ΤΕΙ Θεσσαλονίκης - Τμήμα Πληροφορικής **16/5/2011**

Μάθημα : Αριθμητική Ανάλυση & Προγραμματισμός Επιστημονικών Εφαρμογών

Εξάμηνο : Γ' (Εαρινό 2010-2011) Εξεταστική Περίοδος : **Α'**

Διδάσκων : Γουλιάνας Κωνσταντίνος
Email : gouliana@it.teithe.gr Ιστοσελίδα : www.it.teithe.gr/~gouliana

ΤΕΣΤ ΠΡΟΟΔΟΥ – ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1

a) Να ***αποδειχθεί*** ότι το Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα της στρογγυλοποίησης **με στρογγύλευση** ενός αριθμού στο δυαδικό σύστημα σε k σημαντικά ψηφία είναι 2^{-k}.

Απάντηση: Σημειώσεις Σελίδα 18.

b) Αφού στρογγυλευθεί **με στρογγύλευση** ο αριθμός $x = 0.215_{10}$ σε $k = 5$ **σημαντικά** ψηφία, να βρεθεί το Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα και το Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα της στρογγυλοποίησης του αριθμού.

Απάντηση:

$$
\begin{array}{l}
x = 0.215 * 2 \to 0.43 * 2 \to 0.86 \to 1.72 \to 1.44 \to 0.88 \to 1.76 \to 1.52 \to 1.04 \to 0.08 \to 0.16 \to 0.32 \to 0.64 \to \cdots \\
\qquad\qquad\quad \downarrow \quad\quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
\qquad\qquad\quad 0 \quad\quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
x = 0.215 = 0.00110111000010\ldots \\
\qquad\qquad + 0.00000001 \\
\text{----------------------------------} \\
0.00111000 = x^* = 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-5} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{4+2+1}{32} = \frac{7}{32} = 0.21875
\end{array}
$$

$$|\varepsilon| = |x^* - x| = |0.21875 - 0.215| = 0.00375$$

$$|\varepsilon_\sigma| = \left|\frac{\varepsilon}{x}\right| = \frac{0.00375}{0.215} = \frac{375}{21500} = \frac{75}{4300} = \frac{15}{860} = \frac{3}{172} \leq 2^{-5} = \frac{1}{32} = \frac{3}{96}$$

c) Να ***δειχθεί*** ότι με δύο εφαρμογές του Σχήματος του **Horner** μπορεί να βρεθεί η τιμή **της παραγώγου** ενός Πολυωνύμου $P(x)$ σε κάποιο ξ, δηλαδή το $P'(\xi)$.

Απάντηση:

$$
\begin{array}{l}
P(x) = Q(x)(x-\xi) + U \\
P'(x) = Q'(x)(x-\xi) + Q(x)(x-\xi)' = Q'(x)(x-\xi) + Q(x) \\
P'(\xi) = Q'(\xi)(\xi-\xi) + Q(\xi) = Q(\xi)
\end{array}
$$

d) Να ***βρεθεί*** με το Σχήμα του **Horner** η τιμή **όλων** των **παραγώγων** του Πολυωνύμου $P(x) = x^4 - x$ στο $\xi = -1$ ($P^{(k)}(\xi) = r_k \cdot k!,\ k = 1..4$).

<u>Απάντηση:</u>

$$
\begin{array}{r|lllll}
 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
-1 & & -1 & 1 & -1 & 2 \\
\hline
 & 1 & -1 & 1 & -2 & 2 = r_0 \\
-1 & & -1 & 2 & -3 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 3 & -5 = r_1 & \\
-1 & & -1 & 3 & & \\
\hline
 & 1 & -3 & 6 = r_2 & & \\
-1 & & -1 & & & \\
\hline
 & 1 & -4 = r_3 & & & \\
 & r_4 & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

$$p'(1) = 1! \cdot r_1 = 1 \cdot (-5) = -5$$
$$p''(1) = 2! \cdot r_2 = 2 \cdot (6) = 12$$
$$p'''(1) = 3! \cdot r_3 = 6 \cdot (-4) = -24$$
$$p''''\ (1) = 4! \cdot r_4 = 24 \cdot (1) = 24$$

Θέμα 2

a) Αν **αναπτυχθεί** η συνάρτηση $s = f(x) = \frac{1}{1+x}$ σε απειρο-σειρά MacLaurin προκύπτει ο **γενικός** τύπος $s = f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i$. Να βρεθεί ο **γενικός** τύπος με τον οποίο δίνεται η **διόρθωση** $r_n(x) = s - s^* = f(x) - f^*(x)$, όταν στην προσεγγιστική τιμή $s^* = f^*(x)$χρησιμοποιηθούν οι πρώτοι όροι μέχρι και το ***n***-οστό.

<u>Απάντηση:</u>

$r_n(x) = s - s^* = f(x) - f^*(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i - \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x^i = \sum_{i=n+1}^{\infty} (-1)^i x^i = (-1)^{n+1} x^{n+1} + (-1)^{n+2} x^{n+2} + (-1)^{n+3} x^{n+3} + \ldots = (-1)^{n+1} x^{n+1} (1 - x + x^2 - \ldots) = \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$

b) Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα στο a) να υπολογισθεί η ακριβής τιμή $s = f(x) = \frac{1}{1+x}$ και η προσεγγιστική τιμή $s^* = f^*(x)$ για $x = \frac{1}{3}$ και $n = 3$.

<u>Απάντηση:</u>

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1 + {}^1\!/_3} = \frac{1}{4/3} = \frac{3}{4} = 0.75$$
$$f^*(x) = 1 - x + x^2 - x^3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} = \frac{27 - 9 + 3 - 1}{27} = \frac{20}{27} = 0.74074$$

c) Να υπολογισθεί το $r_n(x) = r_3\left(\frac{1}{3}\right) = s - s^* = f(x) - f^*(x)$ με τη χρήση του τύπου που βρέθηκε στο ερώτημα b).

<u>Απάντηση:</u>

$r_3({}^1\!/_3) = \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} = \frac{(-1)^{3+1} * ({}^1\!/_3)^{3+1}}{1 + {}^1\!/_3} = \frac{\frac{1}{3^4}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4*3^3} = \frac{1}{108}, \left(r_3({}^1\!/_3) = f(x) - f^*(x) = \frac{3}{4} - \frac{20}{27} = \frac{81-80}{108} = \frac{1}{108}\right)$