Διδάσκων : Γουλιάνας Κωνσταντίνος
Email : gouliana@it.teithe.gr Ιστοσελίδα : www.it.teithe.gr/~gouliana

Α Π Α Ν Τ Η Σ Ε Ι Σ

Θέμα 1

a) Αν x η ακριβής και x^* η προσεγγιστική τιμή ενός αριθμού, να δοθεί ο ορισμός του **Απολύτου Σφάλματος** και του **Απολύτου Σχετικού Σφάλματος** του αριθμού. Αν $x=4$ και $x^*=3.998$ να βρεθεί το **Απόλυτο Σφάλμα** και το Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα του x.

Απάντηση:

Ορισμοί 2.2, 2.4 (Σημειώσεις, Σελίδες 5, 6)

$$|\varepsilon| = |x^* - x| = |3.998-4| = 0.002$$

$$|\varepsilon_\sigma| = \frac{|\varepsilon|}{|x|} = \frac{0.002}{4} = \frac{2}{4000} = 0.0005$$

b) Να αναπτυχθεί η συνάρτηση $f(x)=e^{2\cdot x}$ σε απειρο-σειρά MacLaurin $\left(f(x)=e^{2\cdot x} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(2\cdot x)^i}{i!} = 1+\frac{2\cdot x}{1!}+\frac{(2\cdot x)^2}{2!}+\frac{(2\cdot x)^3}{3!}+\ldots+\frac{(2\cdot x)^n}{n!}+\ldots\right)$.

Απάντηση:

$$f(x)=e^{2\cdot x} \quad f(0)=1$$
$$f'(x)=2e^{2\cdot x} \quad f'(0)=2$$
$$f''(x)=4e^{2\cdot x} \quad f''(0)=4$$
$$f'''(x)=8e^{2\cdot x} \quad f'''(0)=8$$

$$f(x) = f(0)+\frac{xf'(0)}{1!}+\frac{x^2 f''(0)}{2!}+\frac{x^3 f'''(0)}{3!}+\ldots=$$
$$=1+\frac{2x}{1!}+\frac{4x^2}{2!}+\frac{8x^3}{3!}+\ldots=1+\frac{2x}{1!}+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+\ldots=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(2\cdot x)^i}{i!}$$

c) Να υπολογισθεί η ακριβής και η προσεγγιστική τιμή $f(x)$, $f^*(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(2\cdot x)^i}{i!}$ για $x=\frac{1}{2}$, αν χρησιμοποιηθούν οι $n=4$ πρώτοι όροι ($e=2.7182817$).

Απάντηση:

$$f^*(x)=1+\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1!}+\frac{\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)^2}{2!}+\frac{\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)^3}{3!}+\frac{\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)^4}{4!}=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}=\frac{24+24+12+4+1}{24}=\frac{65}{24}=2.708333$$

d) Να υπολογισθεί το $r_n(x)=r_4(x)=f(x)-f^*(x)$ για $x=\frac{1}{2}$.

Απάντηση:

$$r_n(1/2)=2.7182817-2.708333=0.0099484$$

Θέμα 2

a) Να περιγραφεί με σχήμα (Γεωμετρική Ερμηνεία) η Μέθοδος των Διαδοχικών Προσεγγίσεων για την εύρεση της ρίζας ξ της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα $[a,b]$.

i. Στο σχήμα θα φαίνονται η αρχική προσέγγιση x_0 και τουλάχιστον η πρώτη προσέγγιση x_1.
ii. Χρησιμοποιείστε το σχήμα για να βρείτε τον **τύπο** απ’ τον οποίο δίνεται η προσέγγιση x_1.
iii. Ποιος είναι ο **γενικός** τύπος της μεθόδου.

Απάντηση: Σημειώσεις, Σελίδες 65, 66.

b) Να δειχθεί από ποια εξίσωση προκύπτουν οι αναδιατάξεις $x=g_1(x)=\frac{1}{4\cdot x}$ και $x=g_2(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{8\cdot x}$, και να βρεθούν οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης.

