Τ.Ε.Ι. Θεσσαλονίκης
Τμήμα Πληροφορικής

Αριθμητική Ανάλυση & Προγραμματισμός Επιστημονικών Εφαρμογών

Λυμένες Ασκήσεις Θεωρίας

Γουλιάνας Κώστας
Επίκουρος Καθηγητής
Τμήματος Πληροφορικής ΑΤΕΙΘ

email : gouliana@it.teithe.gr
Ιστοσελίδα : www.it.teithe.gr/~gouliana

Θεσσαλονίκη 2008

Κεφάλαιο 2 – Σφάλματα

Άσκηση 1

- Η ακριβής τιμή ενός αριθμού $x = 2.0$, και η προσεγγιστική του τιμή $x^* = 1.995$. Να βρεθεί το Σφάλμα, το Απόλυτο Σφάλμα, το Σχετικό Σφάλμα, και το Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα του αριθμού x.

Απάντηση

Σφάλμα : $\varepsilon = x^* - x = 1.995 - 2.0 = -0.005$

Απόλυτο Σφάλμα : $|\varepsilon| = |x^* - x| = |-0.005| = 0.005$

Σχετικό Σφάλμα : $\varepsilon_\sigma = \dfrac{\varepsilon}{x} = \dfrac{-0.005}{2.0} = -0.0025$

Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα : $|\varepsilon_\sigma| = \left|\dfrac{\varepsilon}{x}\right| = \dfrac{0.005}{2.0} = 0.0025$

Άσκηση 2

- Η ακριβής τιμή ενός αριθμού $x = 2.0$, ενώ η προσεγγιστική του τιμή $x^* = 1.993$. Να βρεθεί το Σφάλμα, το Απόλυτο Σφάλμα, το Σχετικό Σφάλμα, και το Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα του αριθμού x.

Απάντηση

Σφάλμα : $\varepsilon = x^* - x = 1.993 - 2.0 = -0.007$

Απόλυτο Σφάλμα : $|\varepsilon| = |x^* - x| = |-0.007| = 0.007$

Σχετικό Σφάλμα : $\varepsilon_\sigma = \dfrac{\varepsilon}{x} = \dfrac{-0.007}{2.0} = -0.0035$

Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα : $|\varepsilon_\sigma| = \left|\dfrac{\varepsilon}{x}\right| = \dfrac{0.007}{2.0} = 0.0035$

Άσκηση 3

- Αφού στρογγυλευθεί ο αριθμός $x = 2.737$ σε 2 δ.ψ. να βρεθεί το Απόλυτο Σφάλμα Στρογγύλευσης, και το Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα Στρογγύλευσης.

Απάντηση

Στρογγύλευση σε 2 δ.ψ. : $x^* = 2.74$

Απόλυτο Σφάλμα Στρογγύλευσης: $|\varepsilon| = |x^* - x| = |2.74 - 2.737| = |0.003| = 0.003$

Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα Στρογγύλευσης : $max|\varepsilon| = \dfrac{1}{2} \cdot 10^{-2} = 0.005$

Άσκηση 4

- Αφού στρογγυλευθεί ο αριθμός $x = 2.733$ σε 2 δ.ψ. να βρεθεί το Απόλυτο Σφάλμα Στρογγύλευσης, και το Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα Στρογγύλευσης.

Απάντηση

Στρογγύλευση σε 2 δ.ψ. : $x^* = 2.73$
Απόλυτο Σφάλμα Στρογγύλευσης: $|\varepsilon| = |x^* - x| = |2.73 - 2.733| = |-0.003| = 0.003$

Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα Στρογγύλευσης : $max|\varepsilon| = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = 0.005$

Άσκηση 5

- Αφού στρογγυλευθεί ο αριθμός $x = 2.7145$ σε 3 δ.ψ. να βρεθεί το Απόλυτο Σφάλμα Στρογγύλευσης, και το Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα Στρογγύλευσης.

Απάντηση

Στρογγύλευση σε 3 δ.ψ. : $x^* = 2.714$
Απόλυτο Σφάλμα Στρογγύλευσης:

$|\varepsilon| = |x^* - x| = |2.714 - 2.7145| = |-0.0005| = 0.0005 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$

Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα Στρογγύλευσης : $max|\varepsilon| = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$

Άσκηση 6

- Αφού στρογγυλευθεί ο αριθμός $x = 2.7135$ σε 3 δ.ψ. να βρεθεί το Απόλυτο Σφάλμα Στρογγύλευσης, και το Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα Στρογγύλευσης.

Απάντηση

Στρογγύλευση σε 3 δ.ψ. : $x^* = 2.714$
Απόλυτο Σφάλμα Στρογγύλευσης:

$|\varepsilon| = |x^* - x| = |2.714 - 2.7135| = |-0.0005| = 0.0005 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$

Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα Στρογγύλευσης : $max|\varepsilon| = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$

Άσκηση 7

- Να βρεθεί σε πόσα δ.ψ. συμφωνούν οι αριθμοί $x = 7.035$ και $x^* = 7.037$ (Απάντηση 2 δ.ψ).

Απάντηση

$|\varepsilon| = |x^* - x| = |7.037 - 7.035| = |0.002| = 0.002 \le 0.005 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$

Άσκηση 8

- Να βρεθεί σε πόσα δ.ψ. συμφωνούν οι αριθμοί $x = 7.037$ και $x^* = 7.042$ (Απάντηση 2 δ.ψ).

Απάντηση

$$|\varepsilon| = |x^* - x| = |7.042 - 7.037| = |0.005| = 0.005 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$$

Άσκηση 9

- Να βρεθεί σε πόσα δ.ψ. συμφωνούν οι αριθμοί $x = 7.037$ και $x^* = 7.137$ (Απάντηση 0 δ.ψ).

Απάντηση

$$|\varepsilon| = |x^* - x| = |7.137 - 7.037| = |0.1| = 0.1 \le 0.5 = \frac{1}{2} \cdot 10^{0}$$

Άσκηση 10

- Αφού στρογγυλευθεί με Αποκοπή ο αριθμός $x = 2.733$ σε 2 δ.ψ. να βρεθεί το Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής, και το Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής.

Απάντηση

Στρογγύλευση σε 2 δ.ψ. : $x^* = 2.73$

Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής: $|\varepsilon| = |x^* - x| = |2.73 - 2.733| = |-0.003| = 0.003$

Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής: $max|\varepsilon| = 10^{-2}$

Άσκηση 11

- Αφού στρογγυλευθεί με Αποκοπή ο αριθμός $x = 2.7145$ σε 3 δ.ψ. να βρεθεί το Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής, και το Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής.

Απάντηση

Στρογγύλευση σε 3 δ.ψ. : $x^* = 2.714$

Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής: $|\varepsilon| = |x^* - x| = |2.714 - 2.7145| = |-0.0005| = 0.0005$

Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής: $max|\varepsilon| = 10^{-3}$

Άσκηση 12

- Αφού στρογγυλευθεί με Αποκοπή ο αριθμός $x = 2.7135$ σε 3 δ.ψ. να βρεθεί το Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής, και το Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής.

Απάντηση

Στρογγύλευση σε 3 δ.ψ. : $x^* = 2.713$

Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής: $|\varepsilon| = |x^* - x| = |2.713 - 2.7135| = |0.0005| = 0.0005$

Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής: $max|\varepsilon| = 10^{-3}$

Άσκηση 13

- Αφού στρογγυλευθεί με Αποκοπή ο αριθμός $x = 2.7379$ σε 3 δ.ψ. να βρεθεί το Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής, και το Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής.

Απάντηση

Στρογγύλευση σε 3 δ.ψ. : $x^* = 2.737$

Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής: $|\varepsilon| = |x^* - x| = |2.737 - 2.7379| = |-0.0009| = 0.0009$

Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής: $max|\varepsilon| = 10^{-3} = 0.001$

Άσκηση 14

- Αφού στρογγυλευθεί ο αριθμός $x = 10.1011111_2$ σε 2 δ.ψ. (με στρογγύλευση) να βρεθεί το Απόλυτο Σφάλμα Στρογγύλευσης, και το Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα Στρογγύλευσης.

Απάντηση

Στρογγύλευση σε 2 σ.ψ.: $x^* = (10.1011111 + 0.001)^* = (10.1101111)^* = 10.11_2$

Απόλυτο Σφάλμα Στρογγύλευσης:

$$|\varepsilon| = |x^* - x| = |10.11 - 10.1011111| = |0.0000001| = 0.0000001_2 = 2^{-7}$$

Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα Στρογγύλευσης: $max|\varepsilon| = 2^{-1-k} = 2^{-1-2} = 2^{-3}$

Άσκηση 15

- Αφού στρογγυλευθεί ο αριθμός $x = 10.101_2$ σε 2 δ.ψ. (με στρογγύλευση) να βρεθεί το Απόλυτο Σφάλμα Στρογγύλευσης, και το Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα Στρογγύλευσης.

Απάντηση

Στρογγύλευση σε 2 σ.ψ.: $x^* = (10.101 + 0.001)^* = (10.110)^* = 10.11_2$

Απόλυτο Σφάλμα Στρογγύλευσης:

$$|\varepsilon| = |x^* - x| = |10.11 - 10.101| = |0.001| = 0.001_2 = 2^{-3}$$

Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα Στρογγύλευσης: $max|\varepsilon| = 2^{-1-k} = 2^{-1-2} = 2^{-3}$

Άσκηση 16

- Αφού στρογγυλευθεί ο αριθμός $x = 10.1011111_2$ σε 2 δ.ψ. (με αποκοπή) να βρεθεί το Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής, και το Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής.

<u>Απάντηση</u>

Αποκοπή σε 2 σ.ψ.: $x^* = (10.1011111)^* = 10.10_2$
Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής:

$$|\varepsilon| = |x^* - x| = |10.10 - 10.1011111| = |0.0011111| = 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-6} + 2^{-7} \approx 2^{-2}$$

Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής: $max|\varepsilon| = 2^{-k} = 2^{-2}$

Άσκηση 17

- Αφού στρογγυλευθεί ο αριθμός $x = 10.101_2$ σε 2 δ.ψ. (με Αποκοπή) να βρεθεί το Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής, και το Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής.

<u>Απάντηση</u>

Αποκοπή σε 2 σ.ψ.: $x^* = (10.101)^* = 10.10_2$

Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής:

$$|\varepsilon| = |x^* - x| = |10.10 - 10.101| = |0.001| = 0.001_2 = 2^{-3}$$

Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής: $max|\varepsilon| = 2^{-k} = 2^{-2}$

Άσκηση 18

- Αφού στρογγυλευθεί ο αριθμός $x = 2.35_{10}$ σε 2 σ.ψ. (με στρογγύλευση) να βρεθεί το Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης, και το Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης.

<u>Απάντηση</u>

Στρογγύλευση σε 2 σ.ψ.: $x = 2.35 = (0.235)^* \cdot 10^1 = 0.24 \cdot 10^1 = 2.4 = x^*$
Απόλυτο Σφάλμα Στρογγύλευσης: $|\varepsilon| = |x^* - x| = |2.4 - 2.35| = |0.05| = 0.05$

Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης: $|\varepsilon_\sigma| = \dfrac{|x^* - x|}{|x|} = \dfrac{|0.05|}{|2.35|} = \dfrac{1}{47} = 0.0212765$

Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης:

$$max|\varepsilon_\sigma| = \frac{1}{2} \cdot 10^{1-k} = \frac{1}{2} \cdot 10^{1-2} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-1} = \frac{1}{20} = 0.05$$

Άσκηση 19

- Αφού στρογγυλευθεί ο αριθμός $x = 2.7145$ σε 3 σ.ψ. να βρεθεί το Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης, και το Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης.

Απάντηση

Στρογγύλευση σε 3 σ.ψ. : $x^* = 2.71$

Απόλυτο Σφάλμα Στρογγύλευσης: $|\varepsilon| = |x^* - x| = |2.71 - 2.7145| = |-0.0045| = 0.0045$

Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης : $|\varepsilon_\sigma| = \left|\dfrac{\varepsilon}{x}\right| = \dfrac{0.0045}{2.7145} = 0.001658$

Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης : $max|\varepsilon_\sigma| = 5 \cdot 10^{-3} = 0.005$

Άσκηση 20

- Να βρεθεί σε πόσα σ.ψ. συμφωνούν οι αριθμοί $x = 7.035$ και $x^* = 7.037$.

Απάντηση

$|\varepsilon| = |x^* - x| = |7.037 - 7.035| = |0.002| = 0.002$

$|\varepsilon_\sigma| = \left|\dfrac{\varepsilon}{x}\right| = \dfrac{0.002}{7.035} = 0.000284 \le 0.0005 = 5 \cdot 10^{-4}$, 4 σ.ψ..

Άσκηση 21

- Να βρεθεί σε πόσα σ.ψ. συμφωνούν οι αριθμοί $x = 7.037$ και $x^* = 7.042$.

Απάντηση

$|\varepsilon| = |x^* - x| = |7.042 - 7.037| = |0.005| = 0.005$

$|\varepsilon_\sigma| = \left|\dfrac{\varepsilon}{x}\right| = \dfrac{0.005}{7.037} = 0.00071 \le 0.005 = 5 \cdot 10^{-3}$, 3 σ.ψ..

Άσκηση 22

- Να βρεθεί σε πόσα σ.ψ. συμφωνούν οι αριθμοί $x = 7.037$ και $x^* = 7.137$.

Απάντηση

$|\varepsilon| = |x^* - x| = |7.137 - 7.037| = |0.1| = 0.1$

$|\varepsilon_\sigma| = \left|\dfrac{\varepsilon}{x}\right| = \dfrac{0.1}{7.037} = 0.01421 \le 0.05 = 5 \cdot 10^{-2}$, 2 σ.ψ..

Άσκηση 23

- Να βρεθεί σε πόσα σ.ψ. συμφωνούν οι αριθμοί $x = 0.000244$ και $x^* = 0.000153$.

Απάντηση

$|\varepsilon| = |x^* - x| = |0.000153 - 0.000244| = |-0.000091| = 0.000091$

$|\varepsilon_\sigma| = \left|\frac{\varepsilon}{x}\right| = \frac{0.000091}{0.000153} = 0.59477 \le 5 = 5 \cdot 10^0$, 0 σ.ψ..

Άσκηση 24

- Αφού στρογγυλευθεί ο αριθμός $x = 2.35_{10}$ σε 2 σ.ψ. (με αποκοπή) να βρεθεί το Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης, και το Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης.

Απάντηση

Στρογγύλευση σε 2 σ.ψ.: $x = 2.35 = (0.235)^* * 10^1 = 0.23 * 10^1 = 2.3 = x^*$

Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής: $|\varepsilon| = |x^* - x| = |2.3 - 2.35| = |-0.05| = 0.05$

Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Αποκοπής: $|\varepsilon_\sigma| = \frac{|x^* - x|}{|x|} = \frac{|0.05|}{|2.35|} = \frac{1}{47} = 0.0212766$

Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Αποκοπής:

$max|\varepsilon_\sigma| = 10^{1-k} = 10^{1-2} = 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$

Άσκηση 25

- Αφού στρογγυλευθεί ο αριθμός $x = 10.111_2 = 2.875_{10}$ σε 4 σ.ψ. (με στρογγύλευση) να βρεθεί το Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης, και το Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης.

Απάντηση

Στρογγύλευση σε 4 σ.ψ.:

$x = 10.111 = (0.10111)^* * 2^2 = (0.11000)^* * 2^2 = 0.1100 * 2^2 = 11.00_2 = 3.0_{10} = x^*$

Απόλυτο Σφάλμα Στρογγύλευσης: $|\varepsilon| = |x^* - x| = |3.000 - 2.875| = |0.125| = 0.125$

Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης: $|\varepsilon_\sigma| = \frac{|x^* - x|}{|x|} = \frac{|0.125|}{|2.875|} = \frac{1}{25} = 0.04$

Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης:

$max|\varepsilon_\sigma| = 2^{-k} = 2^{-4} = \frac{1}{16} = 0.0625$

Άσκηση 26

- Αφού στρογγυλευθεί ο αριθμός $x = 10.111_2 = 2.875_{10}$ σε 4 σ.ψ. (με αποκοπή) να βρεθεί το Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης, και το Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης.

Απάντηση

Στρογγύλευση σε 4 σ.ψ.:

$$x = 10.111 = (0.10111)^* * 2^2 = 0.1011 * 2^2 = 10.11_2 = 2.75_{10} = x^*$$

Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής: $|\varepsilon| = |x^* - x| = |2.750 - 2.875| = |-0.125| = 0.125$

Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Αποκοπής: $|\varepsilon_\sigma| = \dfrac{|x^* - x|}{|x|} = \dfrac{|0.125|}{|2.875|} = \dfrac{1}{25} = 0.04$

Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Αποκοπής:

$$max|\varepsilon_\sigma| = 2^{1-k} = 2^{1-4} = 2^{-3} = \frac{1}{8} = 0.125$$

Άσκηση 27

- Αφού μετατραπεί ο αριθμός $x = 0.6_{10}$ στο δυαδικό σύστημα και στρογγυλευθεί σε 7 σ.ψ. (με στρογγύλευση) να βρεθεί το Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης, και το Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης.

