ΤΕΙ Θεσσαλονίκης - Τμήμα Πληροφορικής **14/04/2010**

**Μάθημα : Αριθμητική Ανάλυση & Προγραμματισμός Επιστημονικών Εφαρμογών**

**Εξάμηνο : Γ' ( Εαρινό 2009-2010)** **Εξεταστική Περίοδος : Α'**

**Διδάσκων : Γουλιάνας Κωνσταντίνος**
Email : gouliana@it.teithe.gr Ιστοσελίδα : www.it.teithe.gr/~gouliana

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΕΣΤ ΠΡΟΟΔΟΥ #1

**Θέμα 1**

a) Να δειχθεί ότι το μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα της στρογγυλοποίησης με **αποκοπή** ενός αριθμού στο δυαδικό σύστημα σε ***k*** σημαντικά ψηφία είναι $2^{1-k}$.

**Απάντηση:** Θεώρημα 2.4 Σελίδα 19

b) Αφού μετατραπεί ο αριθμός $x = 0.225_{10}$ σε δυαδικό, να γίνει στρογγυλοποίηση με **αποκοπή** σε 5 σημαντικά ψηφία και να βρεθεί το **απόλυτο σχετικό σφάλμα** της στρογγυλοποίησης με **αποκοπή** και το **μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα** της στρογγυλοποίησης με **αποκοπή**.

**Απάντηση:**

$$x = 0.225_{10} \to 0.45 \to 0.9 \to 1.8 \to 1.6 \to 1.2 \to 0.4 \to 0.8 \to .....$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$0.001110011 = 0.00111 = 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-5} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{4+2+1}{32} = \frac{7}{32} = 0.21875 = x*$$

$$|\varepsilon_x| = |x* - x| = |0.21875 - 0.225| = 0.00625$$

$$|\varepsilon_{\sigma x}| = \frac{|\varepsilon_x|}{x} = \frac{0.00625}{0.225} = \frac{625}{22500} = \frac{125}{4500} = \frac{25}{900} = \frac{5}{180} = \frac{1}{36} \le 2^{1-k} = 2^{1-5} = 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

c) Περιγράψτε τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η στρογγύλευση ενός αριθμού του δυαδικού συστήματος σε ***k*** δεκαδικά ή σημαντικά ψηφία.

**Απάντηση:** Σημειώσεις Σελ. 14.

d) Αφού στρογγυλευθεί ο αριθμός $x = 10.1001_2$ σε ***5*** σημαντικά ψηφία ( ***3*** δεκαδικά ψηφία ), να βρεθεί το **απόλυτο σφάλμα** στρογγύλευσης και το **μέγιστο απόλυτο σφάλμα** στρογγύλευσης .

**Απάντηση:**

$$x = 10.1001 = 2.5625$$
$$+ \quad \underline{0.0001}$$
$$10.1010 = x^* = 2.625$$

$$|\varepsilon_x| = |x^* - x| = (10.1010 - 10.1001) = 0.0001_2 = 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} \le \frac{1}{2} 2^{-3} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} = 0.0625$$

## Θέμα 2

a) Να **αναπτυχθεί** σε απειρο-σειρά MacLaurin η συνάρτηση $s = f(x) = \dfrac{2}{1+x}$ ( **γενικός** τύπος $s = f(x) = \dfrac{2}{1+x} = 2 \cdot (1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots) = 2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i$ .

**<u>Απάντηση:</u>**

$$f(x) = \frac{2}{1+x} \qquad f(0) = \frac{2}{1+0} = 2$$

$$f'(x) = \frac{2'(1+x) - 2(1+x)'}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1+x)^2} \qquad f'(0) = -2 = -2 \cdot 1!$$

$$f''(x) = \frac{2'(1+x)^2 - 2(1+x)^{2\,\prime}}{(1+x)^4} = 4\frac{1+x}{(1+x)^4} = \frac{4}{(1+x)^3} \qquad f''(0) = 4 = 2 \cdot 2!$$

$$f'''(x) = \frac{4'(1+x)^3 - 4(1+x)^{3\,\prime}}{(1+x)^6} = \frac{-12(1+x)^2}{(1+x)^6} = -\frac{12}{(1+x)^4} \qquad f'''(0) = -12 = -2 \cdot 3!$$

$$f(x) = f(0) + \frac{xf'(0)}{1!} + \frac{x^2 f''(0)}{2!} + \frac{x^3 f'''(0)}{3!} + \ldots. =$$
$$= 2 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + \ldots.. = 2(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots.) = 2\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot x^i$$

b) Να βρεθεί ο **γενικός** τύπος με τον οποίο δίνεται η **διόρθωση** $r_n(x) = s - s^* = f(x) - f^*(x)$, όταν στην προσεγγιστική τιμή $s^* = f^*(x)$ χρησιμοποιηθούν οι πρώτοι όροι από το ***0*** μέχρι το ***n***.
Υπόδειξη : $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$

**<u>Απάντηση:</u>**

$$r_n(x) = f(x) - f^*(x) = 2(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots) - 2(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots..(-1)^n x^n) =$$
$$= 2\sum_{i=n+1}^{\infty} (-1)^i x^i = 2\left((-1)^{n+1} x^{n+1} + (-1)^{n+2} x^{n+2} + \ldots..\right) = \frac{2(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$$

**c)** Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα που βρέθηκε στο a) να υπολογισθεί η ακριβής τιμή $s = f(x) = \frac{2}{1+x}$ και η προσεγγιστική τιμή $s^* = f^*(x)$ για $x = \frac{1}{3}$ και $n = 3$.

**<u>Απάντηση:</u>**

$$f(x) = \frac{2}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{4}{3}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$f^*(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (x^i) = 2(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27}) = 2(\frac{27-9+3-1}{27}) = 2\frac{20}{27} = \frac{40}{27}$$

**d)** Να υπολογισθεί το $r_n(x) = r_3\left(\frac{1}{3}\right) = s - s^* = f(x) - f^*(x)$ με τη χρήση του τύπου που βρέθηκε στο ερώτημα b).

**<u>Απάντηση:</u>**

$$r_n(x) = \frac{2(-1)^{3+1}(\frac{1}{3})^{3+1}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{34}}{\frac{4}{3}} = \frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 3^4} = \frac{1}{2 \cdot 3^3} = \frac{1}{2 \cdot 27} = \frac{1}{54}$$

$$r_n(x) = f(x) - f^*(x) = \frac{3}{2} - \frac{40}{27} = \frac{81}{54} - \frac{80}{54} = \frac{1}{54}$$