Διδάσκων : Γουλιάνας Κωνσταντίνος
Email : gouliana@it.teithe.gr Ιστοσελίδα : www.it.teithe.gr/~gouliana

Α Π Α Ν Τ Η Σ Ε Ι Σ

Θέμα 1

a) Να ***αποδειχθεί*** ότι το Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα του πηλίκου *2* αριθμών x, y ισούται με το άθροισμα των Απολύτων Σχετικών Σφαλμάτων των *2* αριθμών ($|\varepsilon_{\sigma(x/y)}| \le |\varepsilon_{\sigma x}| + |\varepsilon_{\sigma y}|$).

<u>Απάντηση:</u> Σημειώσεις, Σελίδα 28.

b) Αν $x^* = 2.5$ και $y^* = 2.0$ οι στρογγυλοποιημένες τιμές 2 αριθμών x, y, να βρεθεί το **Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα** και το **Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα** του πηλίκου x / y, όταν οι αριθμοί είναι στρογγυλεμένοι σε *1* δ. ψ.

<u>Απάντηση:</u>

$$\frac{x^*}{y^*} = \frac{2.5}{2.0} = 1.25$$

$$|\varepsilon_{\sigma x}| = \frac{|\varepsilon_x|}{|x^*|} \le \frac{\frac{1}{2}\,10^{-1}}{2.5} = \frac{1}{50}$$

$$|\varepsilon_{\sigma y}| = \frac{|\varepsilon_y|}{|y^*|} \le \frac{\frac{1}{2}\,10^{-1}}{2} = \frac{1}{40}$$

$$|\varepsilon_{\sigma x}| + |\varepsilon_{\sigma y}| \le \frac{1}{50} + \frac{1}{40} = \frac{90}{2000} = \frac{9}{200}$$

$$\left|\varepsilon_{\sigma({}^{x}/_{y})}\right| = \frac{\left|\varepsilon_{{}^{x}/_{y}}\right|}{\left|{}^{x^*}/_{y^*}\right|} \Rightarrow \left|\varepsilon_{{}^{x}/_{y}}\right| = \left|\varepsilon_{\sigma({}^{x}/_{y})}\right| \cdot \left|{}^{x^*}/_{y^*}\right| \le \frac{9}{200} \cdot 1.25 = \frac{11.25}{200}$$

c) Να αναπτυχθεί η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1-x}$ σε απειρο-σειρά MacLaurin.

<u>Απάντηση:</u> Σημειώσεις, Σελίδα 34

d) Να υπολογισθεί η ακριβής και η προσεγγιστική τιμή $f^*(x) = \sum_{i=0}^{n} x^i$ για $x = \frac{1}{4}$, αν χρησιμοποιηθούν οι πρώτοι όροι μέχρι και τον $n = 4$.

<u>Απάντηση:</u>

$$f^*(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} = \frac{256 + 64 + 16 + 4 + 1}{64} = \frac{341}{256} = 1.33203$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1 - {}^{1}/_{4}} = \frac{1}{{}^{3}/_{4}} = \frac{4}{3} = 1.33333$$

e) Να υπολογισθεί το $r_n(x) = r_4(x) = f(x) - f^*(x)$.

Απάντηση:

$r_4(x) = f(x) - f^*(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{(1/4)^4}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4^4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3 \cdot 4^3} = \frac{1}{3 \cdot 64} = \frac{1}{192}$, $\quad (r_4(x) = 1.33333 - 1.33203 = 0.005130)$

Θέμα 2

a) Να **περιγραφεί** με σχήμα (Γεωμετρική Ερμηνεία) ο αλγόριθμος της Μεθόδου της Διχοτόμησης για την εύρεση της ρίζας ξ της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $[a_0, b_0]$.

i. Στο σχήμα θα φαίνονται τα διαστήματα $[a_0, b_0], [a_1, b_1], \ldots$ και τουλάχιστον οι 2 πρώτες προσεγγίσεις x_0, x_1 .

ii. Ποιος είναι ο **γενικός** τύπος της μεθόδου.

Απάντηση: Σημειώσεις, Σελίδα 55.

b) Για την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{2} \right)^2$ με αρχικό διάστημα το $[a_0, b_0] = \left[\frac{1}{4}, 1 \right]$ να **βρεθούν** αναλυτικά οι προσεγγίσεις που απατούνται για την εύρεση της ρίζας της $f(x)$ με ακρίβεια **1** δεκαδικού ψηφίου.

Απάντηση:

$$x_0 = \frac{1/4 + 1}{2} = \frac{1/4 + 4/4}{2} = \frac{5}{8} = 0.625$$

$$|\varepsilon_0| = |x_0 - \xi| = \left| \frac{5}{8} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{8} = 0.125 > \frac{1}{2} * 10^{-1}$$

$$x_1 = \frac{1/4 + 5/8}{2} = \frac{7}{16} = 0.438$$

$$|\varepsilon_1| = |x_1 - \xi| = \left| \frac{7}{16} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{16} = 0.0625 > \frac{1}{2} * 10^{-1}$$

$$x_3 = \frac{7/16 + 5/8}{2} = \frac{17}{32} = 0.531$$

$$|\varepsilon_2| = |x_2 - \xi| = \left| \frac{17}{32} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{32} = 0.03125 < 0.05 = \frac{1}{2} * 10^{-1}$$

c) Αν $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{2} \right)^2$ να **βρεθεί** η τάξη σύγκλισης της μεθόδου Newton-Raphson στο διάστημα $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right]$.

