Διδάσκων : Γουλιάνας Κωνσταντίνος
Email : gouliana@it.teithe.gr Ιστοσελίδα : www.it.teithe.gr/~gouliana

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1

i. Να δειχθεί ότι το απόλυτο σχετικό σφάλμα της στρογγυλοποίησης με **αποκοπή** ενός αριθμού στο δυαδικό σύστημα σε ***k*** σημαντικά ψηφία είναι 2^{1-k}.

<u>Απάντηση:</u>

Θεώρημα 2.4, σελίδα 19

ii. Να ***βρεθεί*** σε *πόσα* δεκαδικά ψηφία (δ. ψ.) συμφωνούν οι αριθμοί $x = 1.000$ και $x^* = 0.975$.

<u>Απάντηση:</u>

$$|\varepsilon| = |x^* - x| = |0.975 - 1| = |-0.025| = 0.025 \le 0.05 = \frac{1}{2}\cdot 10^{-1} \text{ (1 δ. ψ.)}$$

iii. Να ***βρεθεί*** σε *πόσα* σημαντικά ψηφία (σ. ψ.) συμφωνούν οι αριθμοί $x = 1.000$ και $x^* = 0.975$.

<u>Απάντηση:</u>

$$|\varepsilon_\sigma| = \frac{|\varepsilon|}{|x|} = \frac{0.025}{1.000} = 0.025 \le 0.05 = 5\cdot 10^{-2} \text{ (2 σ. ψ.)}$$

iv. Να ***βρεθεί*** με το Σχήμα του **Horner** η τιμή **όλων** των **παραγώγων** του Πολυωνύμου $P(x) = -x^4 - x - 1$ στο $\xi = 1$ ($P^{(k)}(\xi) = r_k \cdot k!,\ k = 1..4$).

<u>Απάντηση:</u>

	-1	0	0	-1	-1	
1		-1	-1	-1	-2	
	-1	-1	-1	-2	**-3**	$= r_0$
1		-1	-2	-3		
	-1	-2	-3	**-5**	$= r_1$	
1		-1	-3			
	-1	-3	**-6**	$= r_2$		
1		-1				
	-1	**-4**	$= r_3$			
	-1	$= r_4$				

$$P'(1) = 1!\cdot r_1 = -5$$
$$P''(1) = 2!\cdot r_2 = -12$$
$$P'''(1) = 3!\cdot r_3 = -24$$
$$P^{IV}(1) = 4!\cdot r_4 = -24$$

Θέμα 2

a. Να βρεθεί το είδος (τάξη) σύγκλισης που έχει η μέθοδος Newton-Raphson, αν χρησιμοποιηθεί για την επίλυση της εξίσωσης $f(x) = \frac{(x-\xi)^k}{k^2}, k \geq 2$.

Απάντηση:

$$f(x) = \frac{(x-\xi)^k}{k^2}$$

$$f'(x) = \frac{k}{k^2} \cdot (x-\xi)^{k-1} = \frac{(x-\xi)^{k-1}}{k}$$

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\frac{(x-\xi)^k}{k^2}}{\frac{(x-\xi)^{k-1}}{k}} = x - \frac{x-\xi}{k} = \frac{k \cdot x - x + \xi}{k} = g(x)$$

$$g'(x) = \frac{k-1}{k} < 1$$

b. Αφού δειχθεί ότι η αναδιάταξη $x = g(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{1}{x} \right)$ της εξίσωσης χρησιμοποιείται για την εύρεση της ρίζας $\xi = \sqrt{1} = \pm 1$, με αρχική τιμή το $x_0 = \frac{3}{2}$, να **βρεθούν** αναλυτικά οι προσεγγίσεις που απατούνται για την εύρεση της ρίζας $\xi = 1$ με ακρίβεια **1** δεκαδικού ψηφίου.

