Διδάσκων : Γουλιάνας Κωνσταντίνος Email : gouliana@it.teithe.gr Ιστοσελίδα : www.it.teithe.gr/~gouliana

# Α Π Α Ν Τ Η Σ Ε Ι Σ

## Θέμα 1

a) Αφού μετατραπεί σε δυαδικό ο αριθμός $x = 0.275_{10}$ και στρογγυλευθεί **με στρογγύλευση** σε $k = 5$ **σημαντικά** ψηφία, να βρεθεί το Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα και το Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα της στρογγυλοποίησης του αριθμού.

**Απάντηση:**

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} x = 0.275 & \to & 0.55 & \to & 1.1 & \to & 0.2 & \to & 0.4 & \to & 0.8 & \to & 1.6 & \to & 1.2 & \to & \ldots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \ldots \\ & & 0 & & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & 1 & & \ldots \end{array}$$

$$x = 0.01000110011\ldots_2$$

$$\begin{array}{r} +0.0000001 \\ \hline 0.010010 \end{array} = 2^{-2} + 2^{-5} = \frac{1}{4} + \frac{1}{32} = \frac{8+1}{32} = \frac{9}{32} = 0.28125$$

$$|\varepsilon| = |0.28125 - 0.275| = 0.00625$$

$$|\varepsilon_\sigma| = \frac{|\varepsilon|}{x} = \frac{0.00625}{0.275} = \frac{625}{27500} = \frac{125}{5500} = \frac{25}{1100} = \frac{5}{220} = \frac{1}{44} \le 2^{-5} = \frac{1}{32} = max|\varepsilon_\sigma|$$

b) Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1-x}$, η οποία μπορεί να **αναπτυχθεί** στην πολυωνυμική απειρο-σειρά MacLaurin $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$, να βρεθεί ο **γενικός** τύπος με τον οποίο δίνεται η **διόρθωση** $r_n(x) = f(x) - f^*(x)$, όταν στην προσεγγιστική τιμή $f^*(x)$ χρησιμοποιηθούν οι πρώτοι όροι μέχρι και το ***n***-οστό.

**Απάντηση:**

$$r_n(x) = f(x) - f^*(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i - \sum_{i=0}^{n} x^i = \sum_{i=n+1}^{\infty} x^i = x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots = x^{n+1}(1 + x + x^2 + ..) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

c) Να υπολογισθεί η ακριβής και η προσεγγιστική τιμή $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $f^*(x)$ για $x = \frac{1}{4}$ και $n = 3$.

**Απάντηση:**

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}=1.3333333$$

$$f^*(x)=1+x+x^2+x^3=1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}=\frac{64+16+4+1}{64}=\frac{85}{64}=1.328125$$

d) Να υπολογισθεί το $r_n(x)=r_3(x)=f(x)-f^*(x)$ με τη χρήση του τύπου που βρέθηκε στο b).

**<u>Απάντηση:</u>**

$$r_n(x)=\frac{x^{3+1}}{1-x}=\frac{(1/4)^{3+1}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{4^4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3\cdot 4^3}=\frac{1}{3\cdot 64}=\frac{1}{192}=0.00520833$$

$$r_n(x)=f(x)-f^*(x)=\frac{4}{3}-\frac{85}{64}=\frac{256-255}{192}=\frac{1}{192}=0.00520833$$

e) Να βρεθεί η τιμή όλων των παραγώγων του Πολυωνύμου $P(x)=-x^4+2\cdot x^2$ στο σημείο $\xi=-1$ με εφαρμογές του σχήματος Horner ( $P^{(k)}(\xi)=k!\cdot r_k, k=1..n$ ).

**<u>Απάντηση:</u>**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | -1 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| -1 | | 1 | -1 | -1 | 1 |
| | -1 | 1 | 1 | -1 | 1=r0 |
| -1 | | 1 | -2 | 1 | |
| | -1 | 2 | -1 | 0=r1 | |
| -1 | | 1 | -3 | | |
| | -1 | 3 | -4=r2 | | |
| -1 | | 1 | | 1 | |
| | -1 | 4=r3 | | | |

$$f'(-1)=r_1\cdot 1!=0$$
$$f''(-1)=r_2\cdot 2!=-4\cdot 2=-8$$
$$f'''(-1)=r_3\cdot 3!=4\cdot 6=24$$
$$f''''(-1)=r_4\cdot 4!=-1\cdot 24=-24$$

