Διδάσκων : Γουλιάνας Κωνσταντίνος
Email : gouliana@it.teithe.gr Ιστοσελίδα : www.it.teithe.gr/~gouliana

Α Π Α Ν Τ Η Σ Ε Ι Σ

Θέμα 1

a) Περιγράψτε τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η στρογγύλευση ενός αριθμού του δυαδικού συστήματος σε ***k*** δεκαδικά ψηφία.

Απάντηση: Σημειώσεις, Σελίδα 14

b) Αφού στρογγυλευθεί ο αριθμός $x = 0.0010111_2$ σε **5** δεκαδικά ψηφία, να βρεθεί το **απόλυτο σφάλμα** στρογγύλευσης και το **μέγιστο απόλυτο σφάλμα** στρογγύλευσης .

Απάντηση:

$$\begin{aligned} x &= 0.0010111 \\ &+\underline{0.000001} \\ &0.0011001 = 0.00110 = x^* \end{aligned}$$

$$|\varepsilon| = |x^* - x| = |0.00110 - 0.0010111| = 0.0000001 = 2^{-7} \leq \frac{1}{2} 2^{-5} = 2^{-6}$$

c) Να περιγραφεί με σχήμα (Γεωμετρική Ερμηνεία) η Μέθοδος των Διαδοχικών Προσεγγίσεων για την εύρεση της ρίζας ξ της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $[a,b]$. Στο σχήμα θα φαίνονται η αρχική προσέγγιση x_0 και τουλάχιστον οι πρώτες προσεγγίσεις x_1, x_2. Χρησιμοποιείστε το σχήμα για να βρείτε τον **τύπο** απ' τον οποίο δίνεται η προσέγγιση x_1 και το **γενικό** τύπο της μεθόδου.

Απάντηση: Σημειώσεις, Σελίδα 66.

d) Να βρεθεί από ποια **εξίσωση** προκύπτει η αναδιάταξη $x = g(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2 \cdot x}$, ποιες είναι οι **ρίζες** της αρχικής εξίσωσης και το είδος (**τάξη**) της **σύγκλισης** στη θετική ρίζα στο διάστημα $\left[3/4 , 5/4 \right]$.

Απάντηση:

$$x = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} = g(x) \Rightarrow \frac{2x^2}{2x} = \frac{x^2}{2x} + \frac{1}{2x} \Rightarrow f(x) = 2x^2 - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} \ , \quad g'(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \, , \quad g'(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot (\frac{3}{4})^2} = \frac{1}{2} - \frac{8}{27}$$

$$g'(\frac{5}{4}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot(\frac{5}{4})^2} = \frac{1}{2} - \frac{8}{25}$$

$$g''(x) = -\frac{1}{2}(\frac{1}{x^2}) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{x^4} = \frac{1}{x^3},\quad g''(1) = 1 \neq 0,$$ επομένως η σύγκλιση είναι τετραγωνική.

e) Με αρχική τιμή το $x_0 = \frac{5}{4}$, να **βρεθούν** αναλυτικά οι προσεγγίσεις που απατούνται για την εύρεση της θετικής ρίζας με ακρίβεια **1** δεκαδικού ψηφίου.

Απάντηση:

$$x_1 = \frac{5/4}{2} + \frac{1}{2\cdot(\frac{5}{4})^2} = \frac{5}{8} - \frac{2}{5} = \frac{25+16}{40} = \frac{41}{40}$$

$$|\varepsilon_1| = |x_1 - \xi| = \left|\frac{41}{40} - 1\right| = \frac{1}{40} = \frac{5}{200} = \frac{25}{1000} = 0.025 \leq 0.05 = \frac{1}{2}10^{-1}$$

Θέμα 2

a) Να ***δειχθεί*** ότι με την εφαρμογή του Σχήματος του **Horner** μπορεί να βρεθεί η τιμή ενός Πολυωνύμου $P(x)$ σε κάποιο ξ, δηλαδή το $P(\xi) = p_0 \cdot \xi^n + p_1 \cdot \xi^{n-1} + \ldots + p_{n-1} \cdot \xi + p_n$.

