Διδάσκων : Γουλιάνας Κωνσταντίνος
Email : gouliana@it.teithe.gr Ιστοσελίδα : www.it.teithe.gr/~gouliana

Θέμα 1

a) Αν x η ακριβής και x^* η προσεγγιστική τιμή ενός αριθμού, να δοθεί ο ορισμός του **Απολύτου Σφάλματος** και του **Απολύτου Σχετικού Σφάλματος** του αριθμού.

Απάντηση:

Ορισμοί 2.3, 2.5, σελίδες 5-6.

b) Αν $x = 2$ και $x^* = 1.95$ να βρεθεί το **Απόλυτο Σφάλμα** και το **Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα** του x.

Απάντηση:

$$|\varepsilon| = |x^* - x| = |1.95 - 2| = |-0.05| = \mathit{0.05}$$
$$|\varepsilon_\sigma| = \frac{|\varepsilon|}{|x|} = \frac{0.05}{2} = 0.025$$

c) Για την απειρο-σειρά MacLaurin $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ στην οποία μπορεί να **αναπτυχθεί** η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, να βρεθεί ο **γενικός** τύπος με τον οποίο δίνεται η **διόρθωση** $r_n(x) = f(x) - f^*(x)$, όταν στην προσεγγιστική τιμή $f^*(x)$ χρησιμοποιηθούν οι $\boldsymbol{n}$ πρώτοι όροι.

Απάντηση:

$$r_n(x) = \mathrm{f(x)} - f(x)^* = \sum_{i=0}^{\infty} x^i - \sum_{i=0}^{n} x^i = \sum_{i=n+1}^{\infty} x^i = x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots = x^{n+1}(1 + x + x^2 + \cdots) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

d) Να υπολογισθεί η ακριβής και η προσεγγιστική τιμή $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $f^*(x)$ για $x = \dfrac{1}{4}$ και $n = 3$.

Απάντηση:

$$f(x)^* = 1 + x + x^2 + x^3 = 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} = \frac{64+16+4+1}{64} = \frac{85}{64} = 1.32812525$$
$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} = 1.333333$$
$$r_n(\mathrm{x}) = f(x) - f(x)^* = 1.3333 - 1.328125 = 0.052083$$

e) Να υπολογισθεί το $r_n(x) = r_3(x) = f(x) - f^*(x)$ με τη χρήση του τύπου που βρέθηκε στο c).

Απάντηση:

$$r_n(\mathrm{x}) = \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{3+1}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4^4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3 \cdot 4^3} = \frac{1}{192} = 0.0052083$$
$$r_n(\mathrm{x}) = f(x) - f(x)^* = \frac{4}{3} - \frac{85}{64} = \frac{256-255}{192} = \frac{1}{192}$$

Θέμα 2

a) Να βρεθεί η τιμή της πρώτης παραγώγου του Πολυωνύμου $P(x)=-2\cdot x^5-5\cdot x^2$ στο σημείο $x=-1$.

Απάντηση:

	-2	0	0	-5	0	0
-1		2	-2	2	3	-3
	-2	2	-2	-3	3	**-3**
-1		2	-4	6	-3	
	-2	4	-6	3	**0=P'(-1)**	

b) Να ***δειχθεί*** ότι η αναδιάταξη $x=\frac{1}{2}\cdot\left(x+\frac{2}{x}\right)=g(x)$ χρησιμοποιείται για την εύρεση των ριζών της εξίσωσης $f(x)=x^2-2=0$.

Απάντηση:

$x=\frac{1}{2}\cdot\left(x+\frac{2}{x}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+2}{x}=\frac{x^2+2}{2\cdot x}\Rightarrow 2\cdot x^2=x^2+2\Rightarrow 2\cdot x^2-x^2-2=0\Rightarrow x^2-2=0$

c) Να βρεθεί η τάξη σύγκλισης της Μεθόδου των Διαδοχικών Προσεγγίσεων για την εύρεση της θετικής ρίζας $x=\sqrt{2}=1.41421356$, αν χρησιμοποιηθεί η παραπάνω αναδιάταξη.

Απάντηση:

$g'(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{2}{x^2}\right)$

$g'(\sqrt{2})=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{2}{(\sqrt{2})^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{2}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot(1-1)=\frac{1}{2}\cdot 0=0$

$g''(\mathrm{x})=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 2x}{x^4}=\frac{2}{x^3}$

$g''(\sqrt{2})=\frac{2}{(\sqrt{2})^3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0$

d) Με την αναδιάταξη $x=\frac{1}{2}\cdot\left(x+\frac{2}{x}\right)=g(x)$, αρχική τιμή το $x_0=1$, και με τη χρήση της Μεθόδου των Διαδοχικών Προσεγγίσεων να βρεθούν αναλυτικά οι προσεγγίσεις που απατούνται για την εύρεση της ρίζας $x=\sqrt{2}=1.41421356$ με ακρίβεια 1 δεκαδικού ψηφίου.

Απάντηση:

$x_1=\frac{1}{2}\cdot\left(x_0+\frac{2}{x_0}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{2}{1}\right)=\frac{3}{2}=1.5$

$|\varepsilon_1|=|x_1-\xi|=|1.5-1.44421356|=0.08578644$

$x_2=\frac{1}{2}\cdot\left(x_1+\frac{2}{x_1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3/2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{9+8}{6}\right)=\frac{17}{12}=1.41666-1.41421356=$
$0.0024531<0.05=\frac{1}{2}\cdot 10^{-1}$

a) Να **γραφεί** σε μορφή **πινάκων** και σε μορφή **εξισώσεων** ένα Κάτω Τριγωνικό σύστημα με n εξισώσεις.

Απάντηση:

Παράγραφος 5.2.2, σελίδα 100

b) Να **βρεθεί** ο τύπος με τον οποίο υπολογίζονται τα $x_i, i = 1,2,...,n$

Απάντηση:

Παράγραφος 5.2.2, σελίδες 100-101

c) Να ***επιλυθεί*** το Σύστημα :

$$A\,x = b \text{ ή } \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Οι πράξεις υπολογισμού των $x_i, i = 1,2,...,n$ να γραφούν αναλυτικά.

Απάντηση:

$$x_1 = \frac{2}{-2} = -1$$

$$x_2 = \frac{1-1\cdot x_1}{-1} = \frac{1-1\cdot(-1)}{-1} = \frac{1+1}{-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$x_3 = \frac{-1-1\cdot x_1-(-1)x_2}{1} = \frac{-1-1\cdot(-1)-(-1)\cdot(-2)}{1} = \frac{-1+1-2}{1} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$x_4 = \frac{2-1\cdot x_1-(-1)\cdot x_2-(-1)\cdot x_3}{-2} = \frac{2-1\cdot(-1)+(-2)+(-2)}{-2} = \frac{2+1-2-2}{-2} = \frac{1}{2}$$