Διδάσκων : Γουλιάνας Κωνσταντίνος
Email : gouliana@it.teithe.gr Ιστοσελίδα : www.it.teithe.gr/~gouliana

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - 2ο ΤΕΣΤ ΠΡΟΟΔΟΥ

Θέμα 1

a) Να περιγραφεί με σχήμα (Γεωμετρική Ερμηνεία) ο αλγόριθμος της Μεθόδου της Διχοτόμησης για την εύρεση της ρίζας ξ της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα $[a_0, b_0]$.

i. Στο σχήμα θα φαίνονται τα διαστήματα $[a_0, b_0], [a_1, b_1], \ldots$ και τουλάχιστον οι 2 πρώτες προσεγγίσεις x_0, x_1 .

ii. Ποιος είναι ο **γενικός** τύπος της μεθόδου.

Απάντηση: Σημειώσεις, Σελίδα 55.

b) Αν γνωρίζουμε ότι $|\varepsilon_n| \cong \dfrac{|b_0 - a_0|}{2^{n+1}}$, να δειχθεί ότι ο ελάχιστος αριθμός επαναλήψεων που απαιτούνται για την εύρεση της ρίζας ξ της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα $[a_0, b_0]$ με ακρίβεια ***k*** δεκαδικών ψηφίων είναι $\dfrac{\log(|b_0 - a_0| \cdot 10^k)}{\log(2)}$.

Απάντηση: Σημειώσεις, Σελίδες 57, 58.

$$|\varepsilon_n| \cong \frac{|b_0 - a_0|}{2^{n+1}} \le \frac{1}{2}10^{-k} \Rightarrow \frac{|b_0 - a_0|}{2^n} \le \frac{1}{10^k} \Rightarrow \frac{1}{2^n} \le \frac{1}{|b_0 - a_0| \cdot 10^k} \Rightarrow 2^n \ge |b_0 - a_0| \cdot 10^k \Rightarrow$$

$$n \cdot \log 2 \ge \log\left(|b_0 - a_0| \cdot 10^k\right) \Rightarrow n \ge \frac{\log\left(|b_0 - a_0| \cdot 10^k\right)}{\log 2}$$

c) Για την εξίσωση $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{4} = 0$ με αρχικό διάστημα το $[a_0, b_0] = \left[\dfrac{1}{8}, \dfrac{9}{8}\right]$ να **βρεθούν** αναλυτικά οι προσεγγίσεις που απατούνται για την εύρεση της θετικής ρίζας με ακρίβεια **1** δεκαδικού ψηφίου.

Απάντηση:

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{1/8 + 9/8}{2} = \frac{10/8}{2} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} = 0.625, \quad |\varepsilon_0| = |x_0 - \xi| = |0.625 - 0.5| = 0.125 > 0.05$$

$$x_1 = \frac{1/8 + 5/8}{2} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0.375, \quad |\varepsilon_1| = |x_1 - \xi| = |0.375 - 0.5| = 0.125 > 0.05$$

$$x_2 = \frac{3/8 + 5/8}{2} = \frac{8}{16} = 0.5\,,\quad |\varepsilon_2| = |x_2 - \xi| = |0.5 - 0.5| = 0 < 0.05$$

d) Να ***βρεθεί*** ο ελάχιστος αριθμός επαναλήψεων που απαιτούνται για $k = 1$

<u>Απάντηση:</u>

$$n \ge \frac{\log (9/8 - 1/8)10^1}{\log 2} = \frac{1}{0.3} = 3$$

e) Να ***βρεθεί*** με το Σχήμα του **Horner** η τιμή **όλων** των **παραγώγων** του Πολυωνύμου $P(x) = -x^4 + 2 \cdot x$ στο $\xi = 1$ ($P^{(k)}(\xi) = r_k \cdot k!\,,\ k = 1..4$).