Απάντηση:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{2} \right)^2$$

$$f'(x) = \left(x - 1/2 \right)$$

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\frac{1}{2}\cdot(x-\frac{1}{2})^2}{x-\frac{1}{2}} = x - \frac{1}{2}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right) \quad = x - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2x+1}{4} = g(x)$$

$g'(x) = \frac{1}{2} < 1$, επομένως η σύγκλιση είναι γραμμική.

d) Με αρχική τιμή το $x_0 = \dfrac{1}{4}$, να **βρεθούν** αναλυτικά οι προσεγγίσεις που απαιτούνται για την εύρεση της ρίζας της $f(x)$ με ακρίβεια **1** δεκαδικού ψηφίου.

Απάντηση:

$x_1 = \frac{2\cdot\frac{1}{4}+1}{4} = \frac{3}{8} = 0.375, \quad |\varepsilon_1| = |x_1 - \xi| = |0.375 - 0.5| = 0.125 > 0.05 = \frac{1}{2} * 10^{-1}$

$x_2 = \frac{2\cdot\frac{3}{8}+1}{4} = \frac{7}{16} = 0.438, \quad |\varepsilon_2| = |x_2 - \xi| = |0.438 - 0.5| = 0.062 > 0.05 = \frac{1}{2} * 10^{-1}$

$x_3 = \frac{2\cdot\frac{7}{16}+1}{4} = \frac{15}{32} = 0.468, \quad |\varepsilon_3| = |x_3 - \xi| = |0.468 - 0.5| = 0.032 < 0.05 = \frac{1}{2} * 10^{-1}$

Θέμα 3

Δίνονται τα παρακάτω συστήματα :

$$A\cdot x = b \;\; ή \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad C\cdot x = d \;\; ή \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

i. Να ***βρεθεί*** ποιο σύστημα έχει διαγώνια υπεροχή, οπότε μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο Gauss-Seidel.

Απάντηση:

Σύστημα $A\cdot x = b$

$|a_{11}| = 2 > |a_{12}| + |a_{13}| = 1 + 0 = 1$

$|a_{22}| = 3 > |a_{22}| + |a_{23}| = 1 + 1 = 2$

$|a_{33}| = 2 > |a_{32}| + |a_{33}| = 1 + 0 = 1$

Σύστημα $C\cdot x = d$

$|a_{11}| = 2 > |a_{12}| + |a_{13}| = 1 + 0 = 1$

$|a_{22}| = 3 > |a_{22}| + |a_{23}| = 1 + 1 = 2$

$|a_{33}| = 1 = |a_{32}| + |a_{33}| = 1 + 0 = 1$

Άρα υπεροχή κατά γραμμές έχει το Σύστημα $A\cdot x = b$.

ii. Γι' αυτό το σύστημα, να **βρεθούν** με τη μέθοδο Gauss-Seidel οι 2 πρώτες προσεγγίσεις $x^{(1)} = \left[x_1^{(1)} \quad x_2^{(1)} \quad x_3^{(1)}\right]$, $x^{(2)} = \left[x_1^{(2)} \quad x_2^{(2)} \quad x_3^{(2)}\right]$, αν χρησιμοποιηθούν σαν αρχικές τιμές οι $x^{(0)} = \left[x_1 \quad x_2 \quad x_3\right]^{(0)} = \left[x_1^{(0)} \quad x_2^{(0)} \quad x_3^{(0)}\right] = \left[\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\right]$

Απάντηση:

$x^{(0)} = [1/_2, 1/_2, 1/_2]$

$$x_1^{(1)} = \frac{1+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$
$$x_2^{(1)} = \frac{3-{}^{3}\!/_{4}+{}^{1}\!/_{2}}{3} = \frac{\frac{12-3+2}{4}}{3} = \frac{11}{12}$$
$$x_3^{(1)} = \frac{-3+{}^{3}\!/_{4}}{-2} = \frac{-12+3}{-8} = \frac{-9}{-8} = \frac{9}{8}$$

$$x_1^{(2)} = \frac{1+\frac{11}{12}}{2} = \frac{12+11}{24} = \frac{23}{24}$$
$$x_2^{(2)} = \frac{3-{}^{23}\!/_{4}+{}^{9}\!/_{8}}{3} = \frac{72-23+27}{72} = \frac{76}{72} = \frac{19}{18}$$
$$x_3^{(2)} = \frac{-3+{}^{23}\!/_{24}}{-2} = \frac{-72+23}{-48} = \frac{-49}{-48} = \frac{49}{48}$$