ΤΕΙ Θεσσαλονίκης - Τμήμα Πληροφορικής **16/2/2009**

Μάθημα : Αριθμητική Ανάλυση &Προγραμματισμός Επιστημονικών Εφαρμογών

Εξάμηνο : Γ' (Χειμερινό 2008-2009) **Εξεταστική Περίοδος : Β'**

Διδάσκων : Γουλιάνας Κωνσταντίνος

Email : gouliana@it.teithe.gr Ιστοσελίδα : www.it.teithe.gr/~gouliana

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1

i. Να ***βρεθεί*** σε *πόσα* δεκαδικά ψηφία (δ. ψ.) συμφωνούν οι αριθμοί $x = 2.5005$ και $x^* = 2.4500$.

Απάντηση:

$$x = 2.5005$$
$$x^* = 2.4500$$
$$|\varepsilon| = |x^* - x| = |2.4500 - 2.5005| = 0.0505 \le 0.5 = \frac{1}{2} \cdot 10^0$$

Οι αριθμοί $x = 2.5005$ και $x^* = 2.4500$ συμφωνούν σε 0 (μηδέν) δεκαδικά ψηφία.

ii. Να ***βρεθεί*** σε *πόσα* σημαντικά ψηφία (σ. ψ.) συμφωνούν οι αριθμοί $x = 2.5005$ και $x^* = 2.4500$.

Απάντηση:

$$x = 2.5005$$
$$x^* = 2.4500$$
$$|\varepsilon_\sigma| = \frac{|\varepsilon|}{x} = \frac{0.0505}{2.5005} = 0.02 < 0.05 = 5 \cdot 10^{-2}$$

Οι αριθμοί $x = 2.5005$ και $x^* = 2.4500$ συμφωνούν σε 2 (δυο) σημαντικά ψηφία

iii. Αφού στρογγυλοποιηθεί ο αριθμός $x = 1010.101010_2$ σε 6 σημαντικά ψηφία, να βρεθεί το απόλυτο σχετικό σφάλμα και το μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα της στρογγυλοποίησης (με στρογγύλευση) του x.

Απάντηση:

$$x = 1010.101010 = 0.1010101010 \cdot 2^{-4}$$
$$\underline{+0.0000001}$$
$$0.101011|0 \cdot 2^{-4} = 1010.11 = x^* = 10\frac{3}{4} = 10.75$$
$$|\varepsilon| = |x^* - x| = \left|10\frac{3}{4} - 10\frac{21}{32}\right| = \frac{3}{32} = 0.09375$$
$$|\varepsilon_\sigma| = \frac{|\varepsilon|}{|x|} = \frac{\frac{3}{32}}{10\frac{21}{32}} = \frac{\frac{3}{32}}{\frac{341}{32}} = \frac{3}{341} < \frac{3}{192} = \frac{1}{64} = 2^{-6}$$

iv. Να ***βρεθεί*** με το Σχήμα του **Horner** η τιμή της **παραγώγου** του Πολυωνύμου $P(x)=-x^4-x+3$ στο $\xi=2$.

Απάντηση:

	-1	*0*	*0*	*-1*	*3*
2		*-2*	*-4*	*-8*	*-18*
	-1	*-2*	*-4*	*-9*	***-15***
2		*-2*	*-8*	*-24*	
	-1	*-4*	*-12*	***-33***	

$P(x)=-15$

$P'(x)=-33$

Θέμα 2

a) Να **αναπτυχθεί** σε απειρο-σειρά MacLaurin η συνάρτηση $s=f(x)=\dfrac{x}{1+x}$.

Απάντηση:

$$s=f(x)=\frac{x}{1+x}\Rightarrow f(0)=0$$

$$f'(x)=\frac{x'\cdot(1+x)-x\cdot(1+x)'}{(1+x)^2}=\frac{1+x-x}{(1+x)^2}=\frac{1}{(1+x)^2}\Rightarrow f'(0)=1=1!$$

$$f''(x)=-\frac{2}{(1+x)^3}\Rightarrow f''(0)=-2=-2!$$

$$f'''(x)=\frac{6}{(1+x)^4}\Rightarrow f'''(0)=6=3!$$

.

