Διδάσκων : Γουλιάνας Κωνσταντίνος
Email : gouliana@it.teithe.gr Ιστοσελίδα : www.it.teithe.gr/~gouliana

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1

a) Να ***αποδειχθεί*** ότι το Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα του αθροίσματος *2* αριθμών x, y ισούται με το άθροισμα των Απολύτων Σφαλμάτων των *2* αριθμών ($|\varepsilon_{x+y}| \le |\varepsilon_x| + |\varepsilon_y|$).

<u>Απάντηση</u>

Θεώρημα 2.5, σελίδα 24

b) Αν $x^* = 0.95$ και $y^* = 0.1$ οι στρογγυλοποιημένες τιμές 2 αριθμών x, y, να βρεθεί το **Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα** του αθροίσματος $x + y$, όταν ο αριθμός x δίνεται στρογγυλοποιημένος σε *2* δεκαδικά ψηφία ο αριθμός y σε *1* δεκαδικό ψηφίο.

<u>Απάντηση</u>

$$|\varepsilon_{X+Y}| \le |\varepsilon_X| + |\varepsilon_Y| \le \frac{1}{2}\cdot 10^{-2} + \frac{1}{2}\cdot 10^{-1} = \frac{1}{200} + \frac{1}{20} = \frac{11}{200}$$

c) Να βρεθεί το **Απόλυτο Σφάλμα** και το **Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα στρογγυλοποίησης** του αριθμού $x = 0.11011_2$ σε ***3* δυαδικά** ψηφία.

<u>Απάντηση</u>

$$\begin{array}{r} x = 0.11011 \\ +\ 0.0001 \\ \hline 0.111|01 \end{array} \longrightarrow x^* = 0.111$$

$$|\varepsilon| = |x^* - x| = |0.111 - 0.11011| = 0.00001_2 = 2^{-5}$$

$$max|\varepsilon| = \frac{1}{2}\cdot 2^{-k} = \frac{1}{2}\cdot 2^{-3} = 2^{-4}$$

d) Να βρεθεί η τιμή όλων των παραγώγων του Πολυωνύμου $P(x) = -x^4 + 1$ στο σημείο $\xi = 1$ ($P^{(k)}(\xi) = k!\cdot r_k$).

<u>Απάντηση</u>

Σχήμα Horner

	-1	0	0	0	1
1		-1	-1	-1	-1
	-1	-1	-1	-1	$\boxed{0 = r_0}$
1		-1	-2	-3	
	-1	-2	-3	$\boxed{-4 = r_1}$	
1		-1	-3		
	-1	-3	$\boxed{-6 = r_2}$		
1		-1			
	-1	$\boxed{-4 = r_3}$			
1					
	$\boxed{-1 = r_4}$				

$$P(x) = -x^4 + 1 = -x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1$$
$$P^{(0)}(1) = 0! \cdot r_0 = 0$$
$$P'(1) = 1! \cdot r_1 = -4$$
$$P'''(1) = 3! \cdot r_3 = 6 \cdot (-4) = -24$$
$$P^{IV}(1) = 4! \cdot r_4 = 24 \cdot (-1) = -24$$

Θέμα 2

a) Να ***αποδειχθεί*** ότι αν η εξίσωση $f(x) = 0$ και η αναδιάταξή της $x = g(x)$ έχει ρίζα το ξ και οι συναρτήσεις $f(x)$, $g(x)$, $g'(x)$ είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο διάστημα $I = (a,b)$, για το οποίο ισχύει $|x - \xi| \leq \rho$, $\forall x \in I$, και $|g'(x)| \leq \lambda < 1$, $\forall x \in I$ και αν $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ οι προσεγγίσεις που παίρνουμε με την εφαρμογή της Μεθόδου των Διαδοχικών Προσεγγίσεων, με αρχική τιμή $x_0 \in min((a,\xi),(\xi,b))$, τότε :

