

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - 2<sup>ο</sup> ΤΕΣΤ ΠΡΟΟΔΟΥ

## Θέμα 1

- a) Να **δειχθεί** ότι αν στη Μέθοδο της Εσφαλμένης Θέσης για την εύρεση της ρίζας  $\xi$  στο διάστημα  $(a,b)$  το  $b$  είναι σταθερό σημείο, ο γενικός τύπος υπολογισμού του  $x_{n+1}$  δίνεται απ' τη σχέση :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} \cdot f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**Απάντηση:** Σημειώσεις, Σελίδα 63.

- b) Να βρεθεί η τάξη σύγκλισης της Μεθόδου Newton-Raphson για την εύρεση της θετικής ρίζας της εξίσωσης  $f(x) = x^2 - \frac{1}{4} = 0$  στο διάστημα  $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ .

**Απάντηση:**

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right), \quad \text{Ρίζες : } \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{2x} = \frac{2x^2 - x^2 + \frac{1}{4}}{2x} = \frac{x^2 + \frac{1}{4}}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{8x} = g(x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8x^2}, \quad g'(\xi) = g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{8}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$g''(x) = \frac{1}{8} \cdot \frac{2x}{x^4} = \frac{1}{4x^3}$$

$$g''(\xi) = g''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{4}{8}} = \frac{8}{4} = 2 \neq 0, \text{ Τετραγωνική Σύγκλιση.}$$

- c) Με αρχική τιμή το  $x_0 = 1$ , και με τη χρήση της Μεθόδου Newton-Raphson να βρεθούν αναλυτικά οι προσεγγίσεις που απαιτούνται για την εύρεση της θετικής ρίζας της  $f(x) = x^2 - \frac{1}{4} = 0$  με ακρίβεια 1 δεκαδικού ψηφίου.

**Απάντηση:**

$$x_1 = g(x_0) = \frac{x_0}{2} + \frac{1}{8x_0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}, \quad |\varepsilon_1| = |x_1 - \xi| = \left| \frac{5}{8} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{5}{8} - \frac{4}{8} \right| = \frac{1}{8} = 0.125 > \frac{1}{2} \cdot 10^{-1}$$

$$x_2 = \frac{\frac{5}{8}}{2} + \frac{1}{8(\frac{5}{8})} = \frac{5}{16} + \frac{1}{5} = \frac{25+16}{80} = \frac{41}{80},$$

$$|\varepsilon_2| = |x_2 - \xi| = \left| \frac{41}{80} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{41}{80} - \frac{40}{80} \right| = \frac{1}{80} = 0.0125 < 0.05 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-1}$$

**Θέμα 2**

α) Να **γραφεί** σε μορφή **πινάκων** και σε μορφή **εξισώσεων** ένα Άνω Τριγωνικό σύστημα με  $n$  εξισώσεις.

**Απάντηση:** Σημειώσεις, Σελίδα 101.

β) Να **βρεθεί αναλυτικά** ο γενικός τύπος με τον οποίο υπολογίζονται τα  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$

**Απάντηση:** Σημειώσεις, Σελίδα 102.

γ) Να **επιλυθεί** το Σύστημα  $Ax=b$  ή

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Οι πράξεις υπολογισμού των  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$  να γραφούν αναλυτικά.

**Απάντηση:**

$$x_4 = -\frac{2}{2} = -1$$

$$x_3 = \frac{4 - (-1)(-2)}{-1} = \frac{4 - 2}{-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$x_2 = \frac{5 - (-2)(-2) - (-3)(-1)}{-1} = \frac{5 - 4 - 3}{-1} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$x_1 = \frac{-2 - (-1)(2) - 1(-2) - (-1)(-1)}{1} = \frac{1}{1} = 1$$