Απάντηση

Μετατροπή σε δυαδικό :

$$\begin{array}{lllllllllll} x = 0.6_{10} \rightarrow & 1.2 \rightarrow & 0.4 \rightarrow & 0.8 \rightarrow & 1.6 \rightarrow & 1.2 \rightarrow & 0.4 \rightarrow & 0.8 \rightarrow & 1.6 \rightarrow & ... & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & = 0.1001100110011...._2 \\ & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1... & & \end{array}$$

Στρογγύλευση σε 7 σ.ψ.:

$$x^* = 0.1001101_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} = \frac{64 + 8 + 4 + 1}{128} = \frac{77}{128} = 0.6015625_{10}$$

Απόλυτο Σφάλμα Στρογγύλευσης:

$$|\varepsilon| = |x^* - x| = |0.6015625 - 0.6| = |0.0015625| = 0.0015625$$

Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης: $|\varepsilon_\sigma| = \dfrac{|x^* - x|}{|x|} = \dfrac{|0.0015625|}{|0.6|} = 0.0026$

Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης: $max|\varepsilon_\sigma| = 2^{-7} = 0.0078125$

Άσκηση 28

- Αφού μετατραπεί ο αριθμός $x = 0.6_{10}$ στο δυαδικό σύστημα και στρογγυλευθεί σε 7 σ.ψ. (με Αποκοπή) να βρεθεί το Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης, και το Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Αποκοπής.

<u>Απάντηση</u>

Μετατροπή σε δυαδικό :

$x = 0.6_{10} = 0.1001100110011...._2$

Αποκοπή σε 7 σ.ψ. : $x^* = 0.1001100_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{16+2+1}{32} = \frac{19}{32} = 0.59375_{10}$

Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής: $|\varepsilon| = |x^* - x| = |0.59375 - 0.6| = |-0.00625| = 0.00625$

Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Αποκοπής: $|\varepsilon_\sigma| = \frac{|x^* - x|}{|x|} = \frac{|0.00625|}{|0.6|} = 0.01042$

Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Αποκοπής: $max|\varepsilon_\sigma| = 2^{1-7} = 2^{-6} = 0.015625$

Άσκηση 29

- Αφού μετατραπεί ο αριθμός $x = 0.1_{10}$ στο δυαδικό σύστημα και στρογγυλευθεί σε 5 σ.ψ. (με στρογγύλευση) να βρεθεί το Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης, και το Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης.

<u>Απάντηση</u>

Μετατροπή σε δυαδικό :

$$\begin{array}{cccccccccc} x = 0.1_{10} \rightarrow & 0.2 \rightarrow & 0.4 \rightarrow & 0.8 \rightarrow & 1.6 \rightarrow & 1.2 \rightarrow & 0.4 \rightarrow & 0.8 \rightarrow & 1.6 \rightarrow & ... \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1... & \end{array}$$

$= 0.0001100110011...._2 = (0.1100110011...)^* * 2^3 = 0.11010 * 2^3 = 0.0001101$

Στρογγύλευση σε 5 σ.ψ.:

$x^* = 0.0001101_2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} = \frac{8+4+1}{128} = \frac{13}{128} = 0.1015625_{10}$

Απόλυτο Σφάλμα Στρογγύλευσης:

$|\varepsilon| = |x^* - x| = |0.1015625 - 0.1| = |0.0015625| = 0.0015625$

Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης: $|\varepsilon_\sigma| = \frac{|x^* - x|}{|x|} = \frac{|0.0015625|}{|0.1|} = 0.015625$

Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης: $max|\varepsilon_\sigma| = 2^{-5} = 0.03125$

Άσκηση 30

- Αφού μετατραπεί ο αριθμός $x = 0.1_{10}$ στο δυαδικό σύστημα και στρογγυλευθεί σε 5 σ.ψ. (με Αποκοπή) να βρεθεί το Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης, και το Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης.

Απάντηση

Μετατροπή σε δυαδικό :

$$x = 0.1_{10} \to 0.2 \to 0.4 \to 0.8 \to 1.6 \to 1.2 \to 0.4 \to 0.8 \to 1.6 \to \ldots$$

$$\begin{array}{cccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\ldots \end{array}$$

$$= 0.0001100110011\ldots._2 = (0.1100110011\ldots)^* * 2^3 = 0.11001 * 2^3 = 0.00011001$$

Αποκοπή σε 5 σ.ψ.:

$$x^* = 0.00011001_2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{256} = \frac{16+8+1}{256} = \frac{25}{256} = 0.09765625_{10}$$

Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής:

$$|\varepsilon| = |x^* - x| = |0.09765625 - 0.1| = |-0.00234375| = 0.00234375$$

Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Αποκοπής: $|\varepsilon_\sigma| = \dfrac{|x^* - x|}{|x|} = \dfrac{|0.00234375|}{|0.1|} = 0.0234375$

Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Αποκοπής: $max|\varepsilon_\sigma| = 2^{1-5} = 2^{-4} = 0.0625$

Άσκηση 31

- Αφού μετατραπεί ο αριθμός $x = 0.825_{10}$ στο δυαδικό σύστημα και στρογγυλευθεί σε 7 σ.ψ. (με στρογγύλευση) να βρεθεί το Απόλυτο και το Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης, και το Μέγιστο Απόλυτο και το Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης.

Απάντηση

Μετατροπή σε δυαδικό :

$$x = 0.825_{10} \to 1.65 \to 1.3 \to 0.6 \to 1.2 \to 0.4 \to 0.8 \to 1.6 \to 1.2\ldots$$

$$\begin{array}{cccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\ldots \end{array} = 0.110100110011\ldots._2$$

Στρογγύλευση σε 7 δ.ψ. :

$$x^* = 0.11010100_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} = \frac{32+16+4+1}{64} = \frac{53}{64} = 0.828125_{10}$$

Απόλυτο Σφάλμα Στρογγύλευσης:

$$|\varepsilon| = |x^* - x| = |0.828125 - 0.825| = |0.003125| = 0.003125$$

Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα Στρογγύλευσης: $max|\varepsilon| = 2^{-1-7} = 2^{-8} = 0.00390625$

Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης: $|\varepsilon_\sigma| = \dfrac{|x^* - x|}{|x|} = \dfrac{|0.003125|}{|0.825|} = 0.003788$

Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης: $max|\varepsilon_\sigma| = 2^{-7} = 0.0078125$

Άσκηση 32

- Αφού μετατραπεί ο αριθμός $x = 0.825_{10}$ στο δυαδικό σύστημα και στρογγυλευθεί σε 7 δ.ψ. (με Αποκοπή) να βρεθεί το το Απόλυτο και το Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης, και το Μέγιστο Απόλυτο και το Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Αποκοπής.

Απάντηση

Μετατροπή σε δυαδικό :
$x = 0.825_{10} = 0.110100110011...._2$

Αποκοπή σε 7 σ.ψ. :
$x^* = 0.1101001_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{128} = \dfrac{64+32+8+1}{128} = \dfrac{105}{128} = 0.8203125_{10}$

Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής:
$|\varepsilon| = |x^* - x| = |0.8203125 - 0.825| = |-0.0046875| = 0.0046875$

Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής: $max|\varepsilon| = 2^{-7} = 0.0078125$

Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Αποκοπής: $|\varepsilon_\sigma| = \dfrac{|x^* - x|}{|x|} = \dfrac{|0.0046875|}{|0.825|} = 0.0056818$

Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Αποκοπής: $max|\varepsilon_\sigma| = 2^{1-7} = 2^{-6} = 0.015625$

Άσκηση 33

- Αφού μετατραπεί ο αριθμός $x = 2.35_{10}$ στο δυαδικό σύστημα και στρογγυλευθεί σε 6 σ.ψ. (με στρογγύλευση) να βρεθεί το Απόλυτο και το Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης, και το Μέγιστο Απόλυτο και το Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης.

Απάντηση

Μετατροπή σε δυαδικό : $x = 2.35_{10} = 10.0101100110011...._2$

Στρογγύλευση σε 6 σ.ψ.:
$x^* = (0.1001011001\,10011...)^* * 2^2 = 0.100110 * 2^2 = 10.011_2 = 2.375_{10}$

Απόλυτο Σφάλμα Στρογγύλευσης: $|\varepsilon| = |x^* - x| = |2.375 - 2.35| = |0.05| = 0.025$

Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης: $|\varepsilon_\sigma| = \dfrac{|x^* - x|}{|x|} = \dfrac{|0.025|}{|2.35|} = \dfrac{5}{470} = 0.0106$

Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγύλευσης:

$max|\varepsilon_\sigma| = 2^{-k} = 2^{-6} = \dfrac{1}{64} = \dfrac{5}{320} = 0.015625$

Άσκηση 34

- Αφού μετατραπεί ο αριθμός $x = 2.35_{10}$ στο δυαδικό σύστημα και στρογγυλευθεί σε 6 σ.ψ. (με Αποκοπή) να βρεθεί το Απόλυτο και το Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Αποκοπής, και το Μέγιστο Απόλυτο και το Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Αποκοπής.

<u>Απάντηση</u>

Μετατροπή σε δυαδικό : $x = 2.35_{10} = 10.0101100110011...._2$

Αποκοπή σε 6 σ.ψ.:

$x^* = (0.100101100110011...)^* * 2^2 = 0.100101 * 2^2 = 10.0101_2 = 2.3125_{10}$

Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής: $|\varepsilon| = |x^* - x| = |2.3125 - 2.35| = |-0.0375| = 0.0375$

Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Αποκοπής: $|\varepsilon_\sigma| = \dfrac{|x^* - x|}{|x|} = \dfrac{|0.0375|}{|2.35|} = 0.015957$

Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Αποκοπής:

$max|\varepsilon_\sigma| = 2^{1-k} = 2^{1-6} = 2^{-5} = \dfrac{1}{32} = 0.03125$

Άσκηση 35

- Αν οι αριθμοί $x = 1.33$, $y = 0.133$ δίνονται στρογγυλεμένοι σε 3 σημαντικά ψηφία, να βρεθεί το ***Απόλυτο Σφάλμα και*** το ***Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα*** του Αθροίσματος $x + y$, λόγω **απώλειας** σημαντικών ψηφίων.

<u>Απάντηση</u>

$(x + y)^* = (1.33 + 0.133)^* = (1.463)^* = 1.46$

$(x + y) = (1.33 + 0.133) = 1.463$

$|\varepsilon_{x+y}| = |(x + y)^* - (x + y)| = |1.46 - 1.463| = 0.003$

$|\varepsilon_{\sigma(x+y)}| = \dfrac{|\varepsilon_{x+y}|}{|x + y|} = \dfrac{0.003}{1.463} = 0.0020506$

Άσκηση 36

- Αν οι αριθμοί $x = 1.33$, $y = 0.133$ δίνονται στρογγυλεμένοι σε 3 σημαντικά ψηφία, να βρεθεί το ***Απόλυτο Σφάλμα και*** το ***Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα*** της Διαφοράς $x - y$, λόγω **απώλειας** σημαντικών ψηφίων.

Απάντηση

$$(x - y)^* = (1.33 - 0.133)^* = (1.197)^* = 1.20$$
$$(x - y) = (1.33 - 0.133) = 1.197$$
$$\left|\varepsilon_{x-y}\right| = \left|(x - y)^* - (x - y)\right| = \left|1.197 - 1.20\right| = 0.003$$
$$\left|\varepsilon_{\sigma(x-y)}\right| = \frac{\left|\varepsilon_{x-y}\right|}{\left|x - y\right|} = \frac{0.003}{1.197} = 0.0025062$$

Άσκηση 37

- Αν οι αριθμοί $x = 1.33$, $y = 0.133$, $z = 0.0133$ δίνονται στρογγυλεμένοι σε 3 σημαντικά ψηφία, να βρεθεί το ***Απόλυτο Σφάλμα και*** το ***Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα*** του Αθροίσματος $(x + y) - z$ λόγω **απώλειας** σημαντικών ψηφίων.

Απάντηση

$$((x + y)^* - z)^* = ((1.33 + 0.133)^* - 0.0133)^* = ((1.463)^* - 0.0133)^* = (1.46 - 0.0133)^* =$$
$$= (1.4467)^* = 1.45$$
$$(x + y) - z = 1.33 + 0.133 - 0.0133 = 1.463 - 0.0133 = 1.4497$$
$$\left|\varepsilon_{x+y-z}\right| = \left|(x^* + y^* - z^*) - (x + y - z)\right| = \left|1.45 - 1.4497\right| = 0.0003$$
$$\left|\varepsilon_{\sigma(x+y-z)}\right| = \frac{\left|\varepsilon_{x+y-z}\right|}{\left|x + y - z\right|} = \frac{0.0003}{1.4497} = 0.0002069$$

Άσκηση 38

- Να ***αποδειχθεί*** ότι αν οι αριθμοί $x = 1.33$, $y = 0.133$, $z = 0.0122$ δίνονται στρογγυλεμένοι σε 3 σημαντικά ψηφία, δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα στην πρόσθεση, δηλαδή $(x + y) + z \neq x + (y + z)$, λόγω απώλειας σημαντικών ψηφίων και ***να βρεθεί*** το ***Απόλυτο Σφάλμα*** του αθροίσματος x + y + z.

Απάντηση

$$((x + y)^* + z)^* = ((1.33 + 0.133)^* + 0.0122)^* = ((1.463)^* + 0.0122)^* = (1.46 + 0.0122)^* =$$
$$= (1.4722)^* = 1.47$$
$$(x + (y + z)^*)^* = (1.33 + (0.133 + 0.0122)^*)^* = (1.33 + 0.1452)^* = (1.33 + 0.145)^* = (1.475)^* = 1.48$$
$$x + y + z = 1.33 + 0.133 + 0.0122 = 1.4752$$
$$\left|\varepsilon_{(x+y)+z}\right| = \left|((x + y)^* + z)^* - (x + y + z)\right| = \left|1.47 - 1.4752\right| = 0.0052$$
$$\left|\varepsilon_{x+(y+z)}\right| = \left|(x + (y + z)^*)^* - (x + y + z)\right| = \left|1.48 - 1.4752\right| = 0.0048$$

Άσκηση 39

- Αν οι αριθμοί $x = 1.8$, $y = 0.95$ δίνονται στρογγυλεμένοι σε 2 σημαντικά ψηφία, να βρεθεί το ***Απόλυτο Σφάλμα και*** το ***Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα*** του Γινομένου $x \cdot y$, λόγω **απώλειας** σημαντικών ψηφίων..

<u>Απάντηση</u>

$$(x \cdot y)^* = (1.8 \cdot 0.95)^* = (1.71)^* = 1.7$$
$$x \cdot y = 1.8 \cdot 0.95 = 1.71$$
$$\left|\varepsilon_{(x \cdot y)}\right| = \left|(x \cdot y)^* - (x \cdot y)\right| = \left|1.71 - 1.7\right| = 0.01$$
$$\left|\varepsilon_{\sigma(x \cdot y)}\right| = \frac{\left|\varepsilon_{(x \cdot y)}\right|}{\left|x \cdot y\right|} = \frac{0.01}{1.71} = 0.005848$$

Άσκηση 40

- Να ***αποδειχθεί*** ότι αν οι αριθμοί $x = 0.3$, $y = 0.5$, $z = 0.4$ δίνονται στρογγυλεμένοι σε 1 σημαντικό ψηφίο, δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα στον Πολλαπλασιασμό, δηλαδή $(x \cdot y) \cdot z \neq x \cdot (y \cdot z)$, λόγω απώλειας σημαντικών ψηφίων και ***να βρεθεί*** το ***Απόλυτο Σφάλμα*** του γινομένου $x \cdot y \cdot z$.

<u>Απάντηση</u>

$$((x \cdot y)^* \cdot z)^* = ((0.3 \cdot 0.5)^* \cdot 0.4)^* = ((0.15)^* \cdot 0.4)^* = (0.2 \cdot 0.4)^* = 0.08$$
$$(x \cdot (y \cdot z)^*)^*) = (0.3 \cdot (0.5 \cdot 0.4)^*)^* = (0.3 \cdot 0.2)^* = 0.06$$
$$x \cdot y \cdot z = 0.3 \cdot 0.5 \cdot 0.4 = 0.06$$
$$\left|\varepsilon_{(x \cdot y) \cdot z}\right| = \left|((x \cdot y) \cdot z) - (x \cdot y \cdot z)\right| = \left|0.08 - 0.06\right| = 0.02$$
$$\left|\varepsilon_{\sigma(x \cdot y) \cdot z}\right| = \frac{\left|\varepsilon_{(x \cdot y) \cdot z}\right|}{x \cdot y \cdot z} = \frac{\left|0.02\right|}{\left|0.06\right|} = 0.333333$$
$$\left|\varepsilon_{x \cdot (y \cdot z)}\right| = \left|(x \cdot (y \cdot z)) - (x \cdot y \cdot z)\right| = \left|0.06 - 0.06\right| = 0$$

$$\left|\varepsilon_{\sigma(x \cdot (y \cdot z))}\right| = \frac{\left|\varepsilon_{x \cdot (y \cdot z)}\right|}{x \cdot y \cdot z} = \frac{\left|0\right|}{\left|0.06\right|} = 0$$

Άσκηση 41

- Αν οι αριθμοί $x = 5.0$, $y = 8.0$ δίνονται στρογγυλεμένοι σε 2 σημαντικά ψηφία, να βρεθεί το ***Απόλυτο Σφάλμα και*** το ***Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα*** του Πηλίκου x / y, λόγω **απώλειας** σημαντικών ψηφίων.

Απάντηση

$$(x/y)^* = (5.0/8.0)^* = (0.625)^* = 0.62$$
$$(x/y) = (5.0/8.0) = 0.625$$
$$\left|\varepsilon_{(x/y)}\right| = \left|(x/y)^* - (x/y)\right| = \left|0.62 - 0.625\right| = 0.005$$
$$\left|\varepsilon_{\sigma(x/y)}\right| = \frac{\left|\varepsilon_{(x/y)}\right|}{\left|x/y\right|} = \frac{0.005}{0.625} = 0.008$$

Άσκηση 42

- Αν $x^* = 1.33$ και $y^* = 0.133$, να βρεθεί το ***Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα*** του Αθροίσματος $x+y$, όταν οι αριθμοί x, y δίνονται στρογγυλεμένοι σε 2 δεκαδικά ψηφία ο αριθμός x και σε 3 δεκαδικά ψηφία ο αριθμός y.

