Διδάσκων : Γουλιάνας Κωνσταντίνος
Email : gouliana@it.teithe.gr Ιστοσελίδα : www.it.teithe.gr/~gouliana

Α Π Α Ν Τ Η Σ Ε Ι Σ

Θέμα 1

a) Περιγράψτε τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η στρογγύλευση ενός αριθμού του δυαδικού συστήματος σε ***k*** δεκαδικά ή σημαντικά ψηφία.

Απάντηση : Σημειώσεις, Σελίδα 14.

b) Αφού στρογγυλευθεί ο αριθμός $x = 0.0100101_2$ σε **5** σημαντικά ψηφία, να βρεθεί το **απόλυτο σφάλμα** στρογγύλευσης και το **μέγιστο απόλυτο σφάλμα** στρογγύλευσης .

Απάντηση :

$$x = 0.0100101_2 = 2^{-2} + 2^{-5} + 2^{-7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} = \frac{32+4+1}{128} = \frac{37}{128}$$

$$\begin{array}{r} 0.0100101_2 \\ +\ 0.0000001 \\ \hline 0.0100110 \end{array}$$

$$0.010011 = 2^{-2} + 2^{-5} + 2^{-6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{16+2+1}{64} = \frac{19}{64} = \frac{38}{128} = x^*$$

$$|\varepsilon| = |x^* - x| = \left|\frac{38}{128} - \frac{37}{128}\right| = \frac{1}{128} = 2^{-7} \le \frac{1}{2}\cdot 2^{-5} = 2^{-6}$$

c) Να περιγραφεί με σχήμα (Γεωμετρική Ερμηνεία) η Μέθοδος των Διαδοχικών Προσεγγίσεων για την εύρεση της ρίζας ξ της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $[a,b]$. Στο σχήμα θα φαίνονται η αρχική προσέγγιση x_0 και τουλάχιστον οι πρώτες προσεγγίσεις x_1, x_2 **.** Χρησιμοποιείστε το σχήμα για να βρείτε τον **τύπο** απ' τον οποίο δίνεται η προσέγγιση x_1 και το **γενικό** τύπο της μεθόδου.

Απάντηση : Σημειώσεις, Σελίδα 66.

d) Να βρεθεί από ποια εξίσωση προκύπτει η αναδιάταξη $x = g(x) = \frac{2\cdot x}{3} + \frac{1}{3\cdot x}$, ποιες είναι οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης και το είδος (τάξη) της σύγκλισης στη θετική ρίζα στο διάστημα $\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$.

Απάντηση :

$$x = \frac{2x}{3} + \frac{1}{3x} = \frac{2x^2+1}{3x} \Rightarrow 3x^2 = 2x^2 + 1 \Rightarrow 3x^2 - 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$g'(x)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3x^2},\ \left|g'(1)\right|=\left|\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{1}{3}\right|<1$$

$$\left|g'(\frac{3}{4})\right|=\left|\frac{2}{3}-\frac{1}{3(\frac{3}{4})^2}\right|=\left|\frac{2}{3}-\frac{16}{27}\right|=\left|\frac{18-16}{27}\right|=\left|\frac{2}{27}\right|<1$$

$$\left|g'(\frac{5}{4})\right|=\left|\frac{2}{3}-\frac{1}{3(\frac{5}{4})^2}\right|=\left|\frac{2}{3}-\frac{16}{75}\right|=\left|\frac{50-16}{75}\right|=\left|\frac{34}{75}\right|<1$$

Άρα η σύγκλιση είναι γραμμική.

e) Με αρχική τιμή το $x_0=\frac{5}{4}$, να **βρεθούν** αναλυτικά οι προσεγγίσεις που απατούνται για την εύρεση της θετικής ρίζας με ακρίβεια **1** δεκαδικού ψηφίου.

<u>Απάντηση:</u>

$$x_0=\frac{5}{4}$$

$$x_1=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}+\frac{1}{3\cdot\frac{5}{4}}=\frac{5}{6}+\frac{4}{15}=\frac{75+24}{90}=\frac{99}{90}=\frac{11}{10}=1.1$$

$$\left|\varepsilon_1\right|=\left|x_1-\xi\right|=\left|1.1-1\right|=0.1>\frac{1}{2}\cdot 10^{-1}$$

$$x_2=\frac{2}{3}\cdot\frac{11}{10}+\frac{1}{3\cdot\frac{11}{10}}=\frac{11}{15}+\frac{10}{33}=\frac{363+150}{495}=\frac{513}{495}=\frac{171}{165}=1.036$$

$$\left|\varepsilon_2\right|=\left|x_2-\xi\right|=\left|1.036-1\right|=0.036<\frac{1}{2}\cdot 10^{-1}=0.05$$

Θέμα 2

a) Να ***δειχθεί*** ότι με την εφαρμογή του Σχήματος του **Horner** μπορεί να βρεθεί η τιμή ενός Πολυωνύμου $P(x)$ σε κάποιο ξ, δηλαδή το $P(\xi)=p_0\cdot\xi^n+p_1\cdot\xi^{n-1}+\ldots+p_{n-1}\cdot\xi+p_n$.

