ΤΕΙ Θεσσαλονίκης - Τμήμα Πληροφορικής
Μάθημα : Αριθμητική Ανάλυση & Προγραμματισμός Επιστημονικών Εφαρμογών
Εξάμηνο : Γ' (Χειμερινό 2009-2010)
Διδάσκων : Γουλιάνας Κωνσταντίνος
Email : gouliana@it.teithe.gr

9/11/2009

Εξεταστική Περίοδος : Α'

Ιστοσελίδα : www.it.teithe.gr/~gouliana

Τ Ε Σ Τ   Π Ρ Ο Ο Δ Ο Υ

Θέμα 1

a) Να ***αποδειχθεί*** ότι το Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα του αθροίσματος *2* αριθμών x, y ισούται με το άθροισμα των Απολύτων Σφαλμάτων των *2* αριθμών ($|\varepsilon_{x+y}| \leq |\varepsilon_x| + |\varepsilon_y|$).

<u>Απάντηση:</u>

Θεώρημα 2.5, Σελίδα 24.

b) Αν $x^* = 2.54$ και $y^* = 1.1$ οι στρογγυλοποιημένες τιμές 2 αριθμών x, y, να βρεθεί το **Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα** του αθροίσματος $x + y$, όταν ο αριθμός x δίνεται στρογγυλοποιημένος σε *2* δεκαδικά ψηφία ο αριθμός y σε *1* δεκαδικό ψηφίο.

<u>Απάντηση:</u>

$$|\varepsilon_{x+y}| \leq |\varepsilon_x| + |\varepsilon_y| \leq \frac{1}{2}10^{-2} + \frac{1}{2}10^{-1} = 0.005 + 0.05 = 0.055$$

c) Αν $x = 2.545$ και $y = 1.14$ οι αρχικές τιμές των αριθμών x, y, να βρεθεί το **Απόλυτο Σφάλμα** του αθροίσματος $x + y$.

<u>Απάντηση:</u>

$$|\varepsilon_{x+y}| = |(x^* + y^*) - (x + y)| = |(2.545 + 1.14) - (2.54 + 1.1)| = |3.685 - 3.64| = 0.045$$

d) Να ***δειχθεί*** ότι με δύο εφαρμογές του Σχήματος του **Horner** μπορεί να βρεθεί η τιμή **της παραγώγου** ενός Πολυωνύμου $P(x)$ σε κάποιο x, δηλαδή το $P'(x)$.

<u>Απάντηση:</u>

$$P(x) = Q(x)(x - \xi) + U$$
$$P'(x) = Q'(x)(x - \xi) + Q(x)(x - \xi)' = Q'(x)(x - \xi) + Q(x)$$
$$P'(\xi) = Q'(\xi)(\xi - \xi) + Q(\xi) = Q(\xi)$$

e) Να ***βρεθεί*** με το Σχήμα του **Horner** η τιμή **όλων** των **παραγώγων** του Πολυωνύμου $P(x) = -x^5 + 2x^3 - x$ στο $x = -1$ ($P^{(k)}(x) = r_k \cdot k!,\ k = 1..5$).

<u>Απάντηση:</u>

	-1	0	2	0	-1	0
-1		1	-1	-1	1	0
	-1	1	1	-1	0	$0=r_0$
-1		1	-2	1	0	
	-1	2	-1	0	$0=r_1$	
-1		1	-3	4		
	-1	3	-4	$4=r_2$		
-1		1	-4			
	-1	4	$-8=r_3$			
-1		1				
	$-1=r_5$	$5=r_4$				

$P'(-1) = r_1 * 1! = 0$
$P''(-1) = r_2 * 2! = 4 * 2 = 8$
$P'''(-1) = r_3 * 3! = -8 * 6 = -48$
$P^{iv}(-1) = r_4 * 4! = 5 * 24 = 120$
$P^5(-1) = r_5 * 5! = -1 * 120 = -120$

Θέμα 2

a) Να **αναπτυχθεί** σε απειρο-σειρά MacLaurin η συνάρτηση $s = f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ (**γενικός** τύπος $s = f(x) = \dfrac{x}{1+x} = x - x^2 + x^3 - \ldots + (-1)^{n-1} x^n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} x^i$).

<u>Απάντηση:</u>

$f(x) = \frac{x}{1+x}$ $\quad f(0)=0$

$f'(x) = \frac{x'(1+x) - x(1+x)'}{(1+x)^2} = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$ $\qquad f'(0)=1=1!$

$f''(x) = -\frac{2(1+x)(1+x)'}{(1+x)^4} = -\frac{2}{(1+x)^3}$ $\qquad f''(0)= -2=-2!$

$f'''(x) = \frac{2*3(1+x)^2(1+x)'}{(1+x)^6} = \frac{6}{(1+x)^4}$ $\qquad f'''(0)= 6 =3!$

$f(x)=f(0) + \frac{x f'(0)}{1!} + \frac{x^2 f''(0)}{2!} + \frac{x^3 f'''(0)}{3!} + \ldots =$

$=0+x- x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} x^i$

b) Να βρεθεί ο **γενικός** τύπος με τον οποίο δίνεται η **διόρθωση** $r_n(x) = s - s^* = f(x) - f^*(x)$, όταν στην προσεγγιστική τιμή $s^* = f^*(x)$ χρησιμοποιηθούν οι ***n*** πρώτοι όροι. Υπόδειξη : $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$

Απάντηση:

$$r_n(x) = s - s^* = f(x) - f^*(x) = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}x^2 - \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}x^2 =$$

$$\sum_{i=n+1}^{\infty}(-1)^{i-1}x^i = (-1)^{n+1-1}x^{n+1} + (-1)^{n+2-1}x^{n+2} + \cdots$$

$$= (-1)^n x^{n+1}(1 - x + x^2 - \cdots) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$$

c) Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα που βρέθηκε στο a) να υπολογισθεί η ακριβής τιμή $s = f(x) = \frac{x}{1+x}$ και η προσεγγιστική τιμή $s^* = f^*(x)$ για $x = \frac{1}{3}$ και $n = 3$.

Απάντηση:

$$f(x) = \frac{x}{1+x} = \frac{1/3}{1+1/3} = \frac{1/3}{4/3} = \frac{1}{4}$$

$$f^*(x) = x - x^2 + x^3 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = \frac{9-3+1}{27} = \frac{7}{27}$$

d) Να υπολογισθεί το $r_n(x) = r_3\left(\frac{1}{3}\right) = s - s^* = f(x) - f^*(x)$ με τη χρήση του τύπου που βρέθηκε στο ερώτημα b).

Απάντηση:

$$r_3(1/3) = \frac{(-1)^3\left(\frac{1}{3}\right)^{3+1}}{1+\frac{1}{3}} = -\frac{\frac{1}{3^4}}{\frac{4}{3}} = -\frac{1}{4\cdot 3^3} = -\frac{1}{4\cdot 27} = -\frac{1}{108}$$

$$r_3(1/3) = f(x) - f^*(x) = \frac{1}{4} - \frac{7}{27} = \frac{27-28}{108} = -\frac{1}{108}$$