Απάντηση

$$\left|\varepsilon_{x+y}\right| \le \left|\varepsilon_x\right| + \left|\varepsilon_y\right| = \frac{1}{2}\cdot 10^{-2} + \frac{1}{2}\cdot 10^{-3} = 0.005 + 0.0005 = 0.0055$$

Άσκηση 43

- Αν $x^* = 1.33$ και $y^* = 0.133$, να βρεθεί το ***Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα*** της Διαφοράς $x-y$, όταν οι αριθμοί x, y δίνονται στρογγυλεμένοι σε 2 δεκαδικά ψηφία ο αριθμός x και σε 3 δεκαδικά ψηφία ο αριθμός y.

Απάντηση

$$\left|\varepsilon_{x-y}\right| \le \left|\varepsilon_x\right| + \left|\varepsilon_y\right| = \frac{1}{2}\cdot 10^{-2} + \frac{1}{2}\cdot 10^{-3} = 0.005 + 0.0005 = 0.0055$$

Άσκηση 44

- Αν $x^* = 1.33$ και $y^* = 1.22$, να βρεθεί το ***Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα*** του Αθροίσματος $x+y$, όταν οι αριθμοί x, y δίνονται στρογγυλεμένοι σε 2 δεκαδικά ψηφία ο αριθμός x και σε 3 δεκαδικά ψηφία ο αριθμός y,

Απάντηση

$$\left|\varepsilon_{\sigma x}\right| \approx \frac{\left|\varepsilon_x\right|}{\left|x^*\right|} \le \frac{\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}}{1.33} = \frac{1}{266} = 0.0037593$$

$$\left|\varepsilon_{\sigma y}\right| \approx \frac{\left|\varepsilon_y\right|}{\left|y^*\right|} \le \frac{\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}}{1.22} = \frac{1}{244} = 0.0040983$$

$$\left|\varepsilon_{\sigma(x+y)}\right| \le \left|\overline{\varepsilon_{\sigma(x+y)}}\right| = max(\left|\varepsilon_{\sigma x}\right|, \left|\varepsilon_{\sigma y}\right|) = 0.0040983$$

Άσκηση 45

- Αν $x^* = 1.33$ και $y^* = 1.22$, να βρεθεί το ***Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα*** της Διαφοράς $x - y$, όταν οι αριθμοί x, y δίνονται στρογγυλεμένοι σε 2 δεκαδικά ψηφία ο αριθμός x και σε 3 δεκαδικά ψηφία ο αριθμός y,

Απάντηση

$$\left|\varepsilon_{\sigma x}\right| \approx \frac{\left|\varepsilon_x\right|}{\left|x^*\right|} \le \frac{\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}}{1.33} = \frac{1}{266} = 0.0037593$$

$$\left|\varepsilon_{\sigma y}\right| \approx \frac{\left|\varepsilon_y\right|}{\left|y^*\right|} \le \frac{\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}}{1.22} = \frac{1}{244} = 0.0040983$$

$$\left|\varepsilon_{\sigma(x+y)}\right| \le \frac{\left|\varepsilon_x\right| + \left|\varepsilon_y\right|}{\left|x^* - y^*\right|} \le \frac{\frac{1}{2}\cdot 10^{-2} + \frac{1}{2}\cdot 10^{-2}}{0.11} = \frac{1}{11} = 0.09$$

Άσκηση 46

- Αν $x^* = 1.8$, $y^* = 0.95$, να βρεθεί το ***Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα και*** το ***Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα*** του Γινομένου $x \cdot y$ όταν οι αριθμοί x, y δίνονται στρογγυλεμένοι σε 1 δεκαδικό ψηφίο ο αριθμός x και σε 2 δεκαδικά ψηφία ο αριθμός y.

Απάντηση

$$\left|\varepsilon_{\sigma x}\right| \approx \frac{\left|\varepsilon_x\right|}{\left|x^*\right|} \le \frac{\frac{1}{2}\cdot 10^{-1}}{1.8} = \frac{1}{36} = 0.0277777$$

$$\left|\varepsilon_{\sigma y}\right| \approx \frac{\left|\varepsilon_y\right|}{\left|y^*\right|} \le \frac{\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}}{0.95} = \frac{1}{190} = 0.0052631$$

$$\left|\varepsilon_{\sigma(x\cdot y)}\right| \le \left|\varepsilon_{\sigma x}\right| + \left|\varepsilon_{\sigma y}\right| \le 0.0277777 + 0.0052631 = 0.0330408$$

$$\left|\varepsilon_{\sigma(x\cdot y)}\right| \approx \frac{\left|\varepsilon_{(x\cdot y)}\right|}{\left|x^*\cdot y^*\right|} \Rightarrow \left|\varepsilon_{(x\cdot y)}\right| \approx \left|\varepsilon_{\sigma(x\cdot y)}\right|\cdot\left|x^*\cdot y^*\right| \le 0.0330408\cdot 1.71 = 0.0564997$$

Άσκηση 47

- Αν $x^* = 1.8$, $y^* = 0.95$, να βρεθεί το ***Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα και*** το ***Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα*** του Πηλίκου x/y όταν οι αριθμοί x, y δίνονται στρογγυλεμένοι σε 1 δεκαδικό ψηφίο ο αριθμός x και σε 2 δεκαδικά ψηφία ο αριθμός y.

Απάντηση

$$\left|\varepsilon_{\sigma x}\right| \approx \frac{\left|\varepsilon_x\right|}{\left|x^*\right|} \le \frac{\frac{1}{2}\cdot 10^{-1}}{1.8} = \frac{1}{36} = 0.0277777$$

$$\left|\varepsilon_{\sigma y}\right| \approx \frac{\left|\varepsilon_y\right|}{\left|y^*\right|} \le \frac{\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}}{0.95} = \frac{1}{190} = 0.0052631$$

$$\left|\varepsilon_{\sigma(x/y)}\right| \le \left|\varepsilon_{\sigma x}\right| + \left|\varepsilon_{\sigma y}\right| \le 0.0277777 + 0.0052631 = 0.0330408$$

$$\left|\varepsilon_{\sigma(x/y)}\right| \approx \frac{\left|\varepsilon_{(x/y)}\right|}{\left|x^*/y^*\right|} \Rightarrow \left|\varepsilon_{(x/y)}\right| \approx \left|\varepsilon_{\sigma(x/y)}\right|\cdot\left|x^*/y^*\right| \le 0.0330408\cdot 1.71 = 0.0626036$$

Κεφάλαιο 3 – Σειρές-Συναρτήσεις

Άσκηση 1

- Να αναπτυχθεί η συνάρτηση $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$ σε σειρά MacLaurin.

Απάντηση

- Για τη συνάρτηση αυτή ως γνωστόν ισχύει :

$$f(x)=\frac{1+x}{1-x}, \qquad f(0)=1$$

$$f'(x)=\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{2\cdot 1!}{(1-x)^2} \qquad f'(0)=2\cdot 1!$$

$$f''(x)=\frac{2\cdot 2}{(1-x)^3}=\frac{2\cdot 2!}{(1-x)^3} \qquad f''(0)=2\cdot 2!$$

$$f'''(x)=\frac{2\cdot 6}{(1-x)^4}=\frac{2\cdot 3!}{(1-x)^4} \qquad f'''(0)=2\cdot 3!$$

και γενικά :

$$f^{(n)}(x)=\frac{2\cdot n!}{(1-x)^{n+1}} \qquad f^{(n)}(0)=2\cdot n!$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο του **Maclaurin** βρίσκουμε :

$$f(x)=\frac{1+x}{1-x}=f(0)+\frac{x\cdot f'(0)}{1!}+\frac{x^2\cdot f''(0)}{2!}+\cdots+\frac{x^n\cdot f^{(n)}(0)}{n!}+\ldots=$$

$$=1+2\cdot x+2\cdot x^2+\cdots+2\cdot x^n+\ldots=1+\sum_{i=1}^{\infty}2\cdot x^i$$

Άσκηση 2

- Να βρεθεί η **Διόρθωση** $r_n(x)=s-s^*$, αν χρησιμοποιηθούν οι n πρώτοι όροι του αναπτύγματος για τον υπολογισμό της Σειράς $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$.

Απάντηση

- **Αν** $s=1+\sum_{i=1}^{\infty}x^i$ και $s^*=1+\sum_{i=1}^{n}x^i$ η ακριβής και η προσεγγιστική έκφραση της Σειράς $\frac{1+x}{1-x}$, η **Διόρθωση** $r_n(x)$ θα είναι :

$$r_n(x) = s - s^* = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} 2 \cdot x^i - 1 - \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot x^i = \sum_{i=n+1}^{\infty} 2 \cdot x^i = 2 \cdot x^{n+1} + 2 \cdot x^{n+2} + \dots =$$
$$= 2 \cdot x^{n+1} \cdot \left(1 + x + x^2 + \dots\right) = \frac{2 \cdot x^{n+1}}{1 - x}$$

Άσκηση 3

- Να χρησιμοποιηθούν οι $n = 3$ πρώτοι όροι του αναπτύγματος για τον υπολογισμό της Σειράς $\frac{1+x}{1-x}$, $x = -\frac{1}{3}$ και να βρεθεί η **Διόρθωση** $r_n(x) = r_3(x) = s - s^*$.

<u>Απάντηση</u>

Η ακριβής τιμή s η προσεγγιστική s^* και η διόρθωση $r_3(x)$ θα είναι αντίστοιχα :

$$s = \frac{1+x}{1-x} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$s^* = 1 + 2 \cdot x + 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3 = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{9} - \frac{2}{27} =$$
$$= \frac{27 - 18 + 6 - 2}{27} = \frac{13}{27} = 0.4814815$$

$$r_n(x) = r_3(x) = s - s^* = 0.5 - 0.4814815 = 0.0185185$$

❖ Στο ίδιο αποτέλεσμα φτάνουμε με τη χρήση της αναλυτικής έκφρασης που βρέθηκε στην Άσκηση 2 :

$$r_n(x) = r_3(x) = \frac{2 \cdot x^{3+1}}{1-x} = \frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{3+1}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{2}{3^4}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{54} = 0.0185185$$

Άσκηση 4

- Δίνεται το Πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 9 \cdot x$. Να βρεθεί με το Σχήμα του Horner η τιμή του στο σημείο $\xi = 3$. (Απάντηση $P(\xi) = P(3) = r_0 = 0$)

<u>Απάντηση</u>

	1	0	-9	0
3		3	9	0
	1	3	0	$0 = P(3)$

Άσκηση 5

- Δίνεται το Πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 9 \cdot x$. Να βρεθεί με το Σχήμα του Horner η τιμή του στο σημείο $\xi = 2$. (Απάντηση $P(\xi) = P(2) = r_0 = -10$)

Απάντηση

	1	0	-9	0
2		2	4	-10
	1	2	-5	$-10 = P(2)$

Άσκηση 6

- Δίνεται το Πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 9 \cdot x$. Να βρεθεί με το Σχήμα του Horner η τιμή της παραγώγου του στο σημείο $\xi = 1$. (Απάντηση $P'(\xi) = P'(1) = r_1 = -6$)

Απάντηση

	1	0	-9	0
1		1	1	-8
	1	1	-8	$-8 = P(1)$
1		1	2	
	1	2	$-6 = P'(1)$	

Άσκηση 7

- Δίνεται το Πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2$. Να βρεθεί με το Σχήμα του Horner η τιμή του Πολυωνύμου και της παραγώγου του στο σημείο $\xi = 0$. (Απάντηση $P(\xi) = P(0) = 0$, $P'(\xi) = P'(0) = 0$)

Απάντηση

	1	-1	0	0
0		0	0	0
	1	-1	0	$0 = P(0)$
0		0	0	
	1	-1	$0 = P'(0)$	

Άσκηση 8

- Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2 \cdot x^4 - 2 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + x - 1$. Να βρεθεί με το Σχήμα του Horner η τιμή **όλων** των παραγώγων του στο σημείο $\xi = -1$.

Απάντηση

Εφαρμόζουμε όσες φορές χρειάζεται το Σχήμα του Horner για τα $P(x)$ και $Q_k(x) \mid k = 0(1)n$, έχουμε :

	2	-2	-2	1	-1
-1		-2	4	-2	1
	2	-4	2	-1	$0 = r_0$
-1		-2	6	-8	
	2	-6	8	$-9 = r_1$	
-1		-2	8		
	2	-8	$16 = r_2$		
-1		-2			
	2	$-10 = r_3$			
-1					
	$2 = r_4$				

Εφαρμόζοντας τον τύπο $P^{(k)}(1) = k! \cdot r_k$ για $k = 0(1)4$ βρίσκουμε

$$P(1) = 0! \cdot r_0 = 1 \cdot 0 = 0$$
$$P'(1) = 1! \cdot r_1 = 1 \cdot -9 = -9$$
$$P''(1) = 2! \cdot r_2 = 2 \cdot 16 = 32$$
$$P'''(1) = 3! \cdot r_3 = 6 \cdot -10 = -60$$
$$P^{iv}(1) = 4! \cdot r_4 = 24 \cdot 2 = 48$$

Άσκηση 9

- Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 5$. Με επανειλημμένες εφαρμογές του σχήματος του Horner να γραφτεί με τη μορφή $P(x) = \alpha + \beta \cdot (x - 2) + \gamma \cdot (x - 2)^2 + \delta \cdot (x - 2)^3$.

Απάντηση

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Tailor με $\xi = 2$, το πολυώνυμο που δόθηκε μπορεί να γραφτεί ως εξής :

$$P(x) = x^3 + 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 5 \equiv P(2) + \frac{(x-2)}{1!} \cdot P'(2) + \frac{(x-2)^2}{2!} \cdot P''(2) + \frac{(x-2)^3}{3!} \cdot P'''(2)$$

Όμως ισχύει

$P^{(k)}(2) = k! \cdot r_k \mid k = 0(1)3$

οπότε θα έχουμε τελικά :

$P(x) \equiv r_0 + r_1 \cdot (x-2) + r_2 \cdot (x-2)^2 + r_3 \cdot (x-2)^3$.

επομένως

$\alpha = r_0, \beta = r_1$, $\gamma = r_2$ και $\delta = r_3$.

Εφαρμόζουμε όσες φορές χρειάζεται το Σχήμα του Horner για τα $P(x)$ και $Q_k(x) \mid k = 0(1)n$, έχουμε :

	1	3	-4	5
2		2	10	12
	1	5	6	$17 = r_0$
2		2	14	
	1	7	$20 = r_1$	
2		2		
	1	$9 = r_2$		
	$= r_3$			

οπότε το πολυώνυμο που δόθηκε μπορεί να γραφτεί ως εξής :

$$P(x) \equiv x^3 + 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 5 \equiv r_0 + r_1 \cdot (x-2) + r_2 \cdot (x-2)^2 + r_3 \cdot (x-2)^3 =$$
$$= 17 + 20 \cdot (x-2) + 9 \cdot (x-2)^2 + 1 \cdot (x-2)^3$$

ενώ η τιμή του Πολυωνύμου και των παραγώγων του στο σημείο $\xi = 2$ θα είναι :

$$P(2) = 0! \cdot r_0 = 1 \cdot 17 = 17$$
$$P'(2) = 1! \cdot r_1 = 1 \cdot 20 = 20$$
$$P''(2) = 2! \cdot r_2 = 2 \cdot 9 = 18$$
$$P'''(2) = 3! \cdot r_3 = 6 \cdot 1 = 6$$

Κεφάλαιο 4 – Αριθμητική Επίλυση Εξισώσεων

Άσκηση 1

- Δίνεται το Πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 9 \cdot x$. Να βρεθεί πόσες και ποιες ρίζες υπάρχουν στα διαστήματα $(-4,4),(-4,-2),(-4,1),(-5,-4)$.

Απάντηση

$P(-4) \cdot P(4) = -28 \cdot 28 < 0$, υπάρχει περιττός αριθμός ριζών (3 ρίζες, $\xi_1 = -3, \xi_2 = 0, \xi_3 = 3$)
$P(-4) \cdot P(-2) = -28 \cdot 10 < 0$, υπάρχει μία ρίζα ($\xi_1 = -3$)
$P(-4) \cdot P(1) = -28 \cdot -8 > 0$, υπάρχει άρτιος αριθμός ριζών (2 ρίζες, $\xi_1 = -3, \xi_2 = 0$)
$P(-5) \cdot P(-4) = -80 \cdot -28 > 0$, δεν υπάρχει καμιά ρίζα

Άσκηση 2

- Δίνεται το Πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x = 0$. Να βρεθούν τα υπο-διαστήματα στα οποία υπάρχουν ρίζες, αν $(a,b) = (-1.5,2.5)$ και $n = 4$.

Απάντηση

1) Βρίσκουμε το βήμα $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{2.5-(-1.5)}{4} = 1$
2) Διαιρούμε το διάστημα $I = (a,b)$ στα σημεία $-1.5,-0.5,0.5,1.5,2.5$.
3) Βρίσκουμε το πρόσημο των τιμών του Πολυωνύμου $P(x)$ σ' αυτά τα σημεία, όπως φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

x	-1.5	-0.5	0.5	1.5	2.5
$P(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$

4) Το Πολυώνυμο έχει τρεις πραγματικές ρίζες, στα διαστήματα $(-1.5,-0.5),(-0.5,0.5),(0.5,1.5)$.

