ΤΕΙ Θεσσαλονίκης - Τμήμα Πληροφορικής **24/11/2008**
Μάθημα : Αριθμητική Ανάλυση &Προγραμματισμός Επιστημονικών Εφαρμογών
Εξάμηνο : Γ' (Χειμερινό 2008-2009) **Εξεταστική Περίοδος : Α'**
Διδάσκων : Γουλιάνας Κωνσταντίνος
Email : gouliana@it.teithe.gr Ιστοσελίδα : www.it.teithe.gr/~gouliana

ΤΕΣΤ ΠΡΟΟΔΟΥ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1

Αφού μετατραπεί σε δυαδικό ο αριθμός $x = 0.15_{10}$ και στρογγυλευθεί **με στρογγύλευση** σε $k = 4$ **σημαντικά** ψηφία, να βρεθεί το Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα και το Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα της στρογγυλοποίησης του αριθμού.

<u>Απάντηση</u>

$$x = 0.15 \times 2 \rightarrow 0.30 \times 2 \rightarrow 0.6 \rightarrow 1.2 \rightarrow 0.4 \rightarrow 0.8 \rightarrow 1.6 \rightarrow 1.2 \rightarrow ......$$

$$0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1$$

$$x = 0.15 = 0.00100110011.....$$
$$\frac{+0.0000001}{0.001010\,|\,0_2}$$

$$x^* = 2^{-3} + 2^{-5} = \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{4+1}{32} = \frac{5}{32} = 0.15625$$

$$|\varepsilon| = |x^* - x| = |0.15625 - 0.15| = 0.00625$$

$$|\varepsilon_\sigma| = \left|\frac{\varepsilon}{x}\right| = \frac{0.00625}{0.15} = \frac{625}{15000} = \frac{125}{3000} = \frac{25}{600} = \frac{5}{120} = \frac{1}{24}$$

$$max|\varepsilon_\sigma| = 2^{-4} = \frac{1}{16}$$

Θέμα 2

Αν **αναπτυχθεί** σε απειρο-σειρά MacLaurin η συνάρτηση $s = f(x) = \dfrac{x}{1-x}$, προκύπτει ο **γενικός** τύπος

$$s = f(x) = \frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ...$$

a) Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο να βρεθεί ο **γενικός** τύπος με τον οποίο δίνεται η **διόρθωση** $r_n(x) = s - s^* = f(x) - f^*(x)$, όταν στην προσεγγιστική τιμή $s^* = f^*(x)$ χρησιμοποιηθούν οι ***n*** πρώτοι όροι.

<u>Απάντηση</u>

$$f(x)=\frac{x}{1-x}=\sum_{i=1}^{\infty}x^i$$

$$f^*(x)=\sum_{i=1}^{n}x^i$$

$$r_n=f(x)-f^*(x)=\sum_{i=1}^{\infty}x^i-\sum_{i=1}^{n}x^i=\sum_{i=n+1}^{\infty}x^i=x^{n+1}+x^{n+2}+x^{n+3}+....=x^{n+1}\cdot(1+x+x^2+x^3+...)=\frac{x^{n+1}}{1-x}$$

b) Να υπολογισθεί η ακριβής τιμή $s=f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ και η προσεγγιστική τιμή $s^*=f^*(x)$ για $x=\dfrac{1}{2}$ και $n=3$.

<u>Απάντηση</u>

$$x=\frac{1}{2},n=3$$

$$f^*(x)=\sum_{i=1}^{3}x^i=x+x^2+x^3=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}=0.875$$

$$f(x)=\frac{x}{1-x}=\frac{1/2}{1-1/2}=\frac{1/2}{1/2}=1$$

c) Να υπολογισθεί το $r_n(x)=r_3(x)=s-s^*=f(x)-f^*(x)$ με τη χρήση του τύπου που βρέθηκε στο ερώτημα a).

<u>Απάντηση</u>

$$r_n(x)=\frac{x^{n+1}}{1-x}=\frac{(1/2)^{3+1}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2^4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}=0.125$$

$$r_n(x)=f(x)-f^*(x)=1-0.875=0.125$$

Θέμα 3

- Να δειχθεί ότι, αν η εξίσωση $f(x)=0$ και η αναδιάταξή της $x=g(x)$ έχει ρίζα το ξ και οι συναρτήσεις $f(x), g(x), g'(x)$ είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες και ισχύει $g'(\xi)=0$ και $g''(\xi)=0$, η σύγκλιση της μεθόδου των Διαδοχικών Προσεγγίσεων στη ρίζα ξ είναι τετραγωνική. (Υπόδειξη : $f(\xi)=0$, $\xi=g(\xi)$, $x_n\to\xi$)

<u>Απάντηση</u>

Θεώρημα 4.4,IV, Σελίδα 71.

- Για την εξίσωση $f(x)=x^2-\frac{1}{2}$ και την αναδιάταξή της $x=g(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{4\cdot x}$ με ρίζα το $\xi=0.7071067$ και με αρχική τιμή $x_0=1$ να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των Διαδοχικών Προσεγγίσεων για την εύρεση της ρίζας ξ με ακρίβεια 2 δ.ψ.

<u>Απάντηση</u>

$$x_0=1$$

$$x_1=g(x_0)=\frac{x_0}{2}+\frac{1}{4\cdot x_0}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=0.75$$

$$|\varepsilon_1|=|x_1-\xi|=|0.75-0.7071067|=0.0422933$$

$$x_2=g(x_1)=\frac{x_1}{2}+\frac{1}{4\cdot x_1}=\frac{3/4}{2}+\frac{1}{4\cdot 3/4}=\frac{3}{8}+\frac{1}{3}=\frac{9+8}{24}=\frac{17}{24}=0.708333$$

$$|\varepsilon_2|=|x_2-\xi|=|0.708333-0.7071067|=0.0012<\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}$$