**ΤΕΙ Θεσσαλονίκης - Τμήμα Πληροφορικής** **26/2/2008**
**Μάθημα : Αριθμητική Ανάλυση &Προγραμματισμός Επιστημονικών Εφαρμογών**
**Εξάμηνο : Γ' ( Χειμερινό 2007-2008)** **Εξεταστική Περίοδος : Β'**
**Διδάσκων : Γουλιάνας Κωνσταντίνος**
Email : gouliana@it.teithe.gr Ιστοσελίδα : www.it.teithe.gr/~gouliana

# *ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ*

## Θέμα 1

i. Δώστε τον **ορισμό** του Αριθμού Μηχανής.
ii. Να ***βρεθεί*** σε *πόσα* δεκαδικά ψηφία ( δ. ψ. ) συμφωνούν οι αριθμοί $x = 2$ και $x^* = 1.99$.
iii. Να ***βρεθεί*** σε *πόσα* σημαντικά ψηφία ( σ. ψ. ) συμφωνούν οι αριθμοί $x = 2$ και $x^* = 1.99$.
iv. Να εξηγηθεί **πώς** χρησιμοποιείται το Σχήμα του **Horner** για την εύρεση της τιμής της **παραγώγου** ενός Πολυωνύμου $P(x)$ σε κάποιο σημείο $\xi$, δηλαδή του $P'(\xi)$.
v. Να ***βρεθεί*** με το Σχήμα του **Horner** η τιμή της **παραγώγου** του Πολυωνύμου $P(x) = x^5 - 3$ στο $\xi = 2$.

***<u>Απάντηση</u>***

i. Ορισμός 2.14, Σελίδες 20-21.

ii. $|\varepsilon| = |x^* - x| = |1.99 - 2| = 0.01 \le 0.05 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-1}$, άρα οι αριθμοί $x = 2$ και $x^* = 1.99$ συμφωνούν σε 1 δ.ψ..

iii. $|\varepsilon_\sigma| = \frac{|x^* - x|}{x} = \frac{0.01}{2} = 0.005 = 5 \cdot 10^{-3}$, άρα οι αριθμοί $x = 2$ και $x^* = 1.99$ συμφωνούν σε 3 σ.ψ..

iv.
$$P(x) = (x - \xi) \cdot Q(x) + U$$
$$P'(x) = Q(x) + (x - \xi) \cdot Q'(x)$$
$$P'(\xi) = Q(\xi) \Rightarrow Q(\xi) = r_1$$

οπότε, εφαρμόζοντας το σχήμα του Horner 2 φορές, βρίσκουμε το $Q(\xi) = r_1$, που είναι το $P'(\xi)$.

v. $P(x) = x^5 - 3,\ P'(x) = 5 \cdot x^4, P'(2) = 5 \cdot 2^4 = 80$

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\
2 & & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\
\hline
 & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 29 \\
2 & & 2 & 8 & 24 & 64 & \\
\hline
 & 1 & 4 & 12 & 32 & 80 & = P'(2)
\end{array}$$

**Θέμα 2**

a) Αφού δειχθεί ότι η αναδιάταξη $x = g(x) = \frac{1}{2} \cdot (x + \frac{6}{x})$ της εξίσωσης χρησιμοποιείται για την εύρεση της ρίζας $\xi = \sqrt{6} = 2.4494897$ να δειχθεί ότι :

i. Η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων **συγκλίνει**, αν $x_0 \in I = [a,b] = [2,3]$, δηλαδή $\exists \lambda = M \cdot |b - a| < 1$, όπου $M : \frac{1}{2} \cdot |g''(x)| \le M, \forall x \in I$.