Άσκηση 3

- Δίνεται το Πολυώνυμο $P(x) = x^2 - 4 = 0$. Να ελεγχθεί αν η ρίζα που υπάρχει στο διάστημα $\left(\frac{3}{2},3\right)$ είναι μοναδική.

Απάντηση

$P\left(\frac{3}{2}\right) \cdot P(3) = \frac{-7}{4} \cdot 5 < 0$, άρα υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(\frac{3}{2},3\right)$

$P'(x) = 2 \cdot x$,

$P'\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3 > 0$

$P'(3) = 2 \cdot 3 = 6 > 0$

$P'(2) = 4 > 0$

Επομένως, ισχύει $P'(x) > 0,\ \forall x \in \left[\frac{3}{2}, 3\right]$, οπότε η ρίζα που υπάρχει στο διάστημα $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ είναι μοναδική.

Άσκηση 4

- Δίνεται το Πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 3 \cdot x = 0$. Να βρεθούν με τη βοήθεια των ριζών της παραγώγου του Πολυωνύμου $P(x)$ τα υπο-διαστήματα στα οποία υπάρχουν ρίζες, αν $(a,b) = (-3,3)$.

<u>Απάντηση</u>

1) Η παράγωγος του Πολυωνύμου $P(x)$ είναι :

$P'(x) = 3 \cdot x^2 - 3$

με ρίζες $\xi_1 = -1,\quad \xi_2 = 1$.

2) Διαιρούμε το διάστημα $(a,b) = (-3,3)$ στα υπο-διαστήματα $(-3,-1), (-1,1),\ (1,3)$.

3) Βρίσκουμε το πρόσημο των τιμών του Πολυωνύμου $P(x)$ σ' αυτά τα σημεία, όπως φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

x	-3	-1	1	3
$P(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

4) Το Πολυώνυμο έχει τρεις πραγματικές ρίζες στα διαστήματα $(-3,-1), (-1,1),\ (1,3)$.

Άσκηση 5

- Δίνεται το Πολυώνυμο $P(x) = x^2 - 3 \cdot x = 0$. Να βρεθεί διάστημα (a,b) που να περιέχει τις 2 πραγματικές ρίζες $\xi_1, \xi_2 = 0,3$ (άνω και κάτω φράγμα).

<u>Απάντηση</u>

Για $b = 1$, εφαρμόζουμε το Σχήμα Horner :

	1	-3	0
1		1	-2
	$1 = q_0$	$-2 = q_1$	$-2 = q_2 = P(1)$

Για τους συντελεστές q_1, q_2 ισχύει $q_1, q_2 < 0$, οπότε εφαρμόζουμε το Σχήμα Horner για $b = 4$:

	1	-3	0
4		4	4
	$1 = q_0$	$1 = q_1$	$4 = q_2 = P(4)$

Οι συντελεστές $q_1, q_2, ..., q_n \geq 0$ και $q_0 = p_0 > 0$, οπότε $\forall \xi_i, i = 1,2,...,n$ ισχύει :
$\xi_i < b = 4,\ i = 1,2,...,n$.

Για την εύρεση του κάτω φράγματος, δημιουργούμε το Πολυώνυμο :

$(-1)^2 \cdot P(-x) = (-1)^2 \cdot ((-x)^2 - 3 \cdot (-x)) = x^2 + 3 \cdot x = x \cdot (x + 3)$

με ρίζες $-\xi_1, -\xi_2 = 0, -3$ και κάνουμε εφαρμογή του Θεωρήματος 4.3 για $a = 1$:

	1	3	0
1		1	4
	$1 = q_0$	$4 = q_1$	$4 = q_2 = P(1)$

Οι συντελεστές $q_1, q_2, ..., q_n \geq 0$ και $q_0 = p_0 > 0$, οπότε $\forall \xi_i, i = 1,2,...,n$ ισχύει :
$-\xi_i < 1 = a,\ i = 1,2,...,n$ ή $\xi_i > -1 = -\alpha,\ i = 1,2,...,n$ και οι ρίζες ανήκουν στο διάστημα $(-a, b) = (-1, 4)$.

Άσκηση 6

- Αν για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1$ $\exists$ μια ρίζα $\xi = 1$ στο διάστημα $(a_0, b_0) = (0.6, 1.6)$ να βρεθεί

α) Ο αριθμός των επαναλήψεων με τη Μέθοδο της Διχοτόμησης που θα χρειαστούν, ώστε να βρεθεί η προσέγγιση x_n της ρίζας $\xi = 1$ με ακρίβεια ενός δ.ψ. ($k = 1$), αν είναι γνωστό ότι

$$n \geq \frac{\log\left(10^k \cdot (b - a)\right)}{\log 2},\ \ \log 2 = 0.3017$$

β) Οι προσεγγίσεις $x_0, x_1, ..., x_n$, ώστε να βρεθεί η προσέγγιση x_n της ρίζας $\xi = 1$ με ακρίβεια ενός δ.ψ

<u>Απάντηση</u>

α) $n \geq \dfrac{\log(10^1 \cdot (1.6 - 0.6))}{\log 2} = \dfrac{\log(10^1)}{\log 2} = \dfrac{1}{0.3017} = 3.346 \approx 3$

β) $f(a_0) = a_0^2 - 1 = 0.6^2 - 1 = 0.36 - 1 = -0.64 < 0$,
$f(b_0) = b_0^2 - 1 = 1.6^2 - 1 = 2.56 - 1 = 1.56 > 0$
$f(a_0) \cdot f(b_0) = -0.64 \cdot 1.56 < 0$, επομένως υπάρχει ρίζα στο $(a_0, b_0) = (0.6, 1.6)$

$$x_0 = \frac{a_0+b_0}{2} = \frac{0.6+1.6}{2} = \frac{2.2}{2} = 1.1\,,\quad |\varepsilon_0| = |x_0-\xi| = |1.1-1| = 0.1 > 0.05 = \tfrac{1}{2}\cdot 10^{-1}$$

$$f(x_0) = x_0^2 - 1 = 1.1^2 - 1 = 1.21 - 1 = 0.21 > 0\ ,\ f(a_0)\cdot f(x_0) = -0.64\cdot 0.21 < 0$$

$$(a_1,b_1) = (0.6,1.1),\ x_1 = \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{0.6+1.1}{2} = \frac{1.7}{2} = 0.85\,,$$

$$|\varepsilon_1| = |x_1-\xi| = |0.85-1| = 0.15 > 0.05 = \tfrac{1}{2}\cdot 10^{-1}$$

$$f(x_1) = x_1^2 - 1 = 0.85^2 - 1 = 0.7225 - 1 = -0.2775 < 0\ ,\ f(x_1)\cdot f(b_1) = -0.2775\cdot 0.21 < 0$$

$$(a_2,b_2) = (0.85,1.1),\ x_2 = \frac{a_2+b_2}{2} = \frac{0.85+1.1}{2} = \frac{1.95}{2} = 0.975\,,$$

$$|\varepsilon_2| = |x_2-\xi| = |0.975-1| = 0.025 < 0.05 = \tfrac{1}{2}\cdot 10^{-1}$$

Άσκηση 7

- Αν για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1$ υπάρχει μια ρίζα $\xi = 1$ στο διάστημα $(a_0,b_0) = (1/2, 3/2)$ να βρεθούν οι προσεγγίσεις $x_0, x_1, ..., x_n$, με τη Μέθοδο της Εσφαλμένης Θέσης που θα χρειαστούν, ώστε να βρεθεί η προσέγγιση x_n της ρίζας $\xi = 1$ με ακρίβεια ενός δ.ψ.

Απάντηση

$$f(a_0) = a_0^2 - 1 = (1/2)^2 - 1 = 1/4 - 1 = -3/4 < 0\,,$$

$$f(b_0) = b_0^2 - 1 = (3/2)^2 - 1 = 9/4 - 1 = 5/4 > 0$$

$f(a_0)\cdot f(b_0) = -3/4 \cdot 5/4 < 0$, επομένως υπάρχει ρίζα στο $(a_0,b_0) = (1/2, 3/2)$

$$x_0 = b_0 - \frac{b_0-a_0}{f(b_0)-f(a_0)} f(b_0) = \frac{3}{2} - \frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}}\frac{5}{4} = \frac{3}{2} - \frac{\frac{5}{4}}{\frac{8}{4}} = \frac{3}{2} - \frac{5}{8} = \frac{7}{8} = 0.875$$

$$|\varepsilon_0| = |x_0-\xi| = |0.875-1| = 0.125 > 0.05 = \tfrac{1}{2}\cdot 10^{-1}$$

$$f(x_0) = x_0^2 - 1 = (7/8)^2 - 1 = 49/64 - 1 = -15/64 < 0\ ,\ f(x_0)\cdot f(b_0) = -15/64 \cdot 5/4 < 0$$

$$(a_1,b_1) = (7/8, 3/2),\ x_1 = b_1 - \frac{b_1-a_1}{f(b_1)-f(a_1)} f(b_1) = \frac{3}{2} - \frac{\frac{3}{2}-\frac{7}{8}}{\frac{5}{4}+\frac{15}{64}}\frac{5}{4} = \frac{3}{2} - \frac{\frac{25}{32}}{\frac{95}{64}} = \frac{3}{2} - \frac{50}{95} = \frac{37}{38} = 0.97368\,,$$

$$|\varepsilon_1| = |x_1-\xi| = |0.97368-1| = 0.0263 < 0.05 = \tfrac{1}{2}\cdot 10^{-1}$$

Άσκηση 8

- Να βρεθεί το σταθερό σημείο στη Μέθοδο της Εσφαλμένης Θέσης για την εύρεση της ρίζας $\xi = 1$ της εξίσωσης $f(x) = x^3 - x = 0$ στο διάστημα $(a_0,b_0) = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

Απάντηση

$$f(x) = x^3 - x = 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-3}{8} < 0$$

$f(2)=2^3-2=6>0$,

$f'(x)=3\cdot x^2-1$

$f''(x)=6\cdot x$, $f''\left(\frac{1}{2}\right)=6\cdot(\frac{1}{2})=3>0$, $f''(2)=6\cdot 2=12>0$

επομένως σταθερό σημείο είναι το $b_0=2$.

Άσκηση 9

- Να βρεθεί με τη γενικευμένη μέθοδος της Εσφαλμένης Θέσης (αφού πρώτα βρεθεί το σταθερό σημείο) η ρίζα $\xi=2$ της εξίσωσης $f(x)=x^2-4=0$ στο διάστημα $(a_0,b_0)=\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$ με ακρίβεια 1 δεκαδικού ψηφίου ($k=1$).

<u>Απάντηση</u>

$$f(a_0)=f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-4=\frac{9}{4}-4=-\frac{7}{4}<0$$

$$f(b_0)=f\left(\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}\right)^2-4=\frac{25}{4}-4=\frac{9}{4}>0$$

$$f(a_0)\cdot f(b_0)=-\frac{7}{4}\cdot\frac{9}{4}=-\frac{63}{16}<0$$

επομένως υπάρχει ρίζα στο $(a_0,b_0)=\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$

$f'(x)=2\cdot x$

$f''(x)=2$,

$f''\left(\frac{3}{2}\right)=2>0$

$f''\left(\frac{5}{2}\right)=5>0$

επομένως σταθερό σημείο είναι το $b_0=\frac{5}{2}$, οπότε $x_0=a_0=\frac{3}{2}$

$$x_1=x_0-\frac{b-x_0}{f(b)-f(x_0)}\cdot f(x_0)=\frac{3}{2}-\frac{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}{\frac{9}{4}-(-\frac{7}{4})}\cdot(-\tfrac{7}{4})=\frac{3}{2}+\frac{\frac{7}{4}}{\frac{16}{4}}=\frac{31}{16}=1.9375,$$

$$|\varepsilon_1|=|x_1-\xi|=|1.9375-2|=0.0625>0.05=\tfrac{1}{2}\cdot 10^{-1},$$

$$f\left(\frac{31}{16}\right)=\left(\frac{31}{16}\right)^2-4=\frac{961}{256}-4=-\frac{63}{256}$$

$$x_2=x_1-\frac{b-x_1}{f(b)-f(x_1)}\cdot f(x_1)=\frac{31}{16}-\frac{\frac{5}{2}-\frac{31}{16}}{\frac{9}{4}-(-\frac{63}{256})}\cdot(-\tfrac{63}{256})=\frac{31}{16}+\frac{\frac{9}{16}\cdot\frac{63}{256}}{\frac{639}{256}}=\frac{2264}{1136}=1.9929577,$$

$$|\varepsilon_2|=|x_2-\xi|=|1.9829577-2|=0.0070423<0.05=\tfrac{1}{2}\cdot 10^{-1}.$$

Άσκηση 10

- Αν η συνάρτηση η $x = 2 \cdot x - \frac{1}{x} \equiv g(x)$ αποτελεί αναδιάταξη της $f(x) = 0$

1. Να βρεθεί η συνάρτηση $f(x) = 0$ και οι πραγματικές ρίζες της
2. Να βρεθεί η Τάξη Σύγκλισης γι' αυτές τις ρίζες
3. **Αν η μέθοδος συγκλίνει *στο διάστημα*** $I = [\,1/2, 2\,]$, για $x_0 = \frac{2}{3}$, να βρεθούν οι προσεγγίσεις $x_1, x_2, ..., x_n$, που θα χρειαστούν, ώστε να βρεθεί η προσέγγιση x_n της ρίζας $\xi = 1$ με ακρίβεια ενός δ.ψ.

Απάντηση

1. $x = 2 \cdot x - \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot x^2 - 1}{x} \Rightarrow x^2 = 2 \cdot x^2 - 1 \Rightarrow f(x) = x^2 - 1 = 0$, Ρίζες $\xi_1 = 1, \xi_2 = -1$
2. $g(x) = 2 \cdot x - \frac{1}{x} \Rightarrow g'(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$, $\quad |g'(1)| = |g'(-1)| = \left|2 + \frac{1}{1}\right| = 3$
3. Η μέθοδος δεν συγκλίνει, αφού $|g'(1)| = |g'(-1)| = 3 \geq 1$

Άσκηση 11

- Αν η συνάρτηση η $x = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot x + \frac{1}{x}) \equiv g(x)$ αποτελεί αναδιάταξη της $f(x) = 0$

1. Να βρεθεί η συνάρτηση $f(x) = 0$ και οι πραγματικές ρίζες της
2. Να βρεθεί η Τάξη Σύγκλισης γι' αυτές τις ρίζες
3. Αν η μέθοδος ***συγκλίνει στο διάστημα*** $I = [\,1/2, 2\,]$, για $x_0 = \frac{2}{3}$, να βρεθούν οι οι προσεγγίσεις $x_1, x_2, ..., x_n$, που θα χρειαστούν, ώστε να βρεθεί η προσέγγιση x_n της ρίζας $\xi = 1$ με ακρίβεια ενός δ.ψ.

Απάντηση

1. $x = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot x + \frac{1}{x}) \Rightarrow x = \frac{2 \cdot x^2 + 1}{3 \cdot x} \Rightarrow 3 \cdot x^2 = 2x^2 + 1 \Rightarrow f(x) = x^2 - 1 = 0$, Ρίζες $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = -1$

2. $g(x) = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot x + \frac{1}{x}) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{3} \cdot (2 - \frac{1}{x^2})$,

$$|g'(1)| = |g'(-1)| = \left|\frac{1}{3} \cdot (2 - \frac{1}{1})\right| = \frac{1}{3} < 1$$

$$\left|g'(\frac{1}{2})\right| = \left|\frac{1}{3} \cdot (2 - \frac{1}{(\frac{1}{2})^2})\right| = \left|\frac{1}{3} \cdot (2 - \frac{1}{\frac{1}{4}})\right| = \left|\frac{1}{3} \cdot (2 - 4)\right| = \left|\frac{1}{3} \cdot (-2)\right| = \frac{2}{3},$$

$$\left|g'(2)\right| = \left|\frac{1}{3}\cdot(2-\frac{1}{(2)^2})\right| = \left|\frac{1}{3}\cdot(2-\frac{1}{4})\right| = \left|\frac{1}{3}\cdot(\frac{7}{4})\right| = \left|\frac{7}{12}\right| = \frac{7}{12}$$

οπότε $\lambda = \frac{2}{3} < 1$. Επίσης $\left|\frac{1}{2}-1\right| = \frac{1}{2}$, $\left|2-1\right| = 1 = \rho$, άρα η μέθοδος συγκλίνει.

