ΤΕΙ Θεσσαλονίκης - Τμήμα Πληροφορικής **2/7/2008**
Μάθημα : Αριθμητική Ανάλυση & Προγραμματισμός Επιστημονικών Εφαρμογών
Εξάμηνο : Γ' (Εαρινό 2007– 2008)
Εξεταστική Περίοδος : Α'
Διδάσκων : Γουλιάνας Κωνσταντίνος
Email : gouliana@it.teithe.gr
Ιστοσελίδα : ***www.it.teithe.gr/~gouliana***

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1

a) Αφού μετατραπεί σε δυαδικό ο αριθμός $x = 0.275_{10}$ και στρογγυλευθεί **με στρογγύλευση** σε $k = 6$ **σημαντικά** ψηφία, να βρεθεί το Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα και το Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα της στρογγυλοποίησης του αριθμού.

Απάντηση

$x = 0.275_{10}$

$$0.275\times 2 \to 0.55\times 2 \to 1.1\times 2 \to 0.2\times 2 \to 0.4\times 2 \to 0.8\times 2 \to 1.6\times 2 \to 1.2\times 2 \to 0.4...$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0...$$

$$\begin{array}{r} 0.01000110011 \\ +\ 0.0000000100 \\ \hline 0.0100011 \end{array}$$

$$x^* = 2^{-2} + 2^{-6} + 2^{-7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} = \frac{32+2+1}{128} = \frac{35}{128} = 0.2734375$$

$$|\varepsilon| = |x^* - x| = |0.2734375 - 0.275| = 0.0015625$$

$$|\varepsilon_\sigma| = \frac{|\varepsilon|}{x} = \frac{0.0015625}{0.275} = \frac{1}{176} = 0.0056818$$

$$max\,|\varepsilon_\sigma| = 2^{-6} = \frac{1}{64} = 0.015625$$

b) Να περιγραφεί με σχήμα (Γεωμετρική Ερμηνεία) η Μέθοδος Newton-Raphson για την εύρεση της ρίζας ξ της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα $[a,b]$ με αρχική τιμή το $x_0 \in [a,b]$.

i. Στο σχήμα θα φαίνονται οι **δύο** πρώτες προσεγγίσεις x_1, x_2.
ii. Χρησιμοποιείστε το σχήμα για να βρείτε τον **τύπο** απ' τον οποίο δίνεται η προσέγγιση x_1.
iii. Ποιος είναι ο **γενικός** τύπος της μεθόδου.
iv. **Πότε** σταματάμε να βρίσκουμε νέες προσεγγίσεις.

<u>Απάντηση</u>

Παράγραφος 4.6.3, Σελίδες 77-78 των Σημειώσεων.

Θέμα 2

a) Να **αναπτυχθεί** σε απειρο-σειρά MacLaurin η συνάρτηση $s = f(x) = \frac{1}{1+x}$.

<u>Απάντηση</u>

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f(0) = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \qquad f'(0) = -\frac{1}{(1+0)^2} = -1!$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \qquad f''(0) = \frac{2}{(1+0)^3} = 2 = 2!$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{(1+x)^5}, \qquad f'''(0) = -\frac{6}{(1+0)^5} = -6 = -3!$$

...

Παίρνοντας το ανάπτυγμα MacLaurin θα έχουμε :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots$$

$$= 1 + x \cdot \frac{(-1!)}{1!} + \frac{x^2}{2!} \cdot 2! + \frac{x^3}{3!} \cdot (-3!) + \dots$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x^i$$

b) Να βρεθεί ο **γενικός** τύπος με τον οποίο δίνεται η **διόρθωση** $r_n(x) = s - s^* = f(x) - f^*(x)$, όταν στην προσεγγιστική τιμή $s^* = f^*(x)$ χρησιμοποιηθούν οι ***n*** πρώτοι όροι.

<u>Απάντηση</u>

$$r_n(x) = s - s^* = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i - \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x^i = \sum_{i=n+1}^{\infty} (-1)^i x^i$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot x^{n+1} + (-1)^{n+2} \cdot x^{n+2} + (-1)^{n+3} \cdot x^{n+3} + \dots$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot x^{n+1} \cdot (1 - x + x^2 - x^3 + \dots)$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot x^{n+1} \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{n+1}}{1+x}$$

c) Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα που βρέθηκε στο a) να υπολογισθεί η ακριβής τιμή $s = f(x) = \frac{1}{1+x}$ και η προσεγγιστική τιμή $s^* = f^*(x)$ για $x = \frac{1}{2}$ και $n = 3$.