Απάντηση:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2+1}{x} = \frac{x^2+1}{2 \cdot x} \Rightarrow 2 \cdot x^2 = x^2 + 1 \Rightarrow 2 \cdot x^2 - x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x_0 = \frac{3}{2}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_0 + \frac{1}{x_0} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{9+4}{6} \right) = \frac{13}{12} = 1.083333...$$

$$|\varepsilon_1| = |x_1 - \xi| = |1.083333 - 1| = 0.08333 > \frac{1}{2} \cdot 10^{-1} = 0.05$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_1 + \frac{1}{x_1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{13}{12} + \frac{1}{\frac{13}{12}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{13}{12} + \frac{12}{13} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{169+144}{156} \right) = \frac{313}{312} = 1.0032...$$

$$|\varepsilon_2| = |x_2 - \xi| = |1.0032 - 1| = \frac{1}{12} = 0.0032 < \frac{1}{2} \cdot 10^{-1} = 0.05$$

Θέμα 3

a. Ένα σύστημα $A \cdot x = b$ μπορεί να γραφεί σαν $(D + L + U) \cdot x = b$, όπου D ο πίνακας των διαγωνίων στοιχείων του A, L ο πίνακας των στοιχείων του A κάτω απ' την κύρια διαγώνιο, U ο πίνακας των στοιχείων του A πάνω απ' την κύρια διαγώνιο ή σαν $D \cdot x = b - (L + U) \cdot x$.

i. Να **γραφεί** ο επαναληπτικός τύπος που προκύπτει απ' την προηγούμενη σχέση, με τον οποίο υλοποιούμε τη μέθοδο Jacobi για την επίλυση του συστήματος $A \cdot x = b$.

ii. Να **βρεθεί** ο γενικός τύπος με τον οποίο υπολογίζονται οι προσεγγίσεις για τα $x_i, i = 1,2,\ldots,n$

<u>Απάντηση:</u>

Σελίδα 112-113.

b. Δίνονται τα παρακάτω συστήματα :

$$A \cdot x = b \;\; ή \; \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad C \cdot x = d \;\; ή \; \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

i. Να ***βρεθεί*** ποιο απ' τα 2 συστήματα έχει διαγώνια υπεροχή, οπότε μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο Jacobi.

<u>Απάντηση:</u>

$$|2| > |0| + |-1|$$
$$|2| > |1| + |0|$$
$$|1| < |0| + |2|$$

Για το σύστημα $A \cdot x = b$ δεν υπάρχει υπεροχή κατά γραμμές

$$|2| > |1| + |0|$$
$$|2| = |0| + |-2|$$

Για το σύστημα $A \cdot x = b$ δεν υπάρχει υπεροχή κατά στήλες

$$|2| > |0| + |-1|$$
$$|2| > |1| + |0|$$
$$|-2| > |0| + |1|$$

Για το σύστημα $C \cdot x = d$ υπάρχει υπεροχή κατά γραμμές

ii. Γι' αυτό το σύστημα, να **βρεθούν** με τη μέθοδο Jacobi οι 2 πρώτες προσεγγίσεις $x^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} \end{bmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} \end{bmatrix}$, αν χρησιμοποιηθούν σαν αρχικές τιμές οι $x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$.

<u>Απάντηση:</u>

$$x_1^{(1)} = \frac{1 - 0 \cdot \frac{3}{4} - (-1) \cdot \frac{3}{2}}{2} = \frac{1 + \frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4}$$
$$x_2^{(1)} = \frac{3 - 1 \cdot \frac{1}{2} - 0 \cdot \frac{3}{2}}{2} = \frac{3 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}$$
$$x_3^{(1)} = \frac{-1 - 0 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{3}{4}}{-2} = \frac{-1 - \frac{3}{4}}{-2} = \frac{7}{8}$$

$$x_1^{(2)} = \frac{1 - 0 \cdot \frac{5}{4} - (-1) \cdot \frac{7}{8}}{2} = \frac{15}{16}$$
$$x_2^{(2)} = \frac{3 - 1 \cdot \frac{5}{4} - 0 \cdot \frac{7}{8}}{2} = \frac{3 - \frac{5}{4}}{2} = \frac{7}{8}$$
$$x_3^{(2)} = \frac{-1 - 0 \cdot \frac{5}{4} - 1 \cdot \frac{5}{4}}{-2} = \frac{-1 - \frac{5}{4}}{-2} = \frac{9}{8}$$