- Αν $x_0 = \frac{2}{3}$, θα έχουμε :

$$x_1 = g(x_0) = \frac{1}{3}\cdot(2\cdot x_0 + \frac{1}{x_0}) = \frac{1}{3}\cdot(2\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{\frac{2}{3}}) = \frac{1}{3}\cdot(\frac{4}{3}+\frac{3}{2}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{17}{6} = \frac{17}{18} = 0.94444$$

$$\left|\varepsilon_1\right| = \left|x_1 - \xi\right| = \left|0.9444 - 1\right| = 0.055555 > 0.05 = \tfrac{1}{2}\cdot 10^{-1}$$

$$x_1 = \frac{17}{18},$$

$$x_2 = g(x_1) = \frac{1}{3}\cdot(2\cdot x_1 + \frac{1}{x_1}) = \frac{1}{3}\cdot(2\cdot\frac{17}{18} + \frac{1}{\frac{17}{18}}) = \frac{1}{3}\cdot(\frac{17}{9}+\frac{18}{17}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{451}{153} = \frac{451}{459} = 0.98257$$

$$\left|\varepsilon_2\right| = \left|x_2 - \xi\right| = \left|0.98257 - 1\right| = 0.01743 < 0.05 = \tfrac{1}{2}\cdot 10^{-1}$$

Άσκηση 12

- Αν η συνάρτηση η $x = \frac{1}{2}\cdot(x+\frac{1}{x}) \equiv g(x)$ αποτελεί αναδιάταξη της $f(x)=0$

1. Να βρεθεί η συνάρτηση $f(x)=0$ και οι πραγματικές ρίζες της
2. Να βρεθεί η Τάξη Σύγκλισης γι' αυτές τις ρίζες
3. Αν η μέθοδος ***συγκλίνει στο διάστημα*** $I = \left[\frac{3}{4},\frac{3}{2}\right]$, για $x_0 = \frac{2}{3}$ να βρεθούν οι οι προσεγγίσεις $x_1, x_2, ..., x_n$, που θα χρειαστούν, ώστε να βρεθεί η προσέγγιση x_n της ρίζας $\xi = 1$ με ακρίβεια ενός δ.ψ.

<u>Απάντηση</u>

1. $x = \frac{1}{2}\cdot(x+\frac{1}{x}) \Rightarrow x = \frac{x^2+1}{2\cdot x} \Rightarrow 2\cdot x^2 = x^2+1 \Rightarrow f(x) = x^2 - 1 = 0$, Ρίζες $\xi_1 = 1, \xi_2 = -1$

2. $g(x) = \frac{1}{2}\cdot(x+\frac{1}{x}) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2}\cdot(1-\frac{1}{x^2})$, $\left|g'(1)\right| = \left|g'(-1)\right| = \left|\frac{1}{2}\cdot(1-\frac{1}{1})\right| = 0$, άρα η σύγκλιση είναι τουλάχιστον τετραγωνική.

$g''(x) = \frac{1}{2}\cdot(\frac{2\cdot x}{x^4}) = \frac{1}{x^3}$, $\left|g''(1)\right| = \left|\frac{1}{1}\right| = 1 \neq 0$, $\left|g''(-1)\right| = \left|\frac{1}{-1}\right| = 1 \neq 0$, άρα η σύγκλιση είναι τετραγωνική.

3. $\frac{1}{2}\cdot\left|g''(\frac{3}{4})\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\frac{1}{(\frac{3}{4})^2}\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{9} = \frac{8}{9}$, $\frac{1}{2}\cdot\left|g''(\frac{3}{2})\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\frac{1}{(\frac{3}{2})^2}\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9} = \frac{2}{9}$

άρα $\frac{1}{2}\cdot\left|g^{''}(x)\right| \le \frac{8}{9} = M$ και $\left|b-a\right| = \left|\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$, οπότε $\lambda = M\cdot\left|b-a\right| = \frac{8}{9}\cdot\frac{3}{4} = \frac{2}{3} < 1$

Επίσης $\left|\frac{3}{4}-1\right| = \frac{1}{4}$, $\left|\frac{3}{2}-1\right| = \frac{1}{2} = \rho$, άρα η μέθοδος συγκλίνει.

$x_0 = \frac{2}{3}$,

$x_1 = g(x_0) = \frac{1}{2}\cdot(x_0 + \frac{1}{x_0}) = \frac{1}{2}\cdot(\frac{2}{3}+\frac{1}{\frac{2}{3}}) = \frac{1}{2}\cdot(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{13}{6} = \frac{13}{12} = 1.08333$

$\left|\varepsilon_1\right| = \left|x_1-\xi\right| = \left|1.08333-1\right| = 0.083333 > 0.05 = \frac{1}{2}\cdot 10^{-1}$

$x_1 = \frac{13}{12}$, $x_2 = g(x_1) = \frac{1}{2}\cdot(x_1+\frac{1}{x_1}) = \frac{1}{2}\cdot(\frac{13}{12}+\frac{1}{\frac{13}{12}}) = \frac{1}{2}\cdot(\frac{13}{12}+\frac{12}{13}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{313}{156} = \frac{313}{312} = 1.0032$

$\left|\varepsilon_2\right| = \left|x_2-\xi\right| = \left|1.0032-1\right| = 0.0032 < 0.05 = \frac{1}{2}\cdot 10^{-1}$

Άσκηση 13

- Αν η συνάρτηση η $x = x^3 \equiv g(x)$ αποτελεί αναδιάταξη της $f(x) = 0$

1. Να βρεθεί η συνάρτηση $f(x) = 0$ και οι πραγματικές ρίζες της
2. Να βρεθεί η Τάξη Σύγκλισης γι' αυτές τις ρίζες
3. Αν η μέθοδος συγκλίνει, για $x_0 = \frac{1}{2}$ να βρεθούν οι προσεγγίσεις $x_1, x_2, ..., x_n$, που θα χρειαστούν, ώστε να βρεθεί η προσέγγιση x_n της ρίζας $\xi = 0$ με ακρίβεια ενός δ.ψ.

<u>Απάντηση</u>

1. $x = x^3 \Rightarrow f(x) = x^3 - x = x(x^2-1) = 0$, Ρίζες $\xi_1 = 1, \xi_2 = -1, \xi_3 = 0$

2. $g(x) = x^3 \Rightarrow g^{'}(x) = 3\cdot x^2$,

   $\left|g^{'}(1)\right| = \left|g^{'}(-1)\right| = \left|3\cdot 1\right| = 3 > 1$, άρα η μέθοδος δεν συγκλίνει για τις ρίζες $\xi_1 = 1, \xi_2 = -1$.

   $\left|g^{'}(0)\right| = \left|3\cdot 0\right| = 0$, άρα η σύγκλιση για τη ρίζα $\xi_3 = 0$ είναι τουλάχιστον τετραγωνική.

   $g^{''}(x) = 6x$, $\left|g^{''}(0)\right| = \left|6\cdot 0\right| = 0$, άρα η σύγκλιση για τη ρίζα $\xi_3 = 0$ είναι τουλάχιστον κυβική.

   $g^{'''}(x) = 6$, $\left|g^{'''}(0)\right| = \left|6\right| \ne 0$, άρα η σύγκλιση για τη ρίζα $\xi_3 = 0$ είναι κυβική.

3. $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = g(x_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0.125$

   $\left|\varepsilon_1\right| = \left|x_1-\xi\right| = \left|0.125-0\right| = 0.125 > 0.05 = \frac{1}{2}\cdot 10^{-1}$

   $x_2 = g(x_1) = \left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{1}{19683} = 0.0019531$

   $\left|\varepsilon_2\right| = \left|x_2-\xi\right| = \left|0.0019531-0\right| = 0.0019531 < 0.05 = \frac{1}{2}\cdot 10^{-1}$

Άσκηση 14

- Αν για τη συνάρτηση $f(x)=x^2-1$ υπάρχει μια ρίζα $\xi=1$ στο διάστημα $\left(a_0,b_0\right)=\left(3/4,3/2\right)$

1. Να δειχθεί ότι πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 4.6 για τη σύγκλιση της Μεθόδου Newton-Raphson στο διάστημα $\left(a_0,b_0\right)=\left(3/4,3/2\right)$

2. Να βρεθούν οι προσεγγίσεις $x_1,x_2,...,x_n$, με τη Μέθοδο Newton-Raphson που θα χρειαστούν, ώστε με $x_0=\dfrac{2}{3}\in\left(a_0,b_0\right)=\left(3/4,3/2\right)$ να βρεθεί η προσέγγιση x_n της ρίζας $\xi=1$ με ακρίβεια ενός δ.ψ.

Απάντηση

1. $f(x)=x^2-1,\quad f'(x)=2\cdot x,\quad f''(x)=2$

$\left|f'\left(\dfrac{3}{4}\right)\right|=2\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{2}$, $\left|f'\left(\dfrac{3}{2}\right)\right|=2\cdot\dfrac{3}{2}=3$, οπότε $\left|f'(x)\right|\geq\dfrac{3}{2}=K$

$\left|f''\left(\dfrac{3}{4}\right)\right|=2$, $\left|f''\left(\dfrac{3}{2}\right)\right|=2$, οπότε $\left|f''(x)\right|\leq 2=\Lambda$ και $M=\dfrac{\Lambda}{2\cdot K}=\dfrac{2}{2\cdot\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}$

Επίσης $\left|b-a\right|=\left|\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{4}\right|=\dfrac{3}{4}$ οπότε $\lambda=M\cdot\left|b-a\right|=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}<1$

Επίσης $\left|\dfrac{3}{4}-1\right|=\dfrac{1}{4}$, $\left|\dfrac{3}{2}-1\right|=\dfrac{1}{2}=\rho$, άρα η μέθοδος συγκλίνει

2. $f(a_0)=a_0^{\,2}-1=(1/2)^2-1=1/4-1=-3/4<0$,

$f(b_0)=b_0^{\,2}-1=(3/2)^2-1=9/4-1=5/4>0$

$f(a_0)\cdot f(b_0)=-3/4\cdot 5/4<0$, επομένως υπάρχει ρίζα στο $\left(a_0,b_0\right)=\left(3/4,3/2\right)$

$x_0=\dfrac{2}{3}\in\left(a_0,b_0\right)=\left(3/4,3/2\right)$,

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=x_0-\frac{(x_0)^2-1}{2\cdot x_0}=\frac{2}{3}-\frac{\frac{4}{9}-1}{2\cdot\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}-\frac{-\frac{5}{9}}{\frac{4}{3}}=\frac{2}{3}+\frac{5}{12}=\frac{13}{12}=1.08333$$

$$\left|\varepsilon_1\right|=\left|x_1-\xi\right|=\left|1.08333-1\right|=0.08333>0.05=\tfrac{1}{2}\cdot 10^{-1}$$

$x_1=\dfrac{13}{12}\in\left(a_0,b_0\right)=\left(3/4,3/2\right)$,

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=x_1-\frac{(x_1)^2-1}{2x_1}=\frac{13}{12}-\frac{\frac{169}{144}-1}{2\frac{13}{12}}=\frac{13}{12}-\frac{\frac{25}{144}}{\frac{13}{6}}=\frac{13}{12}-\frac{25}{312}=\frac{313}{312}=1.0032$$

$$\left|\varepsilon_2\right|=\left|x_2-\xi\right|=\left|1.0032-1\right|=0.0032<0.05=\tfrac{1}{2}\cdot 10^{-1}$$

Άσκηση 15

- Αν για τη συνάρτηση $f(x)=(x-1)^2$ υπάρχει μια Πολλαπλή ρίζα $\xi=1$ στο διάστημα $(a_0,b_0)=(1/2,3/2)$

1. Να βρεθεί η Τάξη Σύγκλισης γι' αυτή τη ρίζα
2. Με $x_0=\dfrac{2}{3}\in(a_0,b_0)=(1/2,3/2)$ να βρεθούν οι προσεγγίσεις $x_1,x_2,\ldots,x_n$, με τη Μέθοδο Newton-Raphson που θα χρειαστούν, ώστε να βρεθεί η προσέγγιση x_n της ρίζας $\xi=1$ με ακρίβεια ενός δ.ψ.

<u>Απάντηση</u>

1. $x=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}\equiv g(x)=x-\dfrac{(x-1)^2}{2\cdot(x-1)}=x-\dfrac{(x-1)}{2}=\dfrac{2\cdot x-x+1}{2}=\dfrac{x+1}{2}\Rightarrow g'(x)=\dfrac{1}{2}<1$,

   άρα η σύγκλιση για τη ρίζα $\xi=1$ είναι γραμμική.

2. $f(a_0)=a_0^2-1=(1/2)^2-1=1/4-1=-3/4<0$,

   $f(b_0)=b_0^2-1=(3/2)^2-1=9/4-1=5/4>0$

   $f(a_0)\cdot f(b_0)=-3/4\cdot 5/4<0$, επομένως υπάρχει ρίζα στο $(a_0,b_0)=(1/2,3/2)$

$$x_0=\frac{2}{3}\in(a_0,b_0)=(1/2,3/2),$$

$$x_1=g(x_0)=\frac{x_0+1}{2}=\frac{\frac{2}{3}+1}{2}=\frac{5}{6}=0.83333$$

$$|\varepsilon_1|=|x_1-\xi|=|0.8333-1|=0.167>0.05=\tfrac{1}{2}\cdot 10^{-1}$$

$$x_1=\frac{5}{6}\in(a_0,b_0)=(1/2,3/2),$$

$$x_2=\frac{x_1+1}{2}=\frac{\frac{5}{6}+1}{2}=\frac{11}{12}=0.91666$$

$$|\varepsilon_2|=|x_2-\xi|=|0.91666-1|=0.08333>0.05=\tfrac{1}{2}\cdot 10^{-1}$$

$$x_2=\frac{11}{12}\in(a_0,b_0)=(1/2,3/2),$$

$$x_3=\frac{x_2+1}{2}=\frac{\frac{11}{12}+1}{2}=\frac{23}{24}=0.958333$$

$$|\varepsilon_3|=|x_3-\xi|=|0.958333-1|=0.041666<0.05=\tfrac{1}{2}\cdot 10^{-1}$$

Άσκηση 16

- Αν για τη συνάρτηση $f(x)=x^2-1$ υπάρχει μια ρίζα $\xi=1$ στο διάστημα $(a_0,b_0)=(1/2,3/2)$ να βρεθούν οι προσεγγίσεις $x_0,x_1,\ldots,x_n$, με τη Μέθοδο της Χορδής που θα χρειαστούν, ώστε να βρεθεί η προσέγγιση x_n της ρίζας $\xi=1$ με ακρίβεια ενός δ.ψ.

<u>Απάντηση</u>

$f(a_0)=a_0^2-1=(1/2)^2-1=1/4-1=-3/4<0$,
$f(b_0)=b_0^2-1=(3/2)^2-1=9/4-1=5/4>0$
$f(a_0)\cdot f(b_0)=-3/4\cdot 5/4<0$, επομένως υπάρχει ρίζα στο $(a_0,b_0)=(1/2,3/2)$

$(x_0,x_1)=(a_0,b_0)=(1/2,3/2)$,

$$x_2=x_1-\frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)}\cdot f(x_1)=\frac{3}{2}-\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}}\cdot\frac{5}{4}=\frac{3}{2}-\frac{\frac{5}{4}}{\frac{8}{4}}=\frac{3}{2}-\frac{5}{8}=\frac{7}{8}=0.875$$

$|\varepsilon_2|=|x_2-\xi|=|0.875-1|=0.125>0.05=\frac{1}{2}\cdot 10^{-1}$,
$f(x_2)=x_2^2-1=(7/8)^2-1=49/64-1=-15/64$

$$x_3=x_2-\frac{x_2-x_1}{f(x_2)-f(x_1)}\cdot f(x_2)=\frac{7}{8}-\frac{\frac{7}{8}-\frac{3}{2}}{-\frac{15}{64}-\frac{5}{4}}\cdot\frac{-15}{64}=\frac{7}{8}-\frac{-\frac{5}{8}}{-\frac{95}{64}}\frac{-15}{64}=\frac{7}{8}+\frac{15}{152}=\frac{37}{38}=0.97368,$$

$|\varepsilon_3|=|x_3-\xi|=|0.97368-1|=0.0263<0.05=\frac{1}{2}\cdot 10^{-1}$

Κεφάλαιο 5 - Επίλυση Συστημάτων Εξισώσεων

Άσκηση 1

- Να επιλυθεί το Διαγώνιο Σύστημα $A \cdot x = b$ ή $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$, Λύση $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Απάντηση

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{8}{8} = 1, \quad x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} = \frac{7}{7} = 1, \quad x_3 = \frac{b_3}{a_{33}} = \frac{6}{6} = 1, \quad x_4 = \frac{b_4}{a_{44}} = \frac{5}{5} = 1$$

Άσκηση 2

- Να λυθεί το Κάτω Τριγωνικό Σύστημα $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & -7 & 0 & 0 \\ -8 & 8 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$, Λύση $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Απάντηση

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{8}{8} = 1$$

$$x_2 = \frac{(b_2 - a_{21} \cdot x_1)}{a_{22}} = \frac{(7 - 14 \cdot 1)}{-7} = \frac{-7}{-7} = 1$$

$$x_3 = \frac{(b_3 - a_{31} \cdot x_1 - a_{32} \cdot x_2)}{a_{33}} = \frac{(6 - (-8) \cdot 1 - 8 \cdot 1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$x_4 = \frac{(b_4 - a_{41} \cdot x_1 - a_{42} \cdot x_2 - a_{43} \cdot x_3)}{a_{44}} = \frac{(5 - 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - (-3) \cdot 1)}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Άσκηση 3

- Να επιλυθεί το Άνω Τριγωνικό Σύστημα $\begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 7 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$, Λύση $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Απάντηση

$$x_4 = \frac{b_4}{a_{44}} = \frac{5}{5} = 1$$

$$x_3 = \frac{(b_3 - a_{34} \cdot x_4)}{a_{33}} = \frac{(6 - 12 \cdot 1)}{-6} = \frac{-6}{-6} = 1$$

$$x_2 = \frac{(b_2 - a_{23} \cdot x_3 - a_{24} \cdot x_4)}{a_{22}} = \frac{(7 - 8 \cdot 1 - (-8) \cdot 1)}{7} = \frac{7}{7} = 1$$

$$x_1 = \frac{(b_1 - a_{12} \cdot x_2 - a_{13} \cdot x_3 - a_{14} \cdot x_4)}{a_{11}} = \frac{(8 - 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - (-5) \cdot 1)}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

Άσκηση 4

- Να επιλυθεί το Σύστημα $A\,x = b$ ή $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$, (Λύση $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$) με Απαλοιφή Gauss χωρίς Οδήγηση

Απάντηση

Πολλαπλασιαστές Πίνακας A b Πίνακας A b

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 2/1 & 2 & 4 & 5 & 2 & 13 \\ 3/1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 7 \\ 4/1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 8 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & -8 & -1 & -14 \\ 0 & -7 & -10 & -3 & -20 \end{array}$$

$a_{22} = 0$, οπότε γίνεται ανταλλαγή $2^{ης}$ και $3^{ης}$ γραμμής

Πολλαπλασιαστές Πίνακας A b

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ & 0 & -5 & -8 & -1 & -14 \\ & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 7/5 & 0 & -7 & -10 & -3 & -20 \end{array} \Rightarrow$$

Πολλαπλασιαστές Πίνακας A b Πίνακας A b

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ & 0 & -5 & -8 & -1 & -14 \\ & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -6/5 & 0 & 0 & 6/5 & -8/5 & -2/5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -5 & -8 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -8/5 & -8/5 \end{array},$$

οπότε επιλύεται το Άνω Τριγωνικό Σύστημα

$$x_4 = \frac{b_4}{a_{44}} = \frac{-8/5}{-8/5} = 1$$

$$x_3 = \frac{(b_3 - a_{34}\cdot x_4)}{a_{33}} = \frac{(-1-0\cdot 1)}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$x_2 = \frac{(b_2 - a_{23}\cdot x_3 - a_{24}\cdot x_4)}{a_{22}} = \frac{(-14-(-8)\cdot 1-(-1)\cdot 1)}{-5} = \frac{-5}{-5} = 1$$

$$x_1 = \frac{(b_1 - a_{12}\cdot x_2 - a_{13}\cdot x_3 - a_{14}\cdot x_4)}{a_{11}} = \frac{(7-2\cdot 1-3\cdot 1-1\cdot 1)}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Άσκηση 5

- Να επιλυθεί το Σύστημα $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$, (Λύση $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$) με Απαλοιφή Gauss με μερική Οδήγηση.

