

$$P(-1) = -2 * 0! = -2$$

$$P'(-1) = 5 * 1! = 5$$

$$P''(-1) = -6 * 2! = -12$$

$$P'''(-1) = 4 * 3! = 24$$

$$P^{iv}(-1) = -1 * 4! = -24$$

Θέμα 2

α) Να αναπτυχθεί σε απειρο-σειρά MacLaurin η συνάρτηση $s = f(x) = e^x$ (Ο Γενικός τύπος

$$\text{είναι } s = f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}.$$

Απάντηση:

$$f(x) = e^x \quad f(0)=1$$

$$f'(x) = f''(x) = \dots = e^x$$

$$f'(0) = f''(0) = \dots = 1$$

$$e^x = f(0) + \frac{x \cdot f'(0)}{1!} + \frac{x^2 \cdot f''(0)}{2!} + \dots + \frac{x^n \cdot f^{(n)}(0)}{n!} + \dots = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

β) Να υπολογισθεί η προσεγγιστική τιμή $s^* = f^*(x)$ για $x = \frac{1}{4}$ και $n=3$.

Απάντηση:

$$s^* = e^* = 1 + \frac{\frac{1}{4}}{1} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^3}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{384} = \frac{384+96+12+1}{384} = \frac{493}{384} = 1.283854167$$

γ) Αν η ακριβής τιμή $s = f(x) = e^{\frac{1}{4}} = 1.284025417$, να υπολογισθεί η διόρθωση $r_n(x) = r_3(x) = s - s^* = f(x) - f^*(x)$.

Απάντηση:

$$r_3(x) = s - s^* = 1.284025417 - 1.283854167 = 0.0001371250$$

δ) Να υπολογισθεί το ανώτατο φράγμα για τη διόρθωση $r_n(x) = r_3(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+2-x}$

Απάντηση:

$$r_3(x) < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+2-x} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^4}{4!} \cdot \frac{5}{3+2-\frac{1}{4}} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^4}{4!} \cdot \frac{5}{\frac{19}{4}} = 0.0001713268$$