Απάντηση:

$$x=\frac{1}{4\cdot x}\Rightarrow 4x^2=1\Rightarrow f(x)=4x^2-1=0\Rightarrow 4x^2=1\Rightarrow x^2=\frac{1}{4}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$$
$$x=\frac{x}{2}+\frac{1}{8\cdot x}=\frac{4x^2+1}{8x}\Rightarrow 8x^2=4x^2+1\Rightarrow 8x^2-4x^2-1=0\Rightarrow 4x^2-1=0\Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$$

c) Να βρεθεί ποια απ’ τις 2 αναδιατάξεις συγκλίνει στη θετική ρίζα στο διάστημα $[\frac{1}{4},\frac{5}{4}]$ και το είδος (τάξη) της σύγκλισης.

Απάντηση:

$$g'_1(x)=-\frac{1}{4\cdot x^2},\quad \left|g'_1(1/2)\right|=\left|-\frac{1}{4\cdot\frac{1}{4}}\right|=\left|-1\right|=1$$

$$g'_2(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8\cdot x^2},\quad \left|g'_2(1/2)\right|=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right|=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{8\cdot\frac{1}{4}}\right|=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right|=0$$

$$g''_2(x) = \frac{1}{8}\cdot\frac{2\cdot x}{x^4} = \frac{1}{4\cdot x^3}, \quad g''_2(1/2) = \frac{1}{4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{4\cdot\frac{1}{8}} = 2 \neq 0$$, Τετραγωνική Σύγκλιση.

d) Με αρχική τιμή το $x_0 = \frac{1}{4}$, να **βρεθούν** αναλυτικά οι προσεγγίσεις που απατούνται για την εύρεση της θετικής ρίζας με ακρίβεια **1** δεκαδικού ψηφίου.

Απάντηση:

$$x_1 = \frac{\frac{1}{4}}{2} + \frac{1}{8\cdot\frac{1}{4}} = \frac{1}{8} + \frac{4}{8} = \frac{5}{8} = 0.625, \quad |\varepsilon_1| = |0.625 - 0.5| = 0.125 > \frac{1}{2}10^{-1}$$

$$x_2 = \frac{\frac{5}{8}}{2} + \frac{1}{8\cdot\frac{5}{8}} = \frac{5}{16} + \frac{1}{5} = \frac{25+16}{80} = \frac{41}{80} = 0.5125, \quad |\varepsilon_2| = |0.5125 - 0.5| = 0.0125 < \frac{1}{2}10^{-1}$$

Θέμα 3

a) Να **γραφεί** σε μορφή **πινάκων** και σε μορφή **εξισώσεων** ένα Διαγώνιο σύστημα με *n* εξισώσεις.
b) Να **βρεθεί** ο τύπος με τον οποίο υπολογίζονται τα $x_i, i = 1,2,...,n$

Απάντηση:

Σημειώσεις, Σελίδες 99, 100.

c) Να ***επιλυθεί*** με απαλοιφή **Gauss με μερική οδήγηση** το Σύστημα :

$$A\cdot x = b \text{ ή } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Οι πράξεις υπολογισμού των $x_i, i = 1,2,...,n$ να γραφούν αναλυτικά.

Απάντηση:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & -4 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ ½ \\ ¼ \\ ¼ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -4 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -4 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 5/4 & 5/4 & 7/2 \\ 0 & 2 & -3/4 & -3/4 & 1/2 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ 1/2 \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -4 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -3/4 & -3/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5/4 & 5/4 & 7/2 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ 12/13 \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -4 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -3/4 & -3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 13/8 & 13/8 & 13/4 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -4 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -3/4 & -3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 13/8 & 13/8 & 13/4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

$$x_4 = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$x_3 = \frac{\frac{13}{4} - \frac{13}{8}}{\frac{13}{8}} = \frac{\frac{13}{8}}{\frac{13}{8}} = 1$$

$$x_2 = \frac{\frac{1}{2} - (-\frac{3}{4}) - (-\frac{3}{4})}{2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{4}{4} = 1$$

$$x_1 = \frac{-2 - (-4) - (-1) - (-1)}{4} = \frac{-2 + 4 + 1 + 1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$