Απάντηση

Στοιχείο με τη Μέγιστη Απόλυτη τιμή στην πρώτη στήλη είναι το $a_{41} = 4$ που βρίσκεται στην 4η γραμμή, οπότε γίνεται ανταλλαγή 1ης και 4ης γραμμής :

$$\begin{array}{c|cccc|c} \text{Πολλαπλασιαστές} & & \text{Πίνακας A} & & & b \\ & 4 & 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2/4 & 2 & 4 & 5 & 2 & 13 \\ 3/4 & 3 & 1 & 1 & 2 & 7 \\ 1/4 & 1 & 2 & 3 & 1 & 7 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|cccc|c} \text{Πολλαπλασιαστές} & & \text{Πίνακας A} & & & b \\ & 4 & 1 & 2 & 1 & 8 \\ & 0 & 7/2 & 4 & 3/2 & 9 \\ 1/14 & 0 & 1/4 & -1/2 & 5/4 & 1 \\ 1/2 & 0 & 7/4 & 5/2 & 3/4 & 5 \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c|cccc|c} \text{Πολλαπλασιαστές} & & \text{Πίνακας A} & & & b \\ & 4 & 1 & 2 & 1 & 8 \\ & 0 & 7/2 & 4 & 3/2 & 9 \\ & 0 & 0 & -11/14 & 8/7 & 5/14 \\ -7/11 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|cccc|c} & \text{Πίνακας A} & & & b \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 7/2 & 4 & 3/2 & 9 \\ 0 & 0 & -11/14 & 8/7 & 5/14 \\ 0 & 0 & 0 & 8/11 & 8/11 \end{array}$$

οπότε επιλύεται το Άνω Τριγωνικό Σύστημα :

$$x_4 = \frac{b_4}{a_{44}} = \frac{8/11}{8/11} = 1$$

$$x_3 = \frac{(b_3 - a_{34}\cdot x_4)}{a_{33}} = \frac{(5/14 - 8/7\cdot 1)}{-11/14} = \frac{-11/14}{-11/14} = 1$$

$$x_2 = \frac{(b_2 - a_{23}\cdot x_3 - a_{24}\cdot x_4)}{a_{22}} = \frac{(9 - 4\cdot 1 - \tfrac{3}{2}\cdot 1)}{\tfrac{7}{2}} = \frac{\tfrac{7}{2}}{\tfrac{7}{2}} = 1$$

$$x_1 = \frac{(b_1 - a_{12}\cdot x_2 - a_{13}\cdot x_3 - a_{14}\cdot x_4)}{a_{11}} = \frac{(8 - 1\cdot 1 - 2\cdot 1 - 1\cdot 1)}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Άσκηση 6

- Να επιλυθεί το Σύστημα $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$, (Λύση $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$)

με Απαλοιφή Gauss με μερική Οδήγηση και Εξισορρόπηση

<u>Απάντηση</u>

$$\begin{array}{llll} \text{Πίνακας } A & b & \sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right| & \left|a_{j1}\right| \Big/ \sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|,\ i = 1..4 \\ \left|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right. & \left|\begin{array}{c} 5 \\ 13 \\ 7 \\ 6 \end{array}\right. & \begin{array}{c} 7 \\ 13 \\ 7 \\ 8 \end{array} & \begin{array}{c} \tfrac{1}{7} \\ \tfrac{2}{13} \\ \tfrac{3}{7} \\ \tfrac{1}{2} \end{array} \end{array}$$

Στοιχείο με τη Μέγιστη Απόλυτη τιμή στην πρώτη στήλη είναι το $\left|a'_{41}\right| = \tfrac{1}{2}$ που βρίσκεται στην 4^η^ γραμμή, οπότε γίνεται ανταλλαγή 1^ης^ και 4^ης^ γραμμής :

$$\begin{array}{ll} \text{Πολλαπλασιαστές} \quad \text{Πίνακας } A \quad b & \text{Πίνακας } A \qquad b \qquad \sum_{j=2}^{n}\left|a_{ij}\right| \qquad \left|a_{j2}\right| \Big/ \sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|,\ i = 2..4 \\ \begin{array}{c} \\ \tfrac{2}{4} \\ \tfrac{3}{4} \\ \tfrac{1}{4} \end{array}\left|\begin{array}{cccc} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} 6 \\ 13 \\ 7 \\ 5 \end{array}\right. \Rightarrow & \left|\begin{array}{cccc} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & \tfrac{9}{2} & 4 & \tfrac{3}{2} \\ 0 & \tfrac{7}{4} & -\tfrac{1}{2} & \tfrac{5}{4} \\ 0 & \tfrac{9}{4} & \tfrac{5}{2} & -\tfrac{5}{4} \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} 8 \\ 10 \\ \tfrac{5}{2} \\ \tfrac{7}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 10 \\ \tfrac{7}{2} \\ 6 \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \tfrac{9}{20} \\ \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{3}{8} \end{array} \end{array}$$

Στοιχείο με τη Μέγιστη Απόλυτη τιμή στη δεύτερη στήλη είναι το $\left|a'_{32}\right| = \tfrac{1}{2}$ που βρίσκεται στην 3η γραμμή, οπότε γίνεται ανταλλαγή 2^ης^ και 3^ης^ γραμμής:

$$\begin{array}{c} \textit{Πολλαπλασιαστές} \\ \\ \\ 18/7 \\ 9/7 \end{array} \quad \begin{array}{c} \textit{Πίνακας A} \quad b \\ \left|\begin{array}{cccc} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7/4 & -1/2 & 5/4 \\ 0 & 9/2 & 4 & 3/2 \\ 0 & 9/4 & 5/2 & -5/4 \end{array}\right| \begin{array}{c} 6 \\ 5/2 \\ 10 \\ 7/2 \end{array} \Rightarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \textit{Πίνακας A} & b & \sum_{j=3}^{n}\left|a_{ij}\right| & \left|a_{j3}\right| \Big/ \sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right| & ,\ i=3..4 \\ \left|\begin{array}{cccc} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7/4 & -1/2 & 5/4 \\ 0 & 0 & 37/7 & -12/7 \\ 0 & 0 & 22/7 & -20/7 \end{array}\right| & \left|\begin{array}{c} 6 \\ 5/2 \\ 25/7 \\ 2/7 \end{array}\right. & \begin{array}{c} \\ \\ 49/7 \\ 42/7 \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ 37/49 \\ 22/42 \end{array} & \end{array}$$

Στοιχείο με τη Μέγιστη Απόλυτη τιμή στην τρίτη στήλη είναι το $\left|a'_{33}\right| = 37/49$ που βρίσκεται στην 3η γραμμή, οπότε δεν γίνεται ανταλλαγή γραμμών :

$$\begin{array}{c} \textit{Πολλαπλασιαστές} \\ \\ \\ \\ 22/37 \end{array} \quad \begin{array}{c} \textit{Πίνακας A} \quad b \\ \left|\begin{array}{cccc} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7/4 & -1/2 & 5/4 \\ 0 & 0 & 37/7 & -12/7 \\ 0 & 0 & 22/7 & -20/7 \end{array}\right| \begin{array}{c} 6 \\ 5/2 \\ 25/7 \\ 2/7 \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \textit{Πίνακας A} \quad b \\ \left|\begin{array}{cccc} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7/4 & -1/2 & 5/4 \\ 0 & 0 & 37/7 & -12/7 \\ 0 & 0 & 0 & -68/37 \end{array}\right| \begin{array}{c} 6 \\ 5/2 \\ 25/7 \\ -68/37 \end{array} \end{array}$$

οπότε επιλύεται το Άνω Τριγωνικό Σύστημα :

$$x_4 = \frac{b_4}{a_{44}} = \frac{-68/37}{-68/37} = 1$$

$$x_3 = \frac{(b_3 - a_{34}\cdot x_4)}{a_{33}} = \frac{(25/7 - (-12/7)\cdot 1)}{37/7} = \frac{37/7}{37/7} = 1$$

$$x_2 = \frac{(b_2 - a_{23}\cdot x_3 - a_{24}\cdot x_4)}{a_{22}} = \frac{(5/2 - (-1/2)\cdot 1 - 5/4\cdot 1)}{7/4} = \frac{7/4}{7/4} = 1$$

$$x_1 = \frac{(b_1 - a_{12}\cdot x_2 - a_{13}\cdot x_3 - a_{14}\cdot x_4)}{a_{11}} = \frac{(6 - (-1)\cdot 1 - 2\cdot 1 - 1\cdot 1)}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Άσκηση 7

- Να επιλυθεί το Σύστημα $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$, (Λύση $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$)

με Απαλοιφή Gauss – Jordan.

Απάντηση

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
\text{Πολλαπλασιαστές} & & \text{Πίνακας A} & & & b \\
 & 1 & 2 & 3 & 1 & 7 \\
2/1 & 2 & 4 & 5 & 2 & 13 \\
3/1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 7 \\
4/1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 8
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{cccc|c}
 & \text{Πίνακας A} & & & b \\
1 & 2 & 3 & 1 & 7 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
0 & -5 & -8 & -1 & -14 \\
0 & -7 & -10 & -3 & -20
\end{array}
$$

$a_{22} = 0$, οπότε γίνεται ανταλλαγή $2^{ης}$ και $3^{ης}$ γραμμής

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
\text{Πολλαπλασιαστές} & & \text{Πίνακας A} & & & b \\
-2/5 & 1 & 2 & 3 & 1 & 7 \\
 & 0 & -5 & -8 & -1 & -14 \\
 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
7/5 & 0 & -7 & -10 & -3 & -20
\end{array}
\Rightarrow
$$

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
\text{Πολλαπλασιαστές} & & \text{Πίνακας A} & & & b \\
1/5 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & 7/5 \\
8 & 0 & -5 & -8 & -1 & -14 \\
 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
-6/5 & 0 & 0 & 6/5 & -8/5 & -2/5
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
\text{Πολλαπλασιαστές} & & \text{Πίνακας A} & & & b \\
-3/8 & 1 & 0 & 0 & 3/5 & 8/5 \\
5/8 & 0 & -5 & 0 & -1 & -6 \\
 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
 & 0 & 0 & 0 & -8/5 & -8/5
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{cccc|c}
 & \text{Πίνακας A} & & & b \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & -5 & 0 & 0 & -5 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -8/5 & -8/5
\end{array},
$$

οπότε επιλύεται το Διαγώνιο Σύστημα :

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{1}{1} = 1,\ x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} = \frac{-5}{-5} = 1,\ x_3 = \frac{b_3}{a_{33}} = \frac{-1}{-1} = 1,\ x_4 = \frac{b_4}{a_{44}} = \frac{-8/5}{-8/5} = 1.$$

Άσκηση 8

- Να ελεγχθεί αν ο Πίνακας $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 6 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ έχει Διαγώνια Υπεροχή Κατά Γραμμές ή Στήλες.

<u>Απάντηση</u>

1. Έλεγχος Υπεροχής Κατά Γραμμές

$$|a_{11}| = 5 > |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}| = |-2| + |1| + |1| = 2 + 1 + 1 = 4$$
$$|a_{22}| = 6 > |a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}| = |-1| + |-1| + |2| = 1 + 1 + 2 = 4$$
$$|a_{33}| = 5 > |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{34}| = |1| + |-2| + |1| = 1 + 2 + 1 = 4$$
$$|a_{44}| = 4 = |a_{41}| + |a_{42}| + |a_{43}| = |1| + |-1| + |2| = 1 + 1 + 2 = 4$$

επομένως δεν υπάρχει Υπεροχή Κατά Γραμμές.

2. Έλεγχος Υπεροχής Κατά Στήλες

$$|a_{11}| = 5 > |a_{21}| + |a_{31}| + |a_{41}| = |-1| + |1| + |1| = 1 + 1 + 1 = 3$$
$$|a_{22}| = 6 > |a_{12}| + |a_{32}| + |a_{42}| = |-2| + |-2| + |-1| = 2 + 2 + 1 = 5$$
$$|a_{33}| = 5 > |a_{13}| + |a_{23}| + |a_{43}| = |1| + |-1| + |2| = 1 + 1 + 2 = 4$$
$$|a_{44}| = 4 = |a_{14}| + |a_{24}| + |a_{34}| = |1| + |2| + |1| = 1 + 2 + 1 = 4$$

επομένως δεν υπάρχει Υπεροχή Κατά Στήλες.

Άσκηση 9

- Να ελεγχθεί αν ο Πίνακας $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 6 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ έχει Διαγώνια Υπεροχή Κατά Γραμμές ή Στήλες.

Απάντηση

1. Έλεγχος Υπεροχής Κατά Γραμμές :

$|a_{11}| = 5 = |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}| = |-2| + |1| + |2| = 2 + 1 + 2 = 5$,

άρα δεν υπάρχει Υπεροχή Κατά Γραμμές.

2. Έλεγχος Υπεροχής Κατά Στήλες :

$$
\begin{aligned}
|a_{11}| &= 5 > |a_{21}| + |a_{31}| + |a_{41}| = |-1| + |1| + |1| = 1 + 1 + 1 = 3 \\
|a_{22}| &= 6 > |a_{12}| + |a_{32}| + |a_{42}| = |-2| + |-2| + |-1| = 2 + 2 + 1 = 5 \\
|a_{33}| &= 5 > |a_{13}| + |a_{23}| + |a_{43}| = |1| + |-1| + |2| = 1 + 1 + 2 = 4 \\
|a_{44}| &= 5 > |a_{14}| + |a_{24}| + |a_{34}| = |2| + |1| + |1| = 2 + 1 + 1 = 4
\end{aligned}
$$

επομένως υπάρχει Υπεροχή Κατά Στήλες.

Άσκηση 10

- Να επιλυθεί το Σύστημα $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ (Λύση $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$)

με τη Μέθοδο Gauss – Seidel. Με Αρχικές Τιμές $x^{(0)} = \left[x_1^{(0)} \quad x_2^{(0)} \quad x_3^{(0)} \right] = \left[3/4 \quad 3/4 \quad 3/4 \right]$ να βρεθούν μέχρι και οι τιμές των $x^{(2)} = \left[x_1^{(2)} \quad x_2^{(2)} \quad x_3^{(2)} \right]$.

Απάντηση

Αρχικές Τιμές $x^{(0)} = \left[x_1^{(0)} \quad x_2^{(0)} \quad x_3^{(0)} \right] = \left[3/4 \quad 3/4 \quad 3/4 \right]$

1ος Κύκλος

$$
x_1^{(1)} = \frac{(b_1 - a_{12} \cdot x_2^{(0)} - a_{13} \cdot x_3^{(0)})}{a_{11}} = \frac{(3 - 1 \cdot 3/4 - 0 \cdot 3/4)}{2} = \frac{9/4}{2} = \frac{9}{8} = 1.125
$$

$$
x_2^{(1)} = \frac{(b_2 - a_{21} \cdot x_1^{(1)} - a_{23} \cdot x_3^{(0)})}{a_{22}} = \frac{(3 - (-1 \cdot 9/8) - 1 \cdot 3/4)}{3} = \frac{27/8}{3} = \frac{9}{8} = 1.125
$$

$$
x_3^{(1)} = \frac{(b_3 - a_{31} \cdot x_1^{(1)} - a_{32} \cdot x_2^{(1)})}{a_{33}} = \frac{(3 - 1 \cdot 9/8 - (-2 \cdot 9/8))}{4} = \frac{33/8}{4} = \frac{33}{32} = 1.03125
$$

2ος Κύκλος

$$x_1^{(2)} = \frac{(b_1 - a_{12}\cdot x_2^{(1)} - a_{13}\cdot x_3^{(1)})}{a_{11}} = \frac{(3 - 1\cdot 9/8 - 0\cdot 9/8)}{2} = \frac{15/8}{2} = \frac{15}{16} = 0.9375$$

$$x_2^{(2)} = \frac{(b_2 - a_{21}\cdot x_1^{(2)} - a_{23}\cdot x_3^{(1)})}{a_{22}} = \frac{(3 - (-1\cdot 15/16) - 1\cdot 33/32)}{3} = \frac{93/32}{3} = \frac{31}{32} = 0.96875$$

$$x_3^{(2)} = \frac{(b_3 - a_{31}\cdot x_1^{(2)} - a_{32}\cdot x_2^{(2)})}{a_{33}} = \frac{(3 - 1\cdot 15/16 - (-2\cdot 31/32))}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Άσκηση 11

- Να επιλυθεί το Σύστημα $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ (Λύση $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$)

με τη Μέθοδο Jacobi. Με Αρχικές Τιμές $x^{(0)} = [x_1^{(0)} \quad x_2^{(0)} \quad x_3^{(0)}] = [3/4 \quad 3/4 \quad 3/4]$ να βρεθούν μέχρι και οι τιμές των $x^{(2)} = [x_1^{(2)} \quad x_2^{(2)} \quad x_3^{(2)}]$.

