Διδάσκων : Γουλιάνας Κωνσταντίνος
Email : gouliana@it.teithe.gr Ιστοσελίδα : www.it.teithe.gr/~gouliana

Α Π Α Ν Τ Η Σ Ε Ι Σ

Θέμα 1

a) Να ***αποδειχθεί*** ότι το Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα του γινομένου *2* αριθμών x, y ισούται με το άθροισμα των Απολύτων Σχετικών Σφαλμάτων των *2* αριθμών ($|\varepsilon_{\sigma(x\cdot y)}| \leq |\varepsilon_{\sigma x}| + |\varepsilon_{\sigma y}|$).

Απάντηση : Σημειώσεις, Σελίδα 27.

b) Αν $x^* = 2.5$ και $y^* = 2.0$ οι στρογγυλοποιημένες τιμές 2 αριθμών x, y, να βρεθεί το **Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα** και το **Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα** του γινομένου $x \cdot y$, όταν οι αριθμοί είναι στρογγυλεμένοι σε *1* δ. ψ.

Απάντηση

$$x^* * y^* = 5.0$$

$$|\varepsilon_{\sigma x}| = \frac{|\varepsilon_x|}{|x^*|} \leq \frac{\frac{1}{2} * 10^{-1}}{2.5} = \frac{1}{50}$$

$$|\varepsilon_{\sigma y}| = \frac{|\varepsilon_y|}{|y^*|} \leq \frac{\frac{1}{2} * 10^{-1}}{2} = \frac{1}{40}$$

$$\left|\varepsilon_{\sigma(x/y)}\right| = |\varepsilon_{\sigma x}| + |\varepsilon_{\sigma y}| = \frac{1}{50} + \frac{1}{40} = \frac{90}{2000} = \frac{9}{200}$$

$$\left|\varepsilon_{\sigma(x/y)}\right| = \frac{\left|\varepsilon x/y\right|}{\left|x^*/y^*\right|} => \left|\varepsilon x/y\right| = \left|\varepsilon_{\sigma(x/y)}\right| * \left|x^*/y^*\right| \leq \frac{9}{200} * 5 = \frac{9}{40} = \frac{45}{200}$$

c) Να αναπτυχθεί η συνάρτηση $f(x) = e^x$ σε απειρο-σειρά MacLaurin.

Απάντηση

$$f(x) = e^x, \quad f(0) = 1$$
$$f'(x) = f''(x) = \cdots = e^x, \quad f'(0) = f''(0) = \cdots = 1$$
$$e^x = f(0) + \frac{x \cdot f'(0)}{1!} + \frac{x^2 \cdot f''(0)}{2!} + \cdots + \frac{x^n \cdot f^{(n)}(0)}{n!} + \cdots = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

d) Να υπολογισθεί η προσεγγιστική τιμή $f^*(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}$ για $x=1$, αν χρησιμοποιηθούν οι $n=4$ πρώτοι όροι (ακριβής τιμή $f(x)=e=2.7182817$).

Απάντηση

$e=2.7182817$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}=\frac{24+24+12+4+1}{24}=\frac{65}{24}=2.70833$$

e) Να υπολογισθεί το $r_n(x)=r_4(x)=f(x)-f^*(x)$ για $x=1$.

Απάντηση

$$r_n(x)=r_4(x)=f(x)-f^*(x)=2.7182817-2.70833=0.0099517$$

Θέμα 2

a) Αν η εξίσωση $x=g(x)$ αποτελεί μια αναδιάταξη της εξίσωσης $f(x)=0$, με ρίζα το $\xi: f(\xi)=0$, $f(x), g(x), g'(x)$ συνεχείς και παραγωγίσιμες στο διάστημα $[a,b]$, να **δειχθεί** ότι αν $g'(\xi)=0,\ g''(\xi)\neq 0$, τότε η σύγκλιση είναι Τετραγωνική.

Απάντηση : Σημειώσεις, Σελίδα 70.

b) Να **βρεθεί** το είδος (τάξη) της σύγκλισης της αναδιάταξης $x=g(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}$ στη θετική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$.

Απάντηση

$$x=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}=g\,(x\,)=\frac{x^2+2}{2x}=>2x^2-x^2-2=0=>x^2-2=0=>x=\pm\sqrt{2}$$
$$g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}$$
$$g'(\sqrt{2})=\frac{1}{2}-\frac{1}{(\sqrt{2})^2}=0$$
$$g''(x)=\frac{2}{x^3}$$
$$g'(\sqrt{2})=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0,$$ επομένως η σύγκλιση είναι τετραγωνική.

c) Με αρχική τιμή το $x_0 = 1$, να **βρεθούν** αναλυτικά οι προσεγγίσεις που απαιτούνται για την εύρεση της θετικής ρίζας με ακρίβεια **1** δεκαδικού ψηφίου.

