Διδάσκων : Γουλιάνας Κωνσταντίνος
Email : gouliana@it.teithe.gr Ιστοσελίδα : www.it.teithe.gr/~gouliana

Α Π Α Ν Τ Η Σ Ε Ι Σ

Θέμα 1

a) Αν x η ακριβής και x^* η προσεγγιστική τιμή ενός αριθμού, τι πρέπει να ισχύει ώστε να συμφωνούν ο x και x^* σε k **δεκαδικά** ψηφία και τι πρέπει να ισχύει ώστε να συμφωνούν σε k **σημαντικά** ψηφία. Αν $x=5$ και $x^*=4.995$, να βρεθεί σε πόσα **δεκαδικά** ψηφία και σε πόσα **σημαντικά** ψηφία συμφωνούν ο x και x^*.

<u>Απάντηση:</u>

Σημειώσεις, Σελίδες 10, 17.

$|\varepsilon| = |x^* - x| = |4.995 - 5| = 0.005 = \frac{1}{2}10^{-2}$, άρα συμφωνούν σε 2 δ.ψ.

$|\varepsilon_\sigma| = \frac{|\varepsilon|}{|x|} = \frac{0.005}{5} = \frac{5}{5000} = \frac{1}{1000} = 0.001 < 0.005 = \frac{1}{2}10^{-2} = \frac{1}{2}10^{1-3}$, άρα συμφωνούν σε 3 σ.ψ..

b) Περιγράψτε 2 τρόπους με τους οποίους μπορεί να υπολογισθεί η τιμή ενός Πολυωνύμου $P(x) = p_0 \cdot x^n + p_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} \cdot x + p_n$ στο σημείο ξ, δηλαδή το $P(\xi) = p_0 \cdot \xi^n + p_1 \cdot \xi^{n-1} + \ldots + p_{n-1} \cdot \xi + p_n$. **Πόσους** πολλαπλασιασμούς απαιτεί ο κάθε τρόπος και **ποιος** είναι ο πιο γρήγορος (λιγότεροι πολλαπλασιασμοί). Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

<u>Απάντηση:</u> Σημειώσεις, Σελίδες 38-41.

c) Για το Πολυώνυμο $P(x) = -x^4 - 2 \cdot x$ να υπολογισθεί με το Σχήμα του Horner το $P(-1)$ και το $P'(-1)$.

<u>Απάντηση:</u>

	-1	0	0	-2	0
-1		1	-1	1	1
	-1	1	-1	-1	1=P(-1)
-1		1	-2	3	
	-1	2	-3	2=P'(-1)	

Θέμα 2

a) Να περιγραφεί με σχήμα (Γεωμετρική Ερμηνεία) η Μέθοδος της Εσφαλμένης Θέσης για την εύρεση της ρίζας ξ της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα $[a,b]$.

i. Στο σχήμα θα φαίνονται το διάστημα $[a,b]$ και τουλάχιστον οι 2 πρώτες προσεγγίσεις x_0, x_1 .

ii. Χρησιμοποιείστε το σχήμα για να βρείτε τον **τύπο** απ' τον οποίο δίνεται η προσέγγιση x_0 .

iii. Ποιος είναι ο **γενικός** τύπος της μεθόδου.

<u>Απάντηση:</u> Σημειώσεις, Σελίδα 59-60.

b) Να δειχθεί από ποια εξίσωση προκύπτουν οι αναδιατάξεις $x = g_1(x) = x - 1 + \dfrac{9}{16 \cdot x^2}$ και $x = g_2(x) = \dfrac{2 \cdot x}{3} + \dfrac{1}{3 \cdot x}$, και να βρεθούν οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης.

<u>Απάντηση:</u>

$$x = g_1(x) = x - 1 + \frac{9}{16x^2} = \frac{16x^3 - 16x^2 + 9}{16x^2} \Rightarrow 16x^3 = 16x^3 - 16x^2 + 9 \Rightarrow 16x^2 - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - \frac{3}{4})(x + \frac{3}{4}) = 0,\ x = \pm\frac{3}{4}.$$

$$x = g_2(x) = \frac{2x}{3} + \frac{1}{3x} = \frac{2x^2 + 1}{3x} \Rightarrow 3x^2 = 2x^2 + 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

c) Να βρεθεί ποια απ' τις 2 αναδιατάξεις συγκλίνει στη θετική ρίζα στο διάστημα $[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}]$ και το είδος (τάξη) της σύγκλισης.

<u>Απάντηση:</u>

$$g_1'(x) = 1 - \frac{18x}{16x^4} = 1 - \frac{9}{8x^3}$$

$$\left|g_1'(3/4)\right| = \left|1 - \frac{9}{8 \cdot (3/4)^3}\right| = \left|1 - \frac{9}{8 \cdot (27/64)}\right| = \left|1 - \frac{8}{5}\right| = \left|-\frac{5}{3}\right| = \frac{5}{3} > 1$$, δεν συγκλίνει.

$$g_2'(x) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3x^2}$$

$$\left|g_2'(1)\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{1}{3 \cdot 1^2}\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$$

$$\left|g_2'(1/2)\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{1}{3(1/2)^2}\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{1}{3/4}\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{4}{3}\right| = \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} < 1$$

$$\left|g_2'(5/4)\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{1}{3(5/4)^2}\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{1}{3 \cdot 25/16}\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{16}{75}\right| = \left|\frac{50 - 16}{75}\right| = \frac{34}{75} < 1$$

Άρα η σύγκλιση είναι γραμμική

d) Με αρχική τιμή το $x_0 = \frac{5}{4}$, να **βρεθούν** αναλυτικά οι προσεγγίσεις που απατούνται για την εύρεση της θετικής ρίζας με ακρίβεια **1** δεκαδικού ψηφίου.

<u>Απάντηση:</u>

$$x_1 = \frac{2}{3}x_0 + \frac{1}{3x_0} = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4} + \frac{1}{3\cdot\frac{5}{4}} = \frac{5}{6} + \frac{4}{15} = \frac{75+24}{90} = \frac{99}{90} = \frac{11}{10}$$

$$|\varepsilon_1| = |x_1 - \xi| = \left|\frac{11}{10} - 1\right| = \left|\frac{11}{10} - \frac{10}{10}\right| = \frac{1}{10} = 0.01 > 0.05 = \frac{1}{2}10^{-1}$$

$$x_2 = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3x_1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{11}{10} + \frac{1}{3\cdot\frac{11}{10}} = \frac{11}{15} + \frac{10}{33} = \frac{363+150}{495} = \frac{513}{495} = 1.03636363...$$

$$|\varepsilon_2| = |x_2 - \xi| = |1.036363636 - 1| = 0.036363636 < 0.05 = \frac{1}{2}10^{-1}$$

Θέμα 3

a) Να ***επιλυθεί*** με απαλοιφή **Gauss-Jordan** το Σύστημα :

$$A \cdot x = b \text{ ή } \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Οι πράξεις υπολογισμού των $x_i, i = 1,2,...,n$ να γραφούν αναλυτικά.

<u>Απάντηση:</u>

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrrr|r|} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r|rrrr|r} -1/2 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|r} & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrrrr|r} 1/6 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4/3 & 0 & -2 & 0 & -8 & -10 \\ -2/3 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ & 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \end{array}$$

$$x_1 = \frac{1}{1} = 1, x_2 = \frac{-2}{-2} = 1, x_3 = \frac{1}{1} = 1, x_4 = \frac{-6}{-6} = 1$$