Διδάσκων : Γουλιάνας Κωνσταντίνος Email : gouliana@it.teithe.gr Ιστοσελίδα : www.it.teithe.gr/~gouliana

Α Π Α Ν Τ Η Σ Ε Ι Σ

Θέμα 1

a) Αφού μετατραπεί σε δυαδικό ο αριθμός $x = 0.325_{10}$ και στρογγυλευθεί **με στρογγύλευση** σε $k = 5$ **σημαντικά** ψηφία, να βρεθεί το Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα και το Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα της στρογγυλοποίησης του αριθμού.

Απάντηση:

$$x = 0.325_{10} \to 0.65 \to 1.3 \to 0.6 \to 1.2 \to 0.4 \to 0.8 \to .....$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 11$$

$$= 0.010100110011..._2$$
$$\underline{+0.0000001}$$

$$0.010101010011...._2 = 0.010101_2 = 2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} = \frac{16+4+1}{64} = \frac{21}{64} = 0.328125 = x^*$$

$$|\varepsilon_x| = |x^* - x| = |0.328125 - 0.325| = 0.003125$$

$$|\varepsilon_\sigma| = \frac{|\varepsilon_x|}{x} = \frac{0.003125}{0.325} = \frac{3125}{325000} = \frac{625}{65000} = \frac{125}{13000} = \frac{25}{2600} = \frac{5}{520} = \frac{1}{104} = 0.00961538 \le 2^{-k} = 2^{-5} = 2^{-4} = \frac{1}{32}$$

b) Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, η οποία μπορεί να **αναπτυχθεί** στην πολυωνυμική απειρο-σειρά MacLaurin $1 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cdot x^i = 1 - 2 \cdot x + 2 \cdot x^2 - ... + (-1)^n \cdot x^n + ...$, να βρεθεί ο **γενικός** τύπος με τον οποίο δίνεται η **διόρθωση** $r_n(x) = f(x) - f^*(x)$, όταν στην προσεγγιστική τιμή $f^*(x)$ χρησιμοποιηθούν οι πρώτοι όροι μέχρι και το ***n***-οστό $\left(\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... \right)$.

Απάντηση:

$$r_n(x) = f(x) - f^*(x) = 1 + 2\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i x^i - (1 + 2\sum_{i-1}^{n} (-1)^i x^i) = 2\sum_{i=n+1}^{\infty} (-1)^i x^i =$$

$$= 2((-1)^{n+1} x^{n+1} + (-1)^{n+2} x^{n+2} + (-1)^{n+3} x^{n+3} + ...) == 2((-1)^{n+1} x^{n+1} (1 - x + x^2 ...) = \frac{2(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$$

c) Να υπολογισθεί η ακριβής και η προσεγγιστική τιμή $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$, $f^*(x)$ για $x=\dfrac{1}{2}$ και $n=3$.

Απάντηση:

$$f(x)=\frac{1-x}{1+x}=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}$$

$$f^*(x)=1+2\cdot\sum_{i=1}^{3}(-1)^i x^i=1-2\cdot x+2\cdot x^2-2\cdot x^3=1-2\cdot\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\left(\frac{1}{2}\right)^3=1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

d) Να υπολογισθεί το $r_n(x)=r_3(x)=f(x)-f^*(x)$ με τη χρήση του τύπου που βρέθηκε στο b).

Απάντηση:

$$r_n(x)=r_3(\tfrac{1}{2})=\frac{2(-1)^{3+1}\cdot(\frac{1}{2})^{3+1}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2\frac{1}{2^4}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3\cdot 2^2}=\frac{1}{12}$$

$$r_n(x)=f(x)-f^*(x)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{4-3}{12}=\frac{1}{12}$$

e) Να βρεθεί η τιμή όλων των παραγώγων του Πολυωνύμου $P(x)=-x^4-3\cdot x$ στο σημείο $\xi=1$ με το σχήμα Horner ($P^{(k)}(\xi)=k!\cdot r_k$).