<u>Απάντηση</u>

$$x_1 = \frac{x}{2} + \frac{1}{1} = \frac{3}{2}$$

$$|\varepsilon_1| = |x_1 - \xi| = |1.5 - 1.414214| = 0.085786$$

$$x_2 = \frac{3/2}{2} + \frac{1}{3/2} = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{9+8}{12} = \frac{17}{12} = 1.41666$$

$$|\varepsilon_2| = |x_2 - \xi| = |1.416660 - 1.414214| = 0.002446 < 0.05 = \frac{1}{2} * 10^{-1}$$

d) Αν $f(x) = 2 \cdot (x-1)^2$ να **βρεθεί** η τάξη σύγκλισης της μεθόδου Newton-Raphson στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

<u>Απάντηση</u>

$$f(x) = 2(x-1)^2,\ f'(x) = 4(x-1)$$

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{2(x-1)^2}{4(x-1)} = \frac{2x - x + 1}{2} = \frac{x+1}{2} = g(x)$$

$g'(x) = \frac{1}{2} < 1$, επομένως η σύγκλιση είναι γραμμική.

e) Με αρχική τιμή το $x_0 = \frac{5}{4}$, να **βρεθούν** αναλυτικά οι προσεγγίσεις που απαιτούνται για την εύρεση της ρίζας της $f(x) = 2 \cdot (x-1)^2$ με ακρίβεια **1** δεκαδικού ψηφίου.

<u>Απάντηση</u>

$$x_1 = \frac{5/4 + 1}{2} = \frac{9}{8} = 1.125$$

$$|\varepsilon_1| = |x_1 - \xi| = |1.125 - 1| = 0.125 > 0.05$$

$$x_2 = \frac{9/8 + 1}{2} = \frac{17}{16} = 1.0625$$

$$|\varepsilon_2| = |x_2 - \xi| = |1.0625 - 1| = 0.0625 > 0.05$$

$$x_3 = \frac{17/16 + 1}{2} = \frac{33}{32} = 1.03125$$

$$|\varepsilon_3| = |x_3 - \xi| = |1.03125 - 1| = 0.03125 < 0.05 = \frac{1}{2} * 10^{-1}$$

Θέμα 3

Δίνονται τα παρακάτω συστήματα :

$$A \cdot x = b \;\; ή \;\; \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad C \cdot x = d \;\; ή \;\; \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

i. Να ***βρεθεί*** ποιο απ' τα 2 συστήματα έχει διαγώνια υπεροχή, οπότε μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο Jacobi.

<u>Απάντηση:</u>

Σύστημα $A \cdot x = b$

$|a_{11}| = 3 > |a_{12}| + |a_{13}| = 1 + 0 = 1$
$|a_{22}| = 3 > |a_{22}| + |a_{23}| = 1 + 1 = 2$
$|a_{33}| = 2 = |a_{32}| + |a_{33}| = 1 + 1 = 2$

Σύστημα $C \cdot x = d$

$|a_{11}| = 2 > |a_{12}| + |a_{13}| = 1 + 0 = 1$
$|a_{22}| = 4 > |a_{22}| + |a_{23}| = 1 + 1 = 2$
$|a_{33}| = 2 = |a_{32}| + |a_{33}| = 1 + 1 = 1$

Άρα υπεροχή κατά γραμμές δεν έχει κανένα Σύστημα**.**

Σύστημα $A \cdot x = b$

$|a_{11}| = 3 > |a_{21}| + |a_{31}| = 1 + 1 = 2$
$|a_{22}| = 3 > |a_{12}| + |a_{32}| = 1 + 1 = 2$
$|a_{33}| = 2 > |a_{13}| + |a_{23}| = 0 + 1 = 1$

Σύστημα $C \cdot x = d$

$|a_{11}| = 2 = |a_{21}| + |a_{31}| = 1 + 1 = 2$
$|a_{22}| = 4 > |a_{12}| + |a_{32}| = 1 + 1 = 2$
$|a_{33}| = 2 = |a_{13}| + |a_{23}| = 0 + 1 = 1$

Άρα υπεροχή κατά στήλες έχει το Σύστημα $A \cdot x = b$ **.**

ii. Γι' αυτό το σύστημα, να **βρεθούν** με τη μέθοδο Jacobi οι 2 πρώτες προσεγγίσεις $x^{(1)} = \lfloor x_1^{(1)} \quad x_2^{(1)} \quad x_3^{(1)} \rfloor$ **,** $x^{(2)} = \lfloor x_1^{(2)} \quad x_2^{(2)} \quad x_3^{(2)} \rfloor$, αν χρησιμοποιηθούν σαν αρχικές τιμές οι $x^{(0)} = \lfloor x_1 \quad x_2 \quad x_3 \rfloor^{(0)} = \lfloor x_1^{(0)} \quad x_2^{(0)} \quad x_3^{(0)} \rfloor = \left[\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\right]$

<u>Απάντηση</u>

$$x_1^{(1)} = \frac{2 + 1/2}{3} = \frac{5}{6}$$
$$x_2^{(1)} = \frac{3 - 1/2 + 1/2}{3} = 1$$
$$x_3^{(1)} = \frac{4 - 1/2 - 1/2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$x_1^{(2)} = \frac{2 + 1}{3} = 1$$
$$x_2^{(2)} = \frac{3 - 5/6 + 3/2}{3} = \frac{18 - 5 + 9}{18} = \frac{22}{18} = \frac{11}{9}$$
$$x_3^{(2)} = \frac{4 - 5/6 - 1}{2} = \frac{24 - 5 - 6}{12} = \frac{13}{12}$$