**Θέμα 2**

a) Να **περιγραφεί** με σχήμα ( Γεωμετρική Ερμηνεία ) η Μέθοδος της Εφαπτομένης ( Newton-Raphson ) για την εύρεση της ρίζας $\xi$ της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα $[a,b]$ .

i. Στο σχήμα θα φαίνονται το διάστημα $[a,b]$ και τουλάχιστον οι πρώτες **προσεγγίσεις** $x_0, x_1, x_2$.

ii. Χρησιμοποιείστε το σχήμα για να βρείτε τον **τύπο** απ’ τον οποίο δίνεται η προσέγγιση $x_1$.

iii. Ποιος είναι ο **γενικός** τύπος της μεθόδου.

**Απάντηση:** Σημειώσεις, Σελίδες 78, 78.

b) Να **βρεθεί** το είδος (τάξη) της σύγκλισης με τη Μέθοδο Newton-Raphson της εξίσωσης $f(x) = x^2 - 4 \cdot x + 4 = 0$ στη θετική ρίζα στο διάστημα $[1,3]$.

**Απάντηση:**

$$f(x) = x^2 - 4 \cdot x + 4 = (x-2)^2$$

$$f'(x) = 2(x-2)$$

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{(x-2)^2}{2(x-2)} = \frac{2x - x + 2}{2} = \frac{x+2}{2} = \frac{x}{2} + 1 = g(x)$$

$g'(x) = \frac{1}{2} < 1$, Γραμμική Σύγκλιση.

c) Με αρχική τιμή το $x_0 = \frac{3}{2}$, να **βρεθούν** αναλυτικά οι προσεγγίσεις που απατούνται για την εύρεση της θετικής ρίζας με ακρίβεια **1** δεκαδικού ψηφίου.

**Απάντηση:**

$$x_1 = \frac{x_0}{2} + 1 = \frac{\frac{3}{2}}{2} + 1 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4} = 1.75, \quad |\varepsilon_1| = |x_1 - \xi| = |1.75 - 2| = 0.25$$

$$x_2 = \frac{x_1}{2} + 1 = \frac{\frac{7}{4}}{2} + 1 = \frac{7}{8} + 1 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{15}{8} = 1.875, \quad |\varepsilon_2| = |x_2 - \xi| = |1.875 - 2| = 0.125$$

$$x_3 = \frac{x_2}{2} + 1 = \frac{\frac{15}{8}}{2} + 1 = \frac{15}{16} + 1 = \frac{31}{16} = 1.9375, |\varepsilon_3| = |x_3 - \xi| = |1.9375 - 2| = 0.0625$$

$$x_4 = \frac{x_3}{2} + 1 = \frac{\frac{31}{16}}{2} + 1 = \frac{31}{32} + 1 = \frac{63}{32} = 1.96875, |\varepsilon_4| = |x_4 - \xi| = |1.96875 - 2| = 0.03125 < 0.05 = \frac{1}{2}10^{-2}$$

**Θέμα 3**

- Να ***επιλυθεί*** το Σύστημα $A \cdot x = b$ ή $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, **(** Λύση $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **)**

με τη μέθοδο **απαλοιφής Gauss-Jordan**. Οι αλλαγές που θα γίνονται σε κάθε στάδιο να φαίνονται στον επαυξημένο πίνακα και να λυθεί αναλυτικά το τελικό σύστημα.

**<u>Απάντηση:</u>**

$$\begin{array}{r rrrr|r}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\
2 & 2 & 2 & -1 & -1 & 2 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|r}
1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\
0 & 0 & -3 & -3 & -6 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\
0 & 2 & 0 & 2 & 4
\end{array}$$

$$\begin{array}{r rrrr|r}
1/2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\
 & 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\
 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\
 & 0 & 0 & -3 & -3 & -6
\end{array}$$

$$\begin{array}{r rrrr|r}
1/2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
 & 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\
 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\
-3/2 & 0 & 0 & -3 & -3 & -6
\end{array}$$

$$\begin{array}{r rrrr|r}
-2/3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\
 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\
 & 0 & 0 & 0 & -3 & -3
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|r}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & -3
\end{array}$$

$$x_1 = \frac{1}{1} = 1$$

$$x_2 = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_3 = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_4 = \frac{-3}{-3} = 1$$