<u>Απάντηση:</u> Σημειώσεις, Σελίδα 40.

b) Να ***βρεθεί*** με το Σχήμα του **Horner** η τιμή **όλων** των **παραγώγων** του Πολυωνύμου $P(x)=-x^4+2\cdot x$ στο $\xi=1$ ($P^{(k)}(\xi)=r_k\cdot k!,\ k=1..4$).

Απάντηση:

$$
\begin{array}{r|lllll}
 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
1 & & -1 & -1 & -1 & 1 \\
\hline
 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 = r_0 \\
1 & & -1 & -2 & -3 & \\
\hline
 & -1 & -2 & -3 & -2 = r_1 & \\
1 & & -1 & -3 & & \\
\hline
 & -1 & -3 & -6 = r_2 & & \\
1 & & -1 & & & \\
\hline
 & -1 & -4 = r_3 & & & \\
 & r_4 & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

$$p'(1) = 1! \cdot r_1 = 1 \cdot (-2) = -2$$
$$p''(1) = 2! \cdot r_2 = 2 \cdot (-6) = -12$$
$$p'''(1) = 3! \cdot r_3 = 6 \cdot (-4) = -24$$
$$p''''(1) = 4! \cdot r_4 = 24 \cdot (-1) = -24$$

c) Αν **αναπτυχθεί** η συνάρτηση $s = f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ σε απειρο-σειρά MacLaurin προκύπτει ο **γενικός** τύπος $s = f(x) = \dfrac{x}{1+x} = x - x^2 + x^3 - \ldots + (-1)^{n-1}x^n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}x^i$. Να βρεθεί ο **γενικός** τύπος με τον οποίο δίνεται η **διόρθωση** $r_n(x) = s - s^* = f(x) - f^*(x)$, όταν στην προσεγγιστική τιμή $s^* = f^*(x)$ χρησιμοποιηθούν οι πρώτοι όροι μέχρι και το ***n***-οστό ($\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$).

Απάντηση:

$$r_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}x^1 - \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}x^i = \sum_{i=n+1}^{\infty}(-1)^{i-1}x^i = (-1)^n \cdot x^{n+1} + (-1)^{n+1} \cdot x^{n+2} + (-1)^{n+2} \cdot x^{n+3} + \ldots\ldots =$$
$$= (-1)^n \cdot x^{n+1}(1 - x + x^2 - \ldots) = \frac{(-1)^n \cdot x^{n+1}}{1+x}$$

d) Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα στο c) να υπολογισθεί η ακριβής και η προσεγγιστική τιμή για $x = 1/2$, $n = 3$ καθώς και το $r_n(x)$ με τη χρήση του τύπου που βρέθηκε στο ερώτημα c).

Απάντηση:

$$f(x) = \frac{x}{1+x} = \frac{1/2}{1 + 1/2} = \frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3}$$

$$f^*(x) = \sum_{i=1}^{3}(-1)^{i-1}x^i = (-1)^0 \cdot x^1 + (-1)^1 \cdot x^2 + (-1)^2 \cdot x^3 =$$
$$= x - x^2 + x^3 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{4-2+1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$r_n(x) = \frac{(-1)^3 \cdot x^{3+1}}{1 + \frac{1}{2}} = -\frac{\frac{1}{24}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3 \cdot 2^3} = -\frac{1}{24} \quad \left(r_n(x) = f(x) - f^*(x) = \frac{1}{3} - \frac{3}{8} = \frac{8-9}{24} = -\frac{1}{24} \right)$$

Θέμα 3

a) Να **γραφεί** σε μορφή **πινάκων** και σε μορφή **εξισώσεων** ένα Άνω Τριγωνικό σύστημα με *n* εξισώσεις.

Απάντηση:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad &\vdots \\ \vdots \quad \vdots \quad a_{nn} \cdot x_n &= b_n \end{aligned}$$

b) Να **βρεθεί αναλυτικά** ο γενικός τύπος με τον οποίο υπολογίζονται τα $x_i, i = 1,2,\ldots,n$.

Απάντηση:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$\vdots$$

$$x_1 = \frac{b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n)}{a_{11}} = \frac{b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_j}{a_{11}}$$

$$\Gamma\iota\alpha \quad i = n-1 \cdots 1$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$

c) Να ***επιλυθεί*** το Σύστημα $Ax = b$ με n=4 εξισώσεις, με μη μηδενικά στοιχεία του πίνακα A τους αριθμούς $1,1,1,2,2,2,3,3,3,4$ και $b^T = [2,4,6,8]$. Οι πράξεις υπολογισμού των $x_i, i = 1,2,\ldots,n$ να γραφούν αναλυτικά.

Απάντηση:

$$x_4 = \frac{8}{4} = 2$$

$$x_3 = \frac{6 - 3 \cdot 2}{3} = \frac{6-6}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

$$x_2 = \frac{4 - 2 \cdot 0 - 3 \cdot 2}{2} = \frac{4-6}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

$$x_1 = \frac{2 - 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 - 2 \cdot 2}{1} = 2 + 1 - 4 = -1$$