Απάντηση

Αρχικές Τιμές $x^{(0)} = [x_1^{(0)} \quad x_2^{(0)} \quad x_3^{(0)}] = [3/4 \quad 3/4 \quad 3/4]$

1ος Κύκλος

$$x_1^{(1)} = \frac{(b_1 - a_{12}\cdot x_2^{(0)} - a_{13}\cdot x_3^{(0)})}{a_{11}} = \frac{(3 - 1\cdot 3/4 - 0\cdot 3/4)}{2} = \frac{9/4}{2} = \frac{9}{8} = 1.125$$

$$x_2^{(1)} = \frac{(b_2 - a_{21}\cdot x_1^{(0)} - a_{23}\cdot x_3^{(0)})}{a_{22}} = \frac{(3 - (-1\cdot 3/4) - 1\cdot 3/4)}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$x_3^{(1)} = \frac{(b_3 - a_{31}\cdot x_1^{(0)} - a_{32}\cdot x_2^{(0)})}{a_{33}} = \frac{(3 - 1\cdot 3/4 - (-2\cdot 3/4))}{4} = \frac{15/4}{4} = \frac{15}{16} = 0.9375$$

2ος Κύκλος

$$x_1^{(2)} = \frac{(b_1 - a_{12}\cdot x_2^{(1)} - a_{13}\cdot x_3^{(1)})}{a_{11}} = \frac{(3 - 1\cdot 1 - 0\cdot 15/16)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2^{(2)} = \frac{(b_2 - a_{21}\cdot x_1^{(1)} - a_{23}\cdot x_3^{(1)})}{a_{22}} = \frac{(3 - (-1\cdot 9/8) - 1\cdot 15/16)}{3} = \frac{51/16}{3} = \frac{17}{16} = 1.0625$$

$$x_3^{(2)} = \frac{(b_3 - a_{31}\cdot x_1^{(1)} - a_{32}\cdot x_3^{(1)})}{a_{33}} = \frac{(3 - (-1\cdot 9/8) - (-2)\cdot 1)}{4} = \frac{31/8}{4} = \frac{31}{32} = 0.96875$$

Κεφάλαιο 6 – Ανιούσες Διαφορές

Άσκηση 1

- Να κατασκευαστεί ο πίνακας των προς τα εμπρός διαφορών για τις παρακάτω τιμές :

x	-4	-1	0	1	4
$f(x)$	-3	2	3	0	4

Απάντηση

- Ο πίνακας των προς τα εμπρός διαφορών θα έχει τη μορφή :

x	$f(x)$	$1^{ες}$ διαφορές	$2^{ες}$ διαφορές	$3^{ες}$ διαφορές	$4^{ες}$ διαφορές
-4	-3				
		5			
-1	2		-4		
		1		0	
0	3		-4		11
		-3		11	
1	0		7		
		4			
4	4				

Άσκηση 2

- Να κατασκευαστεί ο πίνακας των προς τα εμπρός διαφορών για τις τιμές της συναρτήσεως $P(x) = x^2 - 1$ στα σημεία $x = 1(0.2)2.$ και να δειχθεί ότι οι διαφορές δεύτερης τάξης θα είναι ίσες με $p_0 \cdot n! \cdot h^2$, ενώ οι διαφορές τρίτης και ανώτερης τάξης θα είναι ίσες με μηδέν.

Απάντηση

x	$P(x) = x^2 - 1$	Διαφορές $1^{ης}$ Τάξης	Διαφορές $2^{ης}$ Τάξης	Διαφορές $3^{ης}$ Τάξης
1.0	0.00			
		0.44		
1.2	0.44		0.08	
		0.52		0
1.4	0.96		0.08	
		0.60		0
1.6	1.56		0.08	
		0.68		0
1.8	2.24		0.08	
		0.76		
2.0	3.00			

- Αφού η συνάρτηση είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ($n = 2$) οι διαφορές δεύτερης τάξης θα είναι σταθερές και ίσες με $p_0 \cdot n! \cdot h^2 = 1 \cdot 2! \cdot (0.2)^2 = 2 \cdot 0.04 = 0.08$, ενώ οι διαφορές τρίτης και ανώτερης τάξης θα είναι ίσες με μηδέν.

Άσκηση 3

- Να κατασκευαστεί πίνακας διαφορών για την εύρεση του σφάλματος που υπάρχει σε μια από τις τιμές της συνάρτησης *f(x)*, που δίνεται από τον παρακάτω πίνακα τιμών, όταν είναι γνωστό ότι αυτή είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού και να διορθωθεί η αντίστοιχη τιμή της.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	-9	-32	-63	-96	-124	-144	-147	-128	-81

<u>Απάντηση</u>

- Ο πίνακας των προς τα εμπρός διαφορών θα έχει τη μορφή :

x	$f(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
1	-9				
		-23			
2	-32		-8		
		-31		6	
3	-63		-2		1
		-33		7	
4	-96		5		-4
		-28		3	
5	-124		8		6
		-20		9	
6	-144		17		-4
		-3		5	
7	-147		22		1
		19		6	
8	-128		28		
		47			
9	-81				

Στον παραπάνω πίνακα θα έπρεπε οι τέταρτες διαφορές $\Delta^4 f(x)$ να ήταν ίσες με μηδέν, αφού η *f(x)* είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού και είναι πινακοποιημένη σε σημεία που ισαπέχουν. Επομένως οι τέταρτες διαφορές που δεν είναι ίσες με μηδέν θα πρέπει να είναι ίσες με τα γινόμενα του σφάλματος ε επί τους αντίστοιχους διωνυμικούς συντελεστές *(1, -4, 6, -4, 1)*. Η τιμή *1* που εμφανίζεται στο κάτω μέρος του Πίνακα Διαφορών $4^{ης}$ τάξης είναι η τιμή της διαφοράς $\Delta^4 f(5)+\varepsilon=0+\varepsilon=1$, επειδή στην τιμή *f(5)* υπάρχει σφάλμα ίσον με $\varepsilon = 1$. Άρα η αντίστοιχη διορθωμένη τιμή της συνάρτησης θα είναι $f(5) = -124 - \varepsilon = -124 - 1 = -125$.

Άσκηση 4

- Να κατασκευαστεί ο πίνακας των προς τα εμπρός διαφορών για τις τιμές της συνάρτησης $P(x) = x^2 - 1$ στα σημεία $x = 1(0.2)2$ στρογγυλευμένες σε ένα δ.ψ. Να βρεθεί ένα φράγμα για το απόλυτο σφάλμα στις τρίτες διαφορές της συνάρτησης που προέρχεται από τα σφάλματα στρογγυλοποίησης στις τιμές της :

Απάντηση

- Ο πίνακας των προς τα εμπρός διαφορών θα έχει τη μορφή :

x	$P(x) \approx x^2 - 1$	*Διαφορές* $1^{ης}$ *Τάξης*	*Διαφορές* $2^{ης}$ *Τάξης*	*Διαφορές* $3^{ης}$ *Τάξης*
1.0	*0.0*			
		0.4		
1.2	*0.4*		*0.2*	
		0.6		*-0.2*
1.4	*1.0*		*0.0*	
		0.6		*0.0*
1.6	*1.6*		*0.0*	
		0.6		*0.2*
1.8	*2.2*		*0.2*	
		0.8		
2.0	*3.0*			

Τα σφάλματα στρογγυλοποίησης που υπάρχουν στις πινακοποιημένες τιμές της συνάρτησης θα ικανοποιούν τη σχέση $|\varepsilon_n^{(0)}| \le \frac{1}{2} \cdot 10^{-k} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-1}$. Επομένως για τα σφάλματα στις τρίτες διαφορές ($m = 3$) της συνάρτησης θα ισχύει :

$$|\varepsilon_n^{(3)}| \le 2^{m-1} \cdot 10^{-k} = 2^{3-1} \cdot 10^{-1} = 0.25$$

Επομένως ένα απόλυτο φράγμα για τα σφάλματα αυτά είναι ο αριθμός 0.25.

Η συνάρτηση $f(x) = P(x) = x^2$ είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού επομένως θα έπρεπε οι δεύτερες διαφορές $\Delta^2 f_n$ να ήταν σταθερές και οι τρίτες $\Delta^3 f_n$ ίσες με μηδέν. Επειδή όμως υπάρχουν τα σφάλματα στρογγυλοποίησης στις τιμές της συνάρτησης οι τρίτες διαφορές θα είναι ίσες με:

$$\Delta^3 f_n^* = \Delta^3 f_n + \varepsilon_n^{(3)} = 0 + \varepsilon_n^{(3)} = \varepsilon_n^{(3)}.$$

δηλαδή οι τρίτες διαφορές αποτελούν σφάλματα και μόνο που προέρχονται από τα σφάλματα στρογγυλοποίησης στις τιμές της συνάρτησης. Επομένως θα πρέπει αυτά να φράζονται απόλυτα από τον αριθμό 0.25. Πραγματικά ισχύει:

$$|-0.2|, |0.2| \le 0.25$$

Άσκηση 5

- Να αποδειχθεί ότι οι τελεστές $\varDelta$ και ∇ αντιμετατίθενται στη πράξη του πολλαπλασιασμού.

Απάντηση

$$\varDelta \cdot \nabla f(x) = \varDelta(f(x) - f(x-h)) = \varDelta f(x) - \varDelta f(x-h)) = f(x+h) - f(x) - f(x) + f(x-h)$$

και

$$\nabla \cdot \varDelta f(x) = \nabla(f(x+h) - f(x)) = \nabla f(x+h) - \nabla f(x) = f(x+h) - f(x) - f(x) + f(x-h)$$

άρα

$$\varDelta \cdot \nabla = \nabla \cdot \varDelta$$

Άσκηση 6

- Να αποδειχθεί ότι $\varDelta^3 f_n = \nabla^3 f_{n+3}$

Απάντηση

$$\begin{aligned}\varDelta^3 f_n &= \varDelta^2(\varDelta f_n) = \varDelta^2(f_{n+1} - f_n) = \varDelta(\varDelta(f_{n+1} - f_n)) = \varDelta(\varDelta f_{n+1} - \varDelta f_n) = \varDelta(f_{n+2} - f_{n+1} - f_{n+1} + f_n) = \\ &= \varDelta f_{n+2} - 2 \cdot \varDelta f_{n+1} + \varDelta f_n = f_{n+3} - f_{n+2} - 2 \cdot f_{n+2} + 2 \cdot f_{n+1} + f_{n+1} - f_n = f_{n+3} - 3 \cdot f_{n+2} + 3 \cdot f_{n+1} - f_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla^3 f_{n+3} &= \nabla^2(\nabla f_{n+3}) = \nabla^2(f_{n+3} - f_{n+2}) = \nabla(\nabla(f_{n+3} - f_{n+2})) = \nabla(\nabla f_{n+3} - \nabla f_{n+2}) = \\ &= \nabla(f_{n+3} - f_{n+2} - f_{n+2} + f_{n+1}) = \nabla f_{n+3} - 2 \cdot \nabla f_{n+2} + \nabla f_{n+1} = \\ &= \nabla(f_{n+3} - f_{n+2} - f_{n+2} + f_{n+1}) = \nabla f_{n+3} - 2 \cdot \nabla f_{n+2} + \nabla f_{n+1} = f_{n+3} - f_{n+2} - 2 \cdot f_{n+2} + 2 \cdot f_{n+1} + f_{n+1} - f_n \\ &= f_{n+3} - 3 \cdot f_{n+2} + 3 \cdot f_{n+1} - f_n\end{aligned}$$

Άσκηση 7

- Να αποδειχθεί ότι $\varDelta^2(\alpha^x) = (\alpha^h - 1)^2 \cdot \alpha^x$

Απάντηση

$$\begin{aligned}\varDelta^2(\alpha^x) &= \varDelta(\varDelta\alpha^x) = \varDelta(\alpha^{x+h} - \alpha^x) = \varDelta\alpha^{x+h} - \varDelta\alpha^x = \alpha^{x+2h} - \alpha^{x+h} - \alpha^{x+h} + \alpha^x = \\ &= \alpha^{x+2h} - 2 \cdot \alpha^{x+h} + \alpha^x = \alpha^x \cdot (\alpha^{2h} - 2 \cdot \alpha^h + 1) = \alpha^x \cdot (\alpha^h - 1)^2\end{aligned}$$

Κεφάλαιο 7 - Παρεμβολή

Άσκηση 1

- Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών της συνάρτησης $f(x) = e^x$:

x	3.50	3.55	3.60
$f(x)$	33.115	34.813	36.598

Χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory να βρεθεί πολυώνυμο παρεμβολής πρώτου βαθμού της *f(x)* και να βρεθεί το *f(3.57)*.

Απάντηση

Κατασκευάζουμε τον πίνακα διαφορών της συνάρτησης μέχρι τη στήλη των πρώτων διαφορών.

x	$f(x)$	Δ
3.50	33.115	
		1.698
3.55	34.813	
		1.785
3.60	36.598	

Χρησιμοποιώντας τώρα τον τύπο των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory με x_o ίσο με 3.50, οπότε $\theta = \dfrac{x - x_o}{h} = \dfrac{x - 3.55}{0.05} = 20 \cdot (x - 3.55)$, θα έχουμε

$$f(x) = f_o + \binom{\theta}{1} \cdot \Delta f_o = 34.813 + \binom{20 \cdot (x - 3.55)}{1} \cdot 1.785 = 35.7 \cdot x - 91.922$$

$$f(3.57) = 35.7 \cdot x - 91.922 = 35.7 \cdot 3.57 - 91.922 = 35.527$$

Άσκηση 2

- Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών της συνάρτησης *f(x)* :

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-2	-1	0	1	2

Χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory να βρεθεί η *f(x)* με την προϋπόθεση ότι αυτή είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού και να βρεθεί το *f(1.5)*.

Απάντηση

Κατασκευάζουμε τον πίνακα διαφορών της συνάρτησης μέχρι τη στήλη των πρώτων διαφορών (οι δεύτερες διαφορές θα είναι μηδέν).

x	$f(x)$	Δ
-1	-2	
		1
0	-1	
		1
1	0	
		1
2	1	
		1
3	2	

Χρησιμοποιώντας τώρα τον τύπο των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory με x_o ίσο με -1, οπότε $\theta = \frac{x - x_o}{h} = \frac{x - (-1)}{1} = x + 1$, θα έχουμε

$$f(x) = f_o + \binom{\theta}{1} \cdot \Delta f_o = -2 + \binom{x+1}{1} \cdot 1 = -2 + \frac{(x+1)!}{1! \cdot (x+1-1)!} \cdot 1 = x - 1$$

Για $x = 1.5$ θα έχουμε $\theta = \frac{x - x_o}{h} = \frac{1.5 - (-1)}{1} = 2.5$ και

$$f(1.5) = f_o + \binom{2.5}{1} \cdot \Delta f_o = -2 + 2.5 \cdot 1 = 0.5$$

Άσκηση 3

- Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών της συνάρτησης $f(x)$:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	-1	0	3	8

Χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory να βρεθεί η $f(x)$ με την προϋπόθεση ότι αυτή είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού.

<u>Απάντηση</u>

Κατασκευάζουμε τον πίνακα διαφορών της συνάρτησης μέχρι τη στήλη των δεύτερων διαφορών (οι τρίτες διαφορές θα είναι μηδέν).

x	$f(x)$	Δ	Δ^2
-1	0		
		-1	
0	-1		2
		1	
1	0		2
		3	
2	3		2
		5	
3	8		

Χρησιμοποιώντας τώρα τον τύπο των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory με x_o ίσο με *-1*, οπότε $\theta = \frac{x - x_o}{h} = \frac{x - (-1)}{1} = x + 1$, θα έχουμε

$$f(x) = f_o + \binom{\theta}{1} \cdot \Delta f_o + \binom{\theta}{2} \cdot \Delta^2 f_o = 0 + \binom{x+1}{1} \cdot (-1) + \binom{x+1}{2} \cdot 2$$

$$= 0 + \frac{(x+1)!}{1! \cdot (x+1-1)!} \cdot (-1) + \frac{(x+1)!}{2! \cdot (x+1-2)!} \cdot 2 = 0 - (x+1) + \frac{x \cdot (x+1)}{2} \cdot 2$$

$$= 0 - x - 1 + x^2 + x = x^2 - 1$$

Άσκηση 4

- Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών της συνάρτησης *f(x)* :

x	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*
f(x)	*-2*	*-1*	*0*	*7*	*26*

Χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory να βρεθεί η *f(x)* με την προϋπόθεση ότι αυτή είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού.