***<u>Απάντηση</u>***

$$x = \frac{1}{2} \cdot \left( x + \frac{6}{x} \right) = \frac{x^2 + 6}{2 \cdot x} \Rightarrow 2 \cdot x^2 = x^2 + 6 \Rightarrow x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{6}{x^2}),$$

$$g''(x) = \frac{6}{x^3}$$

$$\left. \begin{array}{l} g''(2) = \frac{6}{2^3} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \\ g''(3) = \frac{6}{3^3} = \frac{6}{27} \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot |g''(x)| \le \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} = M \\ |b - a| = |3 - 2| = 1 \end{array}$$

$$\lambda = M \cdot |b - a| = \frac{3}{8} \cdot 1 = \frac{3}{8} < 1$$

ii. Η σύγκλιση της μεθόδου είναι **τετραγωνική** στο διάστημα $I = [a,b] = [2,3]$

***<u>Απάντηση</u>***

$$g'(\xi) = g'\left(\sqrt{6}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left( 1 - \frac{6}{(\sqrt{6})^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left( 1 - \frac{6}{6} \right) = \frac{1}{2} \cdot (1 - 1) = 0$$

$$g''(x) = \frac{6}{x^3}$$

$$g''(\xi) = g''\left(\sqrt{6}\right) = \frac{6}{\left(\sqrt{6}\right)^3} = \frac{6}{6 \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \neq 0$$

b) Να **χρησιμοποιηθεί** η αναδιάταξη $x = g(x) = \frac{1}{2} \cdot (x + \frac{6}{x})$ για την εύρεση της ρίζας $\xi = \sqrt{6} = 2.4494897$ της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $I = [a,b] = [2,3]$. Με αρχική τιμή το $x_0 = 2$, να **βρεθούν** αναλυτικά οι προσεγγίσεις που απατούνται για την εύρεση της ρίζας $\xi$ με ακρίβεια **1** δεκαδικού ψηφίου.

***Απάντηση***

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = g(x_0) = \frac{1}{2}\cdot\left(x_0 + \frac{6}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(2 + \frac{6}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot(2+3) = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$|\varepsilon_1| = |x_1 - \xi| = |2.5 - 2.4494897| = 0.0805103 > \frac{1}{2}\cdot 10^{-1}$$

$$x_2 = g(x_1) = \frac{1}{2}\cdot\left(x_1 + \frac{6}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{2} + \frac{6}{5/2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{2} + \frac{12}{5}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{25+24}{10}\right) = \frac{49}{20} = 2.45$$

$$|\varepsilon_2| = |x_2 - \xi| = |2.45 - 2.4494897| = 0.0005101 < \frac{1}{2}\cdot 10^{-1}$$

**Θέμα 3**

1. Να **γραφεί** σε μορφή **πινάκων** και σε μορφή **εξισώσεων** ένα Άνω Τριγωνικό σύστημα με *n* εξισώσεις.

***Απάντηση***

Σε μορφή **πινάκων** :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & .... & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & .... & a_{3n} \\ . & . & . & & \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

Σε μορφή **εξισώσεων :**

$$a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + .... + a_{1n}\cdot x_n = b_1$$
$$a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + .... + a_{2n}\cdot x_n = b_2$$
$$a_{33}\cdot x_3 + a_{34}\cdot x_4 + .... + a_{3n}\cdot x_n = b_3$$

.

.

$$a_{(n-1,n-1)}\cdot x_{n-1} + a_{(n-1,n)}\cdot x_n = b_{n-1}$$
$$a_{nn}\cdot x_n = b_n$$

2. Να **βρεθεί** ο τύπος με τον οποίο υπολογίζονται τα $x_i, i = 1,2,...,n$

***<u>Απάντηση</u>***

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n} \cdot x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

.

.

$$x_1 = \frac{b_1 - (a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + ... + a_{1n} \cdot x_n)}{a_{11}} = \frac{b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j} \cdot x_j}{a_{11}}$$

οπότε: $$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \cdot x_j}{a_{ii}}$$

3. Να ***επιλυθεί*** το Σύστημα :

$$A x = b \text{ ή } \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

***<u>Απάντηση</u>***

$$x_4 = \frac{b_4}{a_{44}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{34} \cdot x_4}{a_{33}} = \frac{-3 - 1 \cdot 2}{-1} = \frac{-5}{-1} = 5$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{23} \cdot x_3 - a_{24} \cdot x_4}{a_{22}} = \frac{0 - 0 \cdot 5 - (-1) \cdot 2}{1} = 2$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12} \cdot x_2 - a_{13} \cdot x_3 - a_{14} \cdot x_4}{a_{11}} = \frac{-1 - (-2) \cdot 2 - 2 \cdot 5 - 1 \cdot 2}{-1} = \frac{-1 + 4 - 10 - 2}{-1} = \frac{-9}{-1} = 9$$