ΤΕΙ Θεσσαλονίκης - Τμήμα Πληροφορικής **12/2/2008**
Μάθημα : Αριθμητική Ανάλυση &Προγραμματισμός Επιστημονικών Εφαρμογών
Εξάμηνο : Γ' (Χειμερινό 2007-2008) **Εξεταστική Περίοδος : Α'**
Διδάσκων : Γουλιάνας Κωνσταντίνος
Email : gouliana@it.teithe.gr Ιστοσελίδα : www.it.teithe.gr/~gouliana

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1

a) Να ***αποδειχθεί*** ότι το Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα της στρογγυλοποίησης **με στρογγύλευση** ενός αριθμού στο δυαδικό σύστημα σε k σημαντικά ψηφία είναι 2^{-k}.

<u>Απάντηση</u>

Θεώρημα 2.2, σελίδα 18

b) Αφού στρογγυλευθεί **με στρογγύλευση** ο αριθμός $x = 0.1125_2$ σε $k = 6$ **σημαντικά** ψηφία, να βρεθεί το Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα και το Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα της στρογγυλοποίησης του αριθμού.

Απάντηση:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x = 0.1125_2 \rightarrow & 0.225 \rightarrow & 0.45 \rightarrow & 0.9 \rightarrow & 1.8 \rightarrow & 1.6 \rightarrow & 1.2 \rightarrow & 0.4 \rightarrow & 0.8 \rightarrow & 1.6 \rightarrow & 1.2 \rightarrow \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} x = 0.1125_2 &= 0.0001110011 \\ &\underline{+0.0000000001} \\ &0.000111010|0 \end{aligned}$$

$$x^* = 0.00011101_2 = 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-6} + 2^{-8} = \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} = \frac{16+8+4+1}{256} = \frac{29}{256} = 0.1132812$$

$$|\varepsilon| = |0.1132812 - 0.1125| = 0.0007812$$

$$|\varepsilon_\sigma| = \frac{|\varepsilon|}{x} = \frac{0.0007812}{0.1125} = 0.006944$$

$$max|\varepsilon_\sigma| = 2^{-6} = \frac{1}{64} = 0.015625$$

Θέμα 2

a) Να περιγραφεί με σχήμα (Γεωμετρική Ερμηνεία) η Μέθοδος της Χορδής για την εύρεση της ρίζας ξ της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $[a,b] = [x_0, x_1]$.

i. Στο σχήμα θα φαίνονται οι **δύο** πρώτες προσεγγίσεις x_2, x_3.
ii. Χρησιμοποιείστε το σχήμα για να βρείτε τον **τύπο** απ' τον οποίο δίνεται η προσέγγιση x_2.
iii. Ποιος είναι ο **γενικός** τύπος της μεθόδου.
iv. **Πότε** σταματάμε να βρίσκουμε νέες προσεγγίσεις.

<u>Απάντηση</u>

Παράγραφος 4.7.1 Σελίδες 85-86

b) Να χρησιμοποιηθεί η Μέθοδος της Χορδής για την εύρεση της ρίζας $\xi = 1.7320508$ της εξίσωσης $f(x) = x^2 - 3 = 0$ στο διάστημα $[a,b] = [x_0, x_1] = [1,2]$. Να βρεθούν αναλυτικά οι προσεγγίσεις που απατούνται για την εύρεση της ρίζας ξ με ακρίβεια 1 δεκαδικού ψηφίου. Οι τιμές της $f(x)$ που απαιτούνται να βρεθούν με την εφαρμογή του Σχήματος του Horner.

<u>Απάντηση</u>

$f(x) = x^2 - 3 = 0 \qquad\qquad [x_0, x_1] = [1,2]$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 0 & -3 \\ 1 & & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 0 & -3 \\ 2 & & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

$f(1) = -2$

$f(2) = 1$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \cdot f(x_1) = 2 - \frac{2-1}{1-(-2)} \cdot 1 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = 1.666666$$

$$|\varepsilon_2| = |1.666666 - 1.7320508| = 0.0653842 > 0.05 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-1}$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 0 & -3 \\ 5/3 & & 5/3 & 25/9 \\ \hline & 1 & 5/3 & -2/9 \end{array}$$

$$f(x_2) = f\left(5/3\right) = -\frac{2}{9}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} \cdot f(x_2) = \frac{5}{3} - \frac{\frac{5}{3} - 2}{-\frac{2}{9} - 1} \cdot \left(\frac{2}{9}\right) = \frac{5}{3} + \frac{\frac{2}{27}}{\frac{11}{9}} = \frac{5}{3} + \frac{2}{33} = \frac{55+2}{33} = \frac{57}{33} = 1.7272727$$

$$|\varepsilon_3| = |1.7272727 - 1.7320508| = 0.004778 \leq 0.005 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$$

Θέμα 3

- Να ***επιλυθεί*** το Σύστημα $A\,x = b$ ή $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$, (Λύση $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$) με

τη μέθοδο **Gauss-Jordan**. Οι αλλαγές που θα γίνονται σε κάθε στάδιο να φαίνονται στον επαυξημένο πίνακα και να λυθεί αναλυτικά το τελικό σύστημα.

<u>Απάντηση</u>

$$\begin{array}{c} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{-1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-3}{2} & -1 & -\frac{5}{2} \end{array}\right]$$

$\alpha_{22} = 0$, οπότε γίνεται ανταλλαγή 2^{ης} και 3^{ης} γραμμής :

$$\begin{array}{c} -2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 & -\frac{5}{2} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \\ -1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 & -\frac{5}{2} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

$$
\rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}
2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 3/2 & 0 & 3/2 \\
0 & 0 & 0 & -2 & -2
\end{array}\right]
$$

Οπότε επιλύουμε το διαγώνιο σύστημα :

$$
\begin{aligned}
2 \cdot x_1 &= 2 \\
-x_2 &= -1 \\
\frac{3}{2} \cdot x_3 &= \frac{3}{2} \\
-2 \cdot x_4 &= -2
\end{aligned}
$$

με λύση την :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{2}{2} = 1 \\
x_2 &= \frac{b_2}{a_{22}} = \frac{-1}{-1} = 1 \\
x_3 &= \frac{b_3}{a_{33}} = \frac{3/2}{3/2} = 1 \\
x_4 &= \frac{b_4}{a_{44}} = \frac{-2}{-2} = 1
\end{aligned}
$$