Απάντηση

Κατασκευάζουμε τον πίνακα διαφορών της συνάρτησης μέχρι τη στήλη των τρίτων διαφορών (οι τέταρτες διαφορές θα είναι μηδέν).

x	*f(x)*	*Δ*	Δ^2	Δ^3
-1	*-2*			
		1		
0	*-1*		*0*	
		1		*6*
1	*0*		*6*	
		7		*6*
2	*7*		*12*	
		19		
3	*26*			

Χρησιμοποιώντας τώρα τον τύπο των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory με x_o ίσο με *-1*, οπότε $\theta = \frac{x - x_o}{h} = \frac{x - (-1)}{1} = x + 1$, θα έχουμε

$$f(x) = f_o + \binom{\theta}{1} \cdot \Delta f_o + \binom{\theta}{2} \cdot \Delta^2 f_o + \binom{\theta}{3} \cdot \Delta^3 f_o = -2 + \binom{x+1}{1} \cdot 1 + \binom{x+1}{2} \cdot 0 + \binom{x+1}{3} \cdot 6$$

$$= -2 + (x+1) + \frac{(x+1) \cdot x \cdot (x-1)}{6} \cdot 6 = -2 + x + 1 + x^3 - x = x^3 - 1$$

Άσκηση 5

- Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών της συνάρτησης *f(x)* :

x	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*
f(x)	*-2*	*- 1*	*0*	*7*	*26*

Χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory να βρεθεί η *f(1.5)* με προσέγγιση τριών δ.ψ.

<u>Απάντηση</u>

Χρησιμοποιούμε τον πίνακα διαφορών της Άσκησης 4 και έστω x_o η πρώτη τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής. Έτσι έχουμε $x_o = 0$ *και* $\theta = \dfrac{x - x_o}{h} = \dfrac{1.5-(-1)}{1} = 2.5$. Για την εύρεση του *f(1.5)* θα χρησιμοποιηθεί ο τύπος της Άσκησης 4, οπότε αντικαθιστώντας θα έχουμε :

$$f(1.5) = f_o + \binom{\theta}{1}\cdot \Delta f_o + \binom{\theta}{2}\cdot \Delta^2 f_o + \binom{\theta}{3}\cdot \Delta^3 f_o = -2 + \binom{2.5}{1}\cdot 1 + \binom{2.5}{2}\cdot 0 + \binom{2.5}{3}\cdot 6$$

$$= -2 + \frac{2.5}{1}\cdot 1 + \frac{2.5\cdot(2.5-1)}{2}\cdot 0 + \frac{2.5\cdot(2.5-1)\cdot(2.5-2)}{6}\cdot 6 = -2 + 2.5 + 0 + 1.875 = 2.375$$

Άσκηση 6

- Να υπολογισθεί το άθροισμα $S_n = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + ... + n$ χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory.

<u>Απάντηση</u>

$$\Delta S_n = S_{n+1} - S_n = \sum_{i=1}^{n+1} i - \sum_{i=1}^{n} i = \big(1 + 2 + ... + (n+1)\big) - \big(1 + 2 + ... + n\big) = n + 1$$

$$\Delta^2 S_n = \Delta(\Delta S_n) = \Delta(n+1) = (n+2) - (n+1) = 1$$

Αφού οι δεύτερες διαφορές είναι σταθερές, το πολυώνυμο παρεμβολής θα είναι δευτέρου βαθμού. Κατασκευάζουμε τον πίνακα διαφορών για τις 4 πρώτες τιμές :

$$S_1 = \sum_{i=1}^{1} i = 1,$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{2} i = 1 + 2 = 3$$

$$S_3 = \sum_{i=1}^{3} i = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$S_4 = \sum_{i=1}^{3} i = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

x_i	S_i	Δ	Δ^2	Δ^3
1	1			
		2		
2	3		1	
		3		0
3	6		1	
		4		
4	10			

Χρησιμοποιώντας τον τύπο των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory με x_o ίσο με *1*, οπότε $\theta = \dfrac{n\text{ - }x_o}{h} = \dfrac{n\text{ - }1}{1} = n - 1$, θα έχουμε

$$S_n = f_o + \binom{\theta}{1} \cdot \Delta f_o + \binom{\theta}{2} \cdot \Delta^2 f_o = 1 + \binom{n-1}{1} \cdot 2 + \binom{n-1}{2} \cdot 1$$

$$= 1 + (n-1) \cdot 2 + \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2} \cdot 1 = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Άσκηση 7

- Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών της συνάρτησης $f(x) = e^x$:

x	3.50	3.55	3.60
$f(x)$	33.115	34.813	36.598

Χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής των προς τα πίσω διαφορών των Newton – Gregory να βρεθεί πολυώνυμο παρεμβολής πρώτου βαθμού της *f(x)* και να βρεθεί το *f(3.57)*.

Απάντηση

Κατασκευάζουμε τον πίνακα διαφορών της συνάρτησης μέχρι τη στήλη των πρώτων διαφορών.

x	$f(x)$	∇
3.50	33.115	
		1.698
3.55	34.813	
		1.785
3.60	36.598	

Χρησιμοποιώντας τώρα τον τύπο των προς τα πίσω διαφορών των Newton – Gregory με x_o ίσο με *3.60*, οπότε $\theta = \dfrac{x_o\text{ - }x}{h} = \dfrac{3.6\text{ - }x}{0.05} = 20 \cdot (3.6 - x)$, θα έχουμε

$$f(x) = f_o - \binom{\theta}{1} \cdot \nabla f_o = 36.598 - \binom{20 \cdot (3.6 - x)}{1} \cdot 1.785 = 35.7 \cdot x - 91.922$$

$$f(3.57) = 35.7 \cdot x - 91.922 = 35.7 \cdot 3.57 - 91.922 = 35.527$$

Άσκηση 8

- Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών της συνάρτησης *f(x)* :

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-2	-1	0	1	2

Χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής των προς τα πίσω διαφορών των Newton – Gregory να βρεθεί η *f(x)* με την προϋπόθεση ότι αυτή είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού.

Απάντηση

Κατασκευάζουμε τον πίνακα διαφορών της συνάρτησης μέχρι τη στήλη των πρώτων διαφορών (οι δεύτερες διαφορές θα είναι μηδέν).

x	$f(x)$	∇
-1	-2	
		1
0	-1	
		1
1	0	
		1
2	1	
		1
3	2	

Χρησιμοποιώντας τον τύπο των προς τα πίσω διαφορών των Newton – Gregory με x_o ίσο με 3, οπότε $\theta = \frac{x_0 - x}{h} = \frac{3 - x}{1} = 3 - x$, θα έχουμε

$$f(x) = f_o - \binom{\theta}{1} \cdot \nabla f_o = 2 - \binom{3-x}{1} \cdot 1 = 2 + (x - 3) = x - 1$$

Άσκηση 9

- Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών της συνάρτησης *f(x)* :

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	-1	0	3	8

Χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής των προς τα πίσω διαφορών των Newton – Gregory να βρεθεί η *f(x)* με την προϋπόθεση ότι αυτή είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού.

<u>Απάντηση</u>

Κατασκευάζουμε τον πίνακα διαφορών της συνάρτησης μέχρι τη στήλη των δεύτερων διαφορών (οι τρίτες διαφορές θα είναι μηδέν).

x	$f(x)$	∇	∇^2
-1	0		
		-1	
0	-1		2
		1	
1	0		2
		3	
2	3		2
		5	
3	8		

Χρησιμοποιώντας τον τύπο των προς τα πίσω διαφορών των Newton – Gregory με x_o ίσο με *3*, οπότε $\theta = \dfrac{x_0 - x}{h} = \dfrac{3 - x}{1} = 3 - x$, θα έχουμε

$$f(x) = f_o - \binom{\theta}{1} \cdot \nabla f_o + \binom{\theta}{2} \cdot \nabla^2 f_o = 8 - \binom{3-x}{1} \cdot 5 + \binom{3-x}{2} \cdot 2$$

$$= 8 - 5 \cdot (3 - x) + \frac{(3-x) \cdot (2-x)}{2} \cdot 2$$

$$= 8 + 5 \cdot x - 15 + x^2 - 5 \cdot x + 6 = x^2 - 1$$

Άσκηση 10

- Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών της συνάρτησης *f(x)* :

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-2	-1	0	7	26

Χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής των προς τα πίσω διαφορών των Newton – Gregory να βρεθεί η *f(x)* με την προϋπόθεση ότι αυτή είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού.

Απάντηση

Κατασκευάζουμε τον πίνακα διαφορών της συνάρτησης μέχρι τη στήλη των τρίτων διαφορών (οι τέταρτες διαφορές θα είναι μηδέν).

x	$f(x)$	∇	∇^2	∇^3
-1	-2			
		1		
0	-1		0	
		1		6
1	0		6	
		7		6
2	7		12	
		19		
3	26			

Χρησιμοποιώντας τώρα τον τύπο των προς τα πίσω διαφορών των Newton – Gregory με x_o ίσο με 3, οπότε $\theta = \frac{x_0 - x}{h} = \frac{3 - x}{1} = 3 - x$, θα έχουμε

$$f(x) = f_o - \binom{\theta}{1} \cdot \nabla f_o + \binom{\theta}{2} \cdot \nabla^2 f_o - \binom{\theta}{3} \cdot \nabla^3 f_o = 26 - \binom{3-x}{1} \cdot 19 + \binom{3-x}{2} \cdot 12 - \binom{3-x}{3} \cdot 6$$

$$= 26 - (3-x) \cdot 19 + \frac{(3-x) \cdot (2-x)}{2} \cdot 12 - \frac{(3-x) \cdot (2-x) \cdot (1-x)}{6} \cdot 6 = x^3 - 1$$

Άσκηση 11

- Δίνεται ο πίνακας τιμών της συνάρτησης $f(x) = x^3$, $x = 1(0.1)1.5$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory να βρεθεί το πλήθος όρων που θα χρησιμοποιηθούν για την εύρεση της τιμής $f(1.25)$ με ακρίβεια 3 δ.ψ..

Απάντηση

Ο πίνακας διαφορών θα είναι :

x	$f(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3
1	1.000			
		0.331		
1.1	1.331		0.066	
		0.397		0.006
1.2	1.728		0.072	
		0.469		0.006
1.3	2.197		0.078	
		0.547		0.006
1.4	2.744		0.084	
		0.631		
1.5	3.375			

Χρησιμοποιώντας τον τύπο των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory με x_o ίσο με 1.2, οπότε $\theta = \dfrac{x - x_o}{h} = \dfrac{1.25 - 1.2}{0.1} = 0.5$, θα έχουμε

$$\Delta^2 f_o = \Delta^2 f(1.2) = 0.066 > max\left(\left|\Delta^2 f_0\right|\right) = 4 \cdot 10^{-3} = 0.004$$
$$\Delta^3 f_o = \Delta^3 f(1.2) = 0.006 < max\left(\left|\Delta^3 f_0\right|\right) = 8 \cdot 10^{-3} = 0.008$$

Άρα μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι διαφορές μέχρι το πολύ δευτέρου βαθμού, οπότε θα έχουμε :

$$f(1.25)^* = f_o + \binom{\theta}{1} \cdot \Delta f_o + \binom{\theta}{2} \cdot \Delta^2 f_o = 1.728 + \binom{0.5}{1} \cdot 0.469 + \binom{0.5}{2} \cdot 0.078$$
$$= 1.728 + 0.5 \cdot 0.469 + \frac{(0.5)\cdot(0.5-1)}{2} \cdot 0.078 = 1.95275$$

Αν αντικαταστήσουμε στην $f(x) = x^3$ το 1.25 θα έχουμε :

$$f(1.25) = (1.25)^3 = 1.953125$$

και

$$|\varepsilon| = \left|f(1.25)^* - f(1.25)\right| = |1.95275 - 1.953125| = 0.000375 \le \frac{1}{2} \cdot 10^{-k} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} = 0.0005$$

Άσκηση 12

- Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών της συνάρτησης $f(x)$:

x	-1	0	1	2
$f(x)$	0	1	2	9

Χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής Lagrange να βρεθεί η $f(0.5)$ με προσέγγιση τριών δ.ψ.

<u>Απάντηση</u>

Θα έχουμε $x_o = -1, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$, $x = 0.5$ και

$$f(x) = P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} L_i(x) \cdot f_i$$

Αλλά

$$L_o(0.5) \cdot f_o = \frac{(x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot(x - x_3)}{(x_0 - x_1)\cdot(x_0 - x_2)\cdot(x_0 - x_3)} \cdot 0 = 0$$

$$L_1(0.5) \cdot f_1 = \frac{(x - x_0)\cdot(x - x_2)\cdot(x - x_3)}{(x_1 - x_0)\cdot(x_1 - x_2)\cdot(x_1 - x_3)} \cdot 1 = \frac{(1.5)\cdot(-0.5)\cdot(-2.5)}{(1)\cdot(-1)\cdot(-2)} \cdot 1 = 0.9375$$

$$L_2(0.5)\cdot f_2 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_3)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)}\cdot 2 = \frac{(1.5)\cdot(0.5)\cdot(-1.5)}{(2)\cdot(1)\cdot(-1)}\cdot 2 = 1.125$$

$$L_3(0.5)\cdot f_3 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_3-x_0)\cdot(x_3-x_1)\cdot(x_3-x_2)}\cdot 9 = \frac{(1.5)\cdot(0.5)\cdot(-0.5)}{(3)\cdot(2)\cdot(1)}\cdot 9 = -0.5625$$

οπότε

$$f(0.5) = 1.5$$

Άσκηση 13

- Χρησιμοποιώντας κατάλληλο τύπο παρεμβολής να βρεθεί πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, το πολύ, που να ταυτίζεται στα σημεία *x = -1, 0, 2* με τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 1$.

Απάντηση

Από τους τύπους παρεμβολής μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο τον τύπο παρεμβολής του Lagrange, αφού τα σημεία παρεμβολής δεν ισαπέχουν. Αν $x_o = -1, x_1 = 0, x_2 = 2$, θα έχουμε $f_o = -2, f_1 = -1, f_2 = 7$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής του Lagrange βρίσκουμε

$$f(x) \approx P_2(x) = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_o-x_1)\cdot(x_o-x_2)}\cdot f_o + \frac{(x-x_o)\cdot(x-x_2)}{(x_1-x_o)\cdot(x_1-x_2)}\cdot f_1 + \frac{(x-x_o)\cdot(x-x_1)}{(x_2-x_o)\cdot(x_2-x_1)}\cdot f_2 =$$

$$= \frac{(x-0)\cdot(x-2)}{(-1-0)\cdot(-1-2)}\cdot -2 + \frac{(x-(-1))\cdot(x-2)}{(0-(-1))\cdot(0-2)}\cdot -1 + \frac{(x-(-1))\cdot(x-0)}{(2-(-1))\cdot(2-0)}\cdot 7 =$$

$$= -\frac{2\cdot x\cdot(x-2)}{3} + \frac{(x+1)\cdot(x-2)}{2} + \frac{7\cdot(x+1)\cdot x}{6} = x^2 + 2\cdot x - 1$$

που είναι το ζητούμενο πολυώνυμο.

Άσκηση 14

- Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών της συνάρτησης *f(x)* :

x	*1*	*2*	*3*
f(x)	*1*	*8*	*27*

Να βρεθεί ένα απόλυτο φράγμα για το σφάλμα αποκοπής, κατά την εύρεση της τιμής του πολυωνύμου παρεμβολής του Lagrange, που ορίζεται από τα σημεία $x_o = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$ και προσεγγίζει τη συνάρτηση $f(x) = x^3$ στο σημείο $x = 2.5$

Απάντηση

Θα έχουμε $f(x) = x^3$, $f^{'}(x) = 3 \cdot x^2$, $f^{''}(x) = 6 \cdot x$ και $f^{'''}(x) = 6$

οπότε

$$R_{n+1}(2.5) = R_3(2.5) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \frac{f^{'''}(\xi)}{(2+1)!} =$$
$$= (2.5 - 1) \cdot (2.5 - 2) \cdot (2.5 - 3) \cdot \frac{6}{6} = -0.375$$

Το Πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange θα είναι :

$$P_2(2.5) = \sum_{i=0}^{2} L_i(2.5) \cdot f_i$$

Αλλά

$$L_o(2.5) \cdot f_o = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2)} \cdot f_o = \frac{(2.5 - 2) \cdot (2.5 - 3)}{(1 - 2) \cdot (1 - 3)} \cdot 1 = -0.125$$

$$L_1(2.5) \cdot f_1 = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_2)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2)} \cdot f_1 = \frac{(2.5 - 1) \cdot (2.5 - 3)}{(2 - 1) \cdot (2 - 3)} \cdot 8 = 6$$

$$L_2(2.5) \cdot f_2 = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1)}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)} \cdot f_2 = \frac{(2.5 - 1) \cdot (2.5 - 2)}{(3 - 1) \cdot (3 - 2)} \cdot 27 = 10.125$$

οπότε

$$P_2(2.5) = -0.125 + 6 + 10.125 = 16$$

και

$$f(2.5) = P_2(2.5) + R_3(2.5) = 16 - 0.375 = 15.625$$

που είναι ίσο με το $f(2.5) = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8} = 15.625$