.

.

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}\cdot f'(0)+\frac{x^2}{2!}\cdot f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\ldots\ldots$$

$$=0+x-x^2+x^3-x^4+\ldots$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\cdot x^i$$

b) Να βρεθεί ο **γενικός** τύπος με τον οποίο δίνεται η **διόρθωση** $r_n(x)=s-s^*=f(x)-f^*(x)$, όταν στην προσεγγιστική τιμή $s^*=f^*(x)$ χρησιμοποιηθούν οι ***n*** πρώτοι όροι. Υπόδειξη : $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots$

Απάντηση:

$$
\begin{aligned}
r_n(x) &= s - s^* \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1} \cdot x^i - \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} \cdot x^i \\
&= \sum_{i=n+1}^{\infty}(-1)^{i-1} \cdot x^i = (-1)^{n+1-1} \cdot x^{n+1} + (-1)^{n+2-1} \cdot x^{n+2} + \ldots\ldots \\
&= (-1)^n \cdot x^{n+1} \cdot (1 - x + x^2 - x^3 + \ldots.) = \frac{(-1)^n \cdot x^{n+1}}{1+x}
\end{aligned}
$$

c) Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα που βρέθηκε στο a) να υπολογισθεί η ακριβής τιμή $s = f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ και η προσεγγιστική τιμή $s^* = f^*(x)$ για $x = \dfrac{1}{2}$ και $n = 3$.

Απάντηση:

$$s = f(x) = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} = 0.3333$$

$$s^* = \sum_{i=1}(-1)^{i-1} \cdot x^2 = x^1 - x^2 + x^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 2} + \frac{1}{8} = \frac{4-2+1}{8} = \frac{3}{8}$$

d) Να υπολογισθεί το $r_n(x) = r_3(x) = s - s^* = f(x) - f^*(x)$ με τη χρήση του τύπου που βρέθηκε στο ερώτημα b).

Απάντηση:

$$r = s - s^* = \frac{1}{3} - \frac{3}{8} = \frac{8-9}{24} = -\frac{1}{24}$$

$$r = \frac{(-1)^n \cdot x^{n+1}}{1+x} = \frac{(-1)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{\frac{1}{2^4}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3 \cdot 2^3} = -\frac{1}{24}$$

Θέμα 3

a. Να **γραφεί** a) σε μορφή **πινάκων** και b) σε μορφή **εξισώσεων** ένα Κάτω Τριγωνικό σύστημα με ***n*** εξισώσεις.

Απάντηση:

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\
. & . & & . \\
. & . & \ldots & . \\
. & . & & . \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
b_1 &= a_{11} \cdot x_1 \\
b_2 &= a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \\
&. \\
&. \\
&. \\
b_n &= a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \ldots + a_{nn} \cdot x_n = b_n
\end{aligned}
$$

b. Να **βρεθεί** ο τύπος με τον οποίο υπολογίζονται τα $x_i, i = 1,2,...,n$

Απάντηση:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21} \cdot x_1}{a_{22}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 - (a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2)}{a_{33}}$$

.

.

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j}{a_{ii}}, \qquad a_{ii} \neq 0$$

c. Να ***επιλυθεί*** το Σύστημα : $A\,x = b$ ή $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix}$

Απάντηση:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$x_2 = \frac{2 - 1 \cdot 1}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$x_3 = \frac{0 - 2 \cdot 1 - 0 \cdot -1}{-1} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$x_4 = \frac{-9 - (-1) \cdot 1 - 2 \cdot (-1) - (-2) \cdot 2}{1} = \frac{-9 + 1 + 2 + 4}{1} = \frac{-2}{1} = -2$$