Απάντηση: Σημειώσεις, Σελίδα 40.

b) Να ***βρεθεί*** με το Σχήμα του **Horner** η τιμή **όλων** των **παραγώγων** του Πολυωνύμου $P(x) = -x^4 + x$ στο $\xi = -1$ ($P^{(k)}(\xi) = r_k \cdot k!,\ k = 1..4$).

Απάντηση:

	-1	0	0	1	0
-1		1	-1	1	-2
	-1	1	-1	2	$\boxed{-2 = r_0}$
1		1	-2	3	
	-1	2	-3	$\boxed{5 = r_1}$	
-1		-1	-3		
	-1	3	$\boxed{-6 = r_2}$		
-1		-1			
	-1	$\boxed{4 = r_3}$			

$$P'(-1) = 5 \cdot 1! = 5$$
$$P''(-1) = -6 \cdot 2! = -12$$
$$P'''(-1) = 4 \cdot 3! = 24$$
$$P^{iv}(-1) = 4 \cdot 1! = -24$$

c) Αν **αναπτυχθεί** η συνάρτηση $s = f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ σε απειρο-σειρά MacLaurin προκύπτει ο **γενικός** τύπος $s = f(x) = \dfrac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ... = \sum_{i=1}^{\infty} x^i$.Να βρεθεί ο **γενικός** τύπος με τον οποίο δίνεται η **διόρθωση** $r_n(x) = s - s^* = f(x) - f^*(x)$, όταν στην προσεγγιστική τιμή $s^* = f^*(x)$χρησιμοποιηθούν οι πρώτοι όροι μέχρι και το ***n***-οστό ($\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...$).

<u>Απάντηση:</u>

$$r_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x^i - \sum_{i=1}^{n} x^i = \sum_{i=4+1}^{\infty} x^i = x^{n+1} + x^{n+2} + \cdots = x^{n+1}(1 + x + x^2 + \cdots) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

d) Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα στο c) να υπολογισθεί η ακριβής και η προσεγγιστική τιμή για $x = 1/2$, $n = 4$ καθώς και το $r_n(x)$ με τη χρήση του τύπου που βρέθηκε στο ερώτημα c).

<u>Απάντηση:</u>

$$f(x) = \frac{x}{1-x} = \frac{1/2}{1 - 1/2} = \frac{1/2}{1/2} = 1$$
$$f^*(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{8+4+2+1}{16} = \frac{15}{16}$$
$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{(1/2)^{4+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{(1/2)^5}{1/2} = (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16} \quad \left(r_n(x) = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16} \right)$$

Θέμα 3

a) Να **γραφεί** σε μορφή **πινάκων** και σε μορφή **εξισώσεων** ένα Άνω Τριγωνικό σύστημα με *n* εξισώσεις.

<u>Απάντηση:</u> Σημειώσεις, Σελίδα 101.

b) Να **βρεθεί αναλυτικά** ο γενικός τύπος με τον οποίο υπολογίζονται τα $x_i, i = 1, 2, ..., n$.

<u>Απάντηση:</u> Σημειώσεις, Σελίδα 102.

c) Να ***επιλυθεί*** το Σύστημα $Ax = b$ με n=4 εξισώσεις, με μη μηδενικά στοιχεία του πίνακα A τους αριθμούς $1,2,3,4,5,3,2,4,6,10$ και $b^T = [-2,-4,-2,-10]$. Οι πράξεις υπολογισμού των $x_i, i = 1,2,\ldots,n$ να γραφούν αναλυτικά.

Απάντηση:

$$x_4 = \frac{-10}{10} = -1$$

$$x_3 = \frac{-2-6(-1)}{4} = \frac{-2+6}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{-4-3\cdot 1-2(-1)}{5} = \frac{-4-3+2}{5} = \frac{-7+2}{5} = \frac{-5}{5} = -1$$

$$x_1 = \frac{-2-2\cdot(-1)-3\cdot 1-4(-1)}{1} = \frac{-2+2-3+4}{1} = \frac{-7+2}{5} = \frac{1}{1} = 1$$