Απάντηση:

	-1	0	0	-3	0
1		-1	-1	-1	-4
	-1	-1	-1	-4	-4=r_0
1		-1	-2	-3	
	-1	-2	-3	-7=r_1	
1		-1	-3		
	-1	-3	-6=r_2		
1		-1			
	-1	-4=r_3			
	r_4				

$$P(1)=r_0\cdot 0!=-4$$
$$P'(1)=r_1\cdot 1!=-7$$
$$P''(1)=r_2\cdot 2!=-6\cdot 2=-12$$
$$P'''(1)=r_3\cdot 3!=-4\cdot 6=-24$$
$$P''''(1)=r_4\cdot 4!=24\cdot(-1)=-24$$

Θέμα 2

a) Αν η εξίσωση $x = g(x)$ αποτελεί μια αναδιάταξη της εξίσωσης $f(x) = 0$, με ρίζα το $\xi : f(\xi) = 0$, $f(x), g(x), g'(x)$ συνεχείς και παραγωγίσιμες στο διάστημα $[a,b]$, να δειχθεί ότι :

i) Αν $|g(x)| \le \lambda < 1, \forall x \in [a,b]$, η σύγκλιση της μεθόδου Διαδ. Προσεγγίσεων είναι Γραμμική.

Απάντηση: Σημειώσεις, Θεώρημα 4.3.i.v, Σελίδα 68.

ii) Αν $g'(\xi) = 0, g''(\xi) \ne 0$, τότε η σύγκλιση είναι Τετραγωνική.

Απάντηση: Σημειώσεις, Θεώρημα 4.4.i.v, Σελίδα 71.

b) Να βρεθεί από ποια αρχική εξίσωση προκύπτει η αναδιάταξη $x = g(x) = \frac{x}{2} + \frac{9}{8 \cdot x}$ και να βρεθούν οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης.

Απάντηση:

$$x = \frac{x}{2} + \frac{9}{8 \cdot x} = \frac{4x^2 + 9}{8x} \Rightarrow 8x^2 = 4x^2 + 9 \Rightarrow 8x^2 - 4x^2 - 9 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{9}{4} = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{3}{2}$$

c) Να βρεθεί το είδος (τάξη) της σύγκλισης της αναδιάταξης $x = g(x) = \frac{x}{2} + \frac{9}{8 \cdot x}$ στη θετική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $[1,2]$.

Απάντηση:

$$g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{9}{8 \cdot x^2},$$

$$g'(3/2) = \frac{1}{2} - \frac{9}{8 \cdot (3/2)^2} = \frac{1}{2} - \frac{9}{8 \cdot \frac{9}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$|g'(1)| = \left|\frac{1}{2} - \frac{9}{8}\right| = \left|\frac{5}{8}\right| < 1$$

$$|g'(2)| = \left|\frac{1}{2} - \frac{9}{8 \cdot 2^2}\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{9}{32}\right| = \left|\frac{16-9}{32}\right| = \left|\frac{7}{32}\right| < 1$$, Γραμμική Σύγκλιση.

d) Με αρχική τιμή το $x_0 = 1$, να **βρεθούν** αναλυτικά οι προσεγγίσεις που απατούνται για την εύρεση της θετικής ρίζας με ακρίβεια **1** δεκαδικού ψηφίου.

Απάντηση:

$$x_1 = \frac{x_0}{2} + \frac{9}{8x_0} = \frac{1}{2} + \frac{9}{8 \cdot 1} = \frac{13}{8} = 1.625\,, \quad |\varepsilon_1| = |x_1 - \xi| = \left|\frac{13}{8} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{13-12}{8}\right| = \frac{1}{8} = 0.125 > 0.05$$

$$x_2 = \frac{x_1}{2} + \frac{9}{8x_1} = \frac{13/8}{2} + \frac{9}{8 \cdot 13/8} = \frac{13}{16} + \frac{9}{13} = \frac{169+144}{208} = \frac{313}{208} = 1.5048$$

$$|\varepsilon_2| = |x_2 - \xi| = \left|\frac{313}{208} - \frac{3}{2}\right| = \frac{313-312}{208} = \frac{1}{208} = 0.00480769$$

Θέμα 3

- Να ***επιλυθεί*** το Σύστημα $A \cdot x = b$ ή $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, **(** Λύση $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **)** με τη μέθοδο **απαλοιφής Gauss-Jordan**. Οι αλλαγές που θα γίνονται σε κάθε στάδιο να φαίνονται στον επαυξημένο πίνακα και να λυθεί αναλυτικά το τελικό σύστημα.

<u>Απάντηση:</u>

$$\begin{array}{r} \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] => \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right] => \begin{array}{r} 1/3 \\ \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right] =>$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right] => \begin{array}{r} -2/9 \\ -1/3 \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$=> \begin{array}{r} -2/9 \\ 7/6 \\ -1 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4/9 & 5/9 \\ 0 & 3 & 0 & 7/3 & 16/3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] => \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$x_1 = \frac{1}{1} = 1$$

$$x_2 = \frac{3}{3} = 1$$

$$x_3 = \frac{3}{3} = 1$$

$$x_4 = \frac{2}{2} = 1$$