Απάντηση

$$s = f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} = 0.6666666$$

$$s^* = 1 - x + x^2 - x^3 = 1 - (1/2) + (1/2)^2 - (1/2)^3 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{8-4+2-1}{8} = \frac{5}{8} = 0.625$$

$$s - s^* = \frac{2}{3} - \frac{5}{8} = \frac{16-15}{24} = \frac{1}{24} = 0.04166666$$

d) Να υπολογισθεί το $r_n(x) = r_3(x) = s - s^* = f(x) - f^*(x)$ με τη χρήση του τύπου που βρέθηκε στο ερώτημα b).

Απάντηση

$$r_3(x) = \frac{(-1)^{3+1} \cdot (\frac{1}{2})^{3+1}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2^4}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3 \cdot 2^3} = \frac{1}{24} = 0.04166666$$

Θέμα 3

- Περιγράψτε την έννοια της μερικής οδήγησης στη μέθοδο απαλοιφής **Gauss** με **μερική οδήγηση για την επίλυση του συστήματος** $A(n,n) \cdot x(n) = b(n)$. Μεταξύ ποιων στοιχείων επιλέγεται το κάθε οδηγό στοιχείο, πόσες φορές και για ποια διαγώνια στοιχεία – γραμμές - στήλες χρησιμοποιείται η μερική οδήγηση, τι γίνεται στην περίπτωση μηδενικού διαγωνίου στοιχείου.

Απάντηση

Για κάθε στήλη $j = 1..n-1$, ελέγχουμε τις γραμμές $i = j..n$, για να βρούμε τη γραμμή i που περιέχει το μεγαλύτερο κατ' απόλυτη τιμή στοιχείο στη στήλη j (οπότε δεν έχει καμιά σημασία, αν κάποιο διαγώνιο στοιχείο είναι μηδέν). Αν $i \neq j$, τότε ανταλλάσουμε τα στοιχεία των γραμμών i, j των πινάκων A και b.

- Να ***επιλυθεί*** το Σύστημα $A \cdot x = b$ ή $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, (Λύση $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$)

με τη μέθοδο απαλοιφής **Gauss** με **μερική οδήγηση**. Οι αλλαγές που θα γίνονται σε κάθε στάδιο να φαίνονται στον επαυξημένο πίνακα και να λυθεί αναλυτικά το τελικό σύστημα.

Απάντηση

Αρχικός πίνακας

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Μέγιστο κατ' απόλυτη τιμή στοιχείο στην $1^η$ στήλη το -2, ανταλλαγή $1^{ης}$ και $4^{ης}$ γραμμής.

$$\begin{array}{c} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 & -5/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & 1 & -3/2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Μέγιστο κατ’ απόλυτη τιμή στοιχείο στην 2^{η} στήλη το $3/2$, καμία αλλαγή.

$$\begin{array}{c} \\ \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 & -5/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & 1 & -3/2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 & -5/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -7/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 2 & -2/3 & 4/3 \end{array}\right]$$

Μέγιστο κατ’ απόλυτη τιμή στοιχείο στην 3^{η} στήλη το 2, ανταλλαγή $3^{\eta\varsigma}$ και $4^{\eta\varsigma}$ γραμμής.

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \frac{1}{2} \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 & -5/2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & -7/3 & -4/3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 & -5/2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

οπότε επιλύω το άνω τριγωνικό σύστημα :

$$\begin{aligned} &-2\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 2\cdot x_3 - x_4 = 0 \\ &\frac{3}{2}\cdot x_2 - \frac{5}{2}\cdot x_4 = -1 \\ &2\cdot x_3 - \frac{2}{3}\cdot x_4 = \frac{4}{3} \\ &-2\cdot x_4 = -2 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x_4 &= \frac{-2}{-2} = 1 \\ x_3 &= \frac{\frac{4}{3} - (-\frac{2}{3})\cdot 1}{2} = \frac{\frac{6}{3}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ x_2 &= \frac{-1-(-\frac{5}{2})\cdot 1}{\frac{3}{2}} = \frac{-1+\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = 1 \\ x_1 &= \frac{0 - 1\cdot 1 - 2\cdot 1 - (-1)\cdot 1}{-2} = \frac{-1-2+1}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \end{aligned}$$