<u>Απάντηση:</u>

	-1	0	0	2	0
1		-1	-1	-1	1
	-1	-1	-1	1	$1=r_0$
1		-1	-2	-3	
	-1	-2	-3	$-2=r_1$	
1		-1	-3		
	-1	-3	$-6=r_2$		
1		-1			
	-1	$-4=r_3$			
	r_4				

$$P'(1) = r_1 \cdot 1! = -2 \cdot 1 = -2$$
$$P''(1) = r_2 \cdot 2! = -6 \cdot 2 = -12$$
$$P'''(1) = r_3 \cdot 3! = -4 \cdot 6 = -24$$
$$P^{iv}(1) = r_4 \cdot 4! = 24 \cdot (-1) = -24$$

Θέμα 2

a) Αν η εξίσωση $x = g(x)$ αποτελεί μια αναδιάταξη της εξίσωσης $f(x) = 0$, με ρίζα το $\xi : f(\xi) = 0$, $f(x), g(x), g'(x)$ συνεχείς και παραγωγίσιμες στο διάστημα $[a,b]$, ποιες είναι οι προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν, ώστε η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων που προκύπτει απ' την αναδιάταξη $x = g(x)$ να συγκλίνει στη ρίζα ξ στο $[a,b]$, έτσι ώστε η σύγκλιση να είναι :

i) Γραμμική
ii) Τετραγωνική

Απάντηση:

i) $\left|g'(x)\right| \le \lambda < 1, \forall x \in [a,b]$

ii) $\left|g'(\xi)\right| = 0, g''(\xi) \neq 0$

b) Να βρεθεί από ποια αρχική εξίσωση προκύπτει η αναδιάταξη $x = g(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{9}{8 \cdot x}$ και να βρεθούν οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης.

Απάντηση:

$$x = \frac{x}{2} + \frac{9}{8 \cdot x} = \frac{4x^2}{8x} + \frac{9}{8x} = \frac{4x^2 + 9}{8x} \Rightarrow 8x^2 = 4x^2 + 9 \Rightarrow 4x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{9}{4} = 0 \Rightarrow x = \pm 3/2$$

c) Να βρεθεί το είδος (τάξη) της σύγκλισης της αναδιάταξης $x = g(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{9}{8 \cdot x}$ στη θετική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $[1,2]$.

Απάντηση:

$$g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{9}{8 \cdot x^2}$$

$$g'(\xi) = g'(3/2) = \frac{1}{2} - \frac{9}{8 \cdot (3/2)^2} = \frac{1}{2} - \frac{9}{8\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$g''(x) = 9/4x^3$$

$$g''(\xi) = g''(3/2) = \frac{9}{4 \cdot (3/2)^3} = \frac{9}{4\frac{27}{8}} = \frac{18}{27} \neq 0 \Rightarrow$$ Τετραγωνική Σύγκλιση.

d) Με αρχική τιμή το $x_0 = 2$, να **βρεθούν** αναλυτικά οι προσεγγίσεις που απατούνται για την εύρεση της θετικής ρίζας με ακρίβεια **1** δεκαδικού ψηφίου.

Απάντηση:

$$x_1 = \frac{x_0}{2} + \frac{9}{8x_0} = \frac{2}{2} + \frac{9}{8 \cdot 2} = \frac{16+9}{16} = \frac{25}{16} = 1.567, \ \left|\varepsilon_1\right| = \left|x_1 - \xi\right| = \left|\frac{25}{16} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{25}{16} - \frac{24}{16}\right| = \frac{1}{16} = 0.066...$$

$$x_2 = \frac{x_1}{2} + \frac{9}{8x_1} = \frac{25/16}{2} + \frac{9}{8 \cdot 25/16} = \frac{25}{32} + \frac{18}{25} = \frac{625 + 576}{800} = \frac{1201}{800} = 1.50125$$

$$\left|\varepsilon_2\right| = \left|1.50125 - 1.5\right| = 0.00125 < 0.05$$