i. $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$

ii. Η σύγκλιση είναι γραμμική

<u>Απάντηση</u>

Θεώρημα 4.3, ii, iv , Σελίδα 68

b) Να χρησιμοποιηθεί η Μέθοδος των Διαδοχικών Προσεγγίσεων για την εύρεση της ρίζας $\xi = 2.4494897$ της εξίσωσης $f(x) = x^2 - 6 = 0$, στο διάστημα $(a,b) = (2,3)$. Με την αναδιάταξη $x = \frac{2}{3} \cdot x + \frac{2}{x} = g(x)$ και αρχική τιμή το $x_0 = 2$, να βρεθούν αναλυτικά οι προσεγγίσεις που απατούνται για την εύρεση της ρίζας ξ με ακρίβεια *1* δεκαδικού ψηφίου.

Απάντηση

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = g(x_0) = \frac{2}{3}\cdot x_0 + \frac{2}{x_0} = \frac{2}{3}\cdot 2 + \frac{2}{2} = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3} = 2.33333$$

$$|\varepsilon_1| = |x_1 - \xi| = |2.33333 - 2.4494897| = 0.1161564 > \frac{1}{2}\cdot 10^{-1}$$

$$x_2 = g(x_1) = \frac{2}{3}\cdot x_1 + \frac{2}{x_1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{7}{3} + \frac{2}{\frac{7}{3}} = \frac{14}{9} + \frac{6}{7} = \frac{98+54}{63} = \frac{152}{63} = 2.4126984$$

$$|\varepsilon_2| = |x_2 - \xi| = |2.4126984 - 2.4494897| = 0.0367913 < \frac{1}{2}\cdot 10^{-1}$$

Θέμα 3

- Να ***επιλυθεί*** το Σύστημα $A\cdot x = b$ ή $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, (Λύση $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$) με τη μέθοδο **απαλοιφής Gauss με Οδήγηση και Εξισορρόπιση**. Οι αλλαγές που θα γίνονται σε κάθε στάδιο να φαίνονται στον επαυξημένο πίνακα και να λυθεί αναλυτικά το τελικό σύστημα.

Απάντηση

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{c} \sum|\alpha_{ij}| \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 5 \end{array} \qquad \begin{array}{c} |\alpha_{ij}| / \sum|\alpha_{ij}| \\ 1/3 \\ 2/4 \\ 3/7 \\ 1/5 \end{array}$$

Μέγιστο το 2/4
Ανταλλαγή 1ης – 2ης γραμμής

$$\begin{array}{c} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array}\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \sum|\alpha_{ij}| \\ \\ 2 \\ 5 \\ 3 \end{array} \qquad \begin{array}{c} |\alpha_{ij}| / \sum|\alpha_{ij}| \\ \\ \frac{1/2}{2} = \frac{1}{4} \\ \frac{1/2}{5} = \frac{1}{10} \\ \frac{1/2}{3} = \frac{1}{6} \end{array}$$

Μέγιστο το ¼ στη 2η γραμμή, καμιά αλλαγή

$$\begin{array}{c} \\ \\ -1 \\ 1 \end{array}\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \sum|\alpha_{ij}| \\ \\ \\ 4 \\ 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} |\alpha_{ij}| / \sum|\alpha_{ij}| \\ \\ \\ \frac{4}{4} = 1 \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{array}$$

Μέγιστο το 1 στην 3η γραμμή, καμιά αλλαγή

$$
\begin{array}{r}
\\
\\
\\
-\frac{1}{4}
\end{array}
\left.\begin{array}{cccc|c}
-2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\
0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0
\end{array}\right.
\Rightarrow
\begin{array}{cccc|c}
-2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\
0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

$$x_4 = b_4 / a44 = 1/1 = 1$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{34} \cdot x_4}{a_{33}} = \frac{4 - 0 \cdot 1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{23} \cdot x_3 - a_{24} \cdot x_4}{a_{22}} = \frac{1 - \frac{1}{2} \cdot 1 - 1 \cdot 1}{-1/2} = \frac{-1/2}{-1/2} = 1$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12} \cdot x_2 - a_{13} \cdot x_3 - a_{14} \cdot x_4}{a_{11}} = \frac{0 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$