ΤΕΙ Θεσσαλονίκης - Τμήμα Πληροφορικής **07/09/2009**
Μάθημα : Αριθμητική Ανάλυση &Προγραμματισμός Επιστημονικών Εφαρμογών
Εξάμηνο : Γ' (Εαρινό 2008-2009) Εξεταστική Περίοδος : **Β'**
Διδάσκων : Γουλιάνας Κωνσταντίνος
Email : gouliana@it.teithe.gr Ιστοσελίδα : www.it.teithe.gr/~gouliana

Θέμα 1

a) Αφού στρογγυλοποιηθεί ο δυαδικός αριθμός $x = 11.101011_2$ **με στρογγύλευση** σε $k = 6$ **σημαντικά** ψηφία, να βρεθεί το Απόλυτο Σφάλμα και το Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα στρογγυλοποίησης.

Απάντηση:

$$x = 11.101011_2 = 0.11101011 \cdot 2^2$$
$$\underline{\qquad\qquad + 0.0000001}$$
$$= 0.111011 \cdot 2^2 = 11.1011_2 = x^*$$

$$|\varepsilon| = |x^* - x| = |11.1011 - 11.101011| = 0.000001_2 = 2^{-6} \leq \frac{1}{2} \cdot 2^{-4} = 2^{-5}$$

b) Να βρεθεί το είδος (τάξη) σύγκλισης που έχει η μέθοδος Newton-Raphson, αν χρησιμοποιηθεί για την επίλυση της εξίσωσης $f(x) = \dfrac{k \cdot (x - \xi)^k}{k+1}, k \geq 2$.

Απάντηση:

$$f(x) = \frac{k \cdot (x-\xi)^k}{k+1}$$
$$f'(x) = \frac{k}{k+1} \cdot k \cdot (x-\xi)^{k-1}$$
$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\frac{k \cdot (x-\xi)^k}{k+1}}{\frac{k^2 \cdot (x-\xi)^{k-1}}{k+1}} = x - \frac{x-\xi}{k} = \frac{k \cdot x - x + \xi}{k}$$

$g'(x) = \frac{k-1}{k} < 1$, επομένως η σύγκλιση είναι γραμμική.

c) Να βρεθεί η τιμή της πρώτης παραγώγου του Πολυωνύμου $P(x) = x^4 - x$ στο σημείο $x = -1$.

Απάντηση:

	1	0	0	-1	0
-1		-1	1	-1	2
	1	-1	1	-2	2
-1		-1	2	-3	
	1	-2	3	-5=P'(-1)	

Θέμα 2

a) Να **αναπτυχθεί** σε απειρο-σειρά MacLaurin η συνάρτηση $s = f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Απάντηση:

$f(x) = \frac{1}{1+x}$ $\quad f(0) = 1$

$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ $\quad f'(0) = -1$

$f''(0) = \frac{2}{(1+x)^3}$ $\quad f''(0) = 2$

$f'''(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$ $\quad f'''(0) = -6$

$f(x) = f(0) + \frac{x\cdot f'(0)}{1!} + \frac{x^2\cdot f''(0)}{2!} + \frac{x^3\cdot f'''(0)}{3!} + \ldots = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$

b) Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα που βρέθηκε να υπολογισθεί η ακριβής τιμή $s = f(x) = \frac{1}{1+x}$ και η προσεγγιστική τιμή $s^* = f^*(x)$ για $x = \frac{1}{3}$ και $n = 4$.

Απάντηση:

$f(x)^* = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = \frac{81-27+9-3+1}{81} = \frac{61}{81}$

$f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$

$r_n(x) = \frac{3}{4} - \frac{61}{81} = \frac{243-244}{324} = -\frac{1}{324}$

c) Να βρεθεί ο **γενικός** τύπος με τον οποίο δίνεται η **διόρθωση** $r_n(x) = s - s^* = f(x) - f^*(x)$, όταν στην προσεγγιστική τιμή $s^* = f^*(x)$χρησιμοποιηθούν οι $\boldsymbol{n}$ πρώτοι όροι.

Απάντηση:

$r_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i x^i - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i x^i = \sum_{i=n+1}^{\infty}(-1)^i x^i = (-1)^{n+1}x^{n+1} + (-1)^{n+2}x^{n+2} + \cdots =$

$=(-1)^{n+1}x^{n+1}(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots) = \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$

d) Να υπολογισθεί το $r_n(x) = r_3(x) = s - s^* = f(x) - f^*(x)$με τη χρήση του τύπου που βρέθηκε στο ερώτημα c).

Απάντηση:

$r_n(x) = \frac{(-1)^{4+1}(1/3)^{4+1}}{1+\frac{1}{3}} = -\frac{\frac{1}{3^5}}{\frac{4}{3}} = -\frac{1}{4\cdot 3^4} = -\frac{1}{324}$

Θέμα 3

a. Ένα σύστημα $A\cdot x = b$ μπορεί να γραφεί σαν $(D+L+U)\cdot x = b$, όπου D ο πίνακας των διαγωνίων στοιχείων του A, L ο πίνακας των στοιχείων του A κάτω απ' την κύρια διαγώνιο, U ο πίνακας των στοιχείων του A πάνω απ' την κύρια διαγώνιο ή σαν $(D+L)\cdot x = b - U\cdot x$.

i. Να **γραφεί** σε μορφή πινάκων ο **επαναληπτικός τύπος** που προκύπτει απ' την προηγούμενη σχέση, με τον οποίο υλοποιούμε τη μέθοδο Gauss-Seidel για την επίλυση του συστήματος $A \cdot x = b$.

ii. Να **βρεθεί** ο **γενικός** τύπος με τον οποίο υπολογίζονται οι προσεγγίσεις για τα $x_i, i = 1,2,\ldots,n$

Απάντηση:

Παράγραφος 5.3.2, Σελίδες 114,115.

b. Δίνονται τα παρακάτω συστήματα :

$$A \cdot x = b \;\; ή \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad C \cdot x = d \;\; ή \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

i. Να ***βρεθεί*** ποιο απ' τα 2 συστήματα έχει διαγώνια υπεροχή, οπότε μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο Gauss-Seidel.

Απάντηση:

1ο Σύστημα:

$|4|>|1| + |-1|$
$|3|>|1|+|0|$
$|4|>|1| + |-1|$

Άρα έχει διαγώνια υπεροχή

2ο Σύστημα:

$|4|>|1| + |-1|$
$|3|>|1|+|-1|$
$|2|>|1| + |-1|$ δεν είναι αληθές άρα δεν έχει διαγώνια υπεροχή

ii. Γι' αυτό το σύστημα, να **βρεθούν** με τη μέθοδο Gauss-Seidel οι 2 πρώτες προσεγγίσεις $x^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} \end{bmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} \end{bmatrix}$, αν χρησιμοποιηθούν σαν αρχικές τιμές οι $x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

Απάντηση:

1ος κύκλος :

$$x_1 = \frac{4 - {}^{1}/_{2} + {}^{3}/_{2}}{4} = \frac{8-1+3}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$x_2 = \frac{4 - \frac{5}{4}}{3} = \frac{16-5}{12} = \frac{11}{12}$$

$$x_3 = \frac{4 - {}^{5}/_{4} + {}^{11}/_{12}}{4} = \frac{48-15+11}{48} = \frac{44}{48} = \frac{11}{12}$$

2ος κύκλος :

$$x_1 = \frac{4 - \frac{11}{12} + \frac{11}{12}}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{4-1}{3} = 1$$

$$x_3 = \frac{4-1+1}{4} = 1$$