

	-2	0	1	0	-2	0
-1		2	-2	1	-1	3
	-2	2	-1	1	-3	| $3=r_0$
-1		2	-4	5	-6	
	-2	4	-5	6	| $-9=r_1$	
-1		2	-6	11		
	-2	6	-11	| $17=r_2$		
-1		2	-8			
	-2	8	| $-19=r_3$			
-1		2				
	$-2=r_5$	| $10=r_4$				

$P'(-1) = r_1 * 1! = -9 * 1 = -9$
$P''(-1) = r_2 * 2! = 17 * 2 = 34$
$P'''(-1) = r_3 * 3! = -19 * 6 = -114$
$P^{(4)}(-1) = r_4 * 4! = 10 * 24 = 240$
$P^{(5)}(-1) = r_5 * 5! = -2 * 120 = -240$

Θέμα 2

a) Να **αναπτυχθεί** σε απειρο-σειρά MacLaurin η συνάρτηση $s = f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ (**γενικός** τύπος

$$s = f(x) = \frac{1-x}{1+x} = 1 - 2 \cdot x \cdot (1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots) = 1 - 2 \cdot x \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i \text{).}$$

Υπόδειξη : $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n \cdot x^n + \ldots$

Απάντηση:

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} = (1-x)(1 - x + x^2 - x^3 \ \ldots) = 1 - x + x^2 - x^3 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$
$$= 1 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + \ \ldots \ = 1 - 2x\,(1 - x + x^2 - x^3 + \ \ldots) = 1 - 2x \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i$$

b) Να βρεθεί ο **γενικός** τύπος με τον οποίο δίνεται η **διόρθωση** $r_n(x) = s - s^* = f(x) - f^*(x)$, όταν στην προσεγγιστική τιμή $s^* = f^*(x)$ χρησιμοποιηθούν οι πρώτοι όροι από το ***0*** μέχρι το ***n***.

Απάντηση:

$$r_n(x) = s - s^* = f(x) - f^*(x) = 1 - 2x \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i - \left(1 - 2x \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x^i\right) =$$
$$= -2x \textstyle\sum_{i=n+1}^{\infty} (-1)^i x^i = -2x\,((-1)^{n+1} x^{n+1} + (-1)^{n+2} x^{n+2} + \ \ldots)$$
$$= -2x\,(-1)^{n+1} x^{n+1} (1 - x + x^2 - x^3 + \ \ldots) = \frac{-2x\,(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$$

c) Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα που βρέθηκε στο a) να υπολογισθεί η ακριβής τιμή $s = f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ και η προσεγγιστική τιμή $s^* = f^*(x)$ για $x = \frac{1}{3}$ και $n = 3$.

Απάντηση:

$$f(x) = \frac{1 - {}^{1}\!/_{3}}{1 + {}^{1}\!/_{3}} = \frac{{}^{2}\!/_{3}}{{}^{4}\!/_{3}} = \frac{1}{2}$$

$$f^*(x) = 1 - 2 * \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^3\right) = 1 - \frac{2}{3} * \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27}\right) =$$

$$= 1 - \frac{2}{3} * \left(\frac{27 - 9 + 3 - 1}{27} \right) = 1 - \frac{2}{3} * \left(\frac{20}{27} \right) = 1 - \frac{40}{81} = \frac{81 - 40}{81} = \frac{41}{81}$$

d) Να υπολογισθεί το $r_n(x) = r_3\left(\frac{1}{3}\right) = s - s^* = f(x) - f^*(x)$ με τη χρήση του τύπου που βρέθηκε στο ερώτημα b).

<u>Απάντηση:</u>

$$r_3\left({}^1/_3\right) = s - s^* = f\left({}^1/_3\right) - f^*\left({}^1/_3\right) = \frac{1}{2} - \frac{40}{81} = \frac{81 - 82}{162} = -\frac{1}{162}$$

$$r_3\left({}^1/_3\right) = \frac{-2 * \frac{1}{3} (-1)^{3+1} \left({}^1/_3\right)^{3+1}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{-2 * \frac{1}{3} * \frac{1}{3^4}}{\frac{4}{3}} = -\frac{2 * 3}{4 * 3^5} = -\frac{1}{2 * 3^4} = -\frac{1}{2 * 81} = -\frac{1}{162}$$