Τ.Ε.Ι. Θεσσαλονίκης
Τμήμα Πληροφορικής

Αριθμητική Ανάλυση
&
Προγραμματισμός Επιστημονικών Εφαρμογών

Θεωρία
Παραδείγματα και Άλυτες Ασκήσεις

Γουλιάνας Κώστας
Επίκουρος Καθηγητής

email : gouliana@it.teithe.gr
Ιστοσελίδα : www.it.teithe.gr/~gouliana

Θεσσαλονίκη 2011

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1 Εισαγωγή

1.1 Τι είναι η Αριθμητική Ανάλυση

Οι σημειώσεις αυτές έχουν σαν στόχο να εισάγουν τους Φοιτητές του Γ' Εξαμήνου του Τμήματος Πληροφορικής του ΤΕΙ Θεσσαλονίκης στις Αριθμητικές Μεθόδους και τις Τεχνικές Επίλυσης Μαθηματικών προβλημάτων, γνωστές σαν Αριθμητική Ανάλυση. Οι μέθοδοί της εφαρμόζονται σε πολλούς επιστημονικούς τομείς, όπως η Στατιστική, η Μηχανική, η Μετεωρολογία, η Επεξεργασία Σήματος, η Επεξεργασία Εικόνας, Υπολογισμός Συχνότητας Θορύβου σε Σήματα, Σχεδιασμός Φίλτρων κ.λ.π..

Η Αριθμητική Ανάλυση, σαν Κλάδος των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών αναπτύχθηκε σε μεγάλο βαθμό μετά το 2^o Παγκόσμιο Πόλεμο, παράλληλα με την ανάπτυξη των Η/Υ. Έχει όμως τις ρίζες της στην αρχαιότητα. Εκτός από τους Βαβυλώνιους και τους Αιγύπτιους, μεταξύ των Ελλήνων που ανέπτυξαν μεθόδους Αριθμητικής Ανάλυσης ήταν ο Αρχιμήδης (220 π.Χ.) που με τη μέθοδο των Προσεγγίσεων βρήκε τιμή για το π μεταξύ του $3\frac{10}{71}$ και $3\frac{1}{7}$ και ο Ήρωνας (100 π.Χ.) που βρήκε την Τετραγωνική Ρίζα ενός αριθμού a με τον Επαναληπτικό Τύπο $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$, ο οποίος είναι μερική περίπτωση της μεθόδου Newton-Raphson που βρέθηκε μετά 18 αιώνες.

Όπως είναι γνωστό, οι μαθηματικές δυνατότητες των Η/Υ εξαντλούνται στις τέσσερις βασικές πράξεις της αριθμητικής : πρόσθεση, αφαίρεση (συμπλήρωμα της πρόσθεσης), πολλαπλασιασμό και διαίρεση (διαδοχικές προσθέσεις κι αφαιρέσεις). Οι ταχύτητες εκτέλεσης αυτών των πράξεων είναι τρομακτικά υψηλές, τα προβλήματα όμως που συναντούμε περιέχουν και άλλες πράξεις, όπως εύρεση λογαρίθμων, παραγώγων, ολοκληρωμάτων, ριζών κ.λ.π. που δεν μπορούν να γίνουν άμεσα με έναν Η/Υ. Σκοπός της Α.Α. είναι η ανάπτυξη μεθόδων για τη μετατροπή Μαθηματικών προβλημάτων σε ισοδύναμα, τα οποία περιέχουν μόνο τις τέσσερις πράξεις της Αριθμητικής, απαιτούν όσο το δυνατόν λιγότερες πράξεις και που είναι άμεσα υλοποιήσιμα σε έναν Η/Υ. Ένας ορισμός της Α.Α. θα μπορούσε να είναι :

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1 : *Αριθμητική Ανάλυση* είναι ο κλάδος των σύγχρονων Εφαρμοσμένων Μαθηματικών που ασχολείται με την Ανάπτυξη και την κατασκευή αριθμητικών μεθόδων για την εύρεση αριθμητικών αποτελεσμάτων από αριθμητικά δεδομένα.

Παρατηρήσεις

- Η χρησιμοποίηση και η αξιοποίηση των μεγάλων δυνατοτήτων των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών θα ήταν πολύ περιορισμένη χωρίς τη γνώση των μεθόδων του Αριθμητικού Προσεγγιστικού Λογισμού.

- Η μεθοδολογία για την επίλυση ενός προβλήματος με τη βοήθεια της Αριθμητικής Ανάλυσης επιδιώκει :

  1. Την ανεύρεση της πιο πρόσφορης ***μεθόδου*** με την οποία εξασφαλίζεται η λύση.
  2. Την επαλήθευση για να δειχτεί ότι, η μέθοδος ***συγκλίνει*** στη λύση του συγκεκριμένου προβλήματος.
  3. Τον έλεγχο της ***ταχύτητας*** με την οποία συγκλίνει η μέθοδος.
  4. Την εύρεση του ***σφάλματος*** που έγινε κατά την εκτέλεση των υπολογισμών αυτών.

- Την ανάπτυξη των Μεθόδων θα ακολουθούν πολλά *παραδείγματα* και υποδειγματικοί *αλγόριθμοι*, για την υλοποίησή τους σε Ηλεκτρονικό Υπολογιστή. Στο Εργαστηριακό Μέρος του Μαθήματος χρησιμοποιείται η γλώσσα προγραμματισμού C.

2

Ακρίβεια Υπολογισμών - Σφάλματα

Σφάλματα
Σφάλματα στους Υπολογισμούς
Παράσταση Αριθμών στον Η/Υ
Μετάδοση Σφαλμάτων στους Υπολογισμούς

2.1 Σφάλματα

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ένας από τους βασικούς κανόνες που πρέπει να ακολουθείται κατά την επίλυση των προβλημάτων της Αριθμητικής Ανάλυσης, είναι ο προσδιορισμός του Σφάλματος που γίνεται κατά τη μετατροπή των Μαθηματικών προβλημάτων στα ισοδύναμά τους, των **τεσσάρων πράξεων της Αριθμητικής**. Πρέπει εδώ να σημειωθεί, ότι η παραγωγή του σφάλματος είναι αναπόφευκτη, αφού η μετατροπή γίνεται προσεγγιστικά. Τι είναι όμως σφάλμα;

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1 : ***Σφάλμα*** είναι η διαφορά της αληθινής τιμής ενός αριθμού από την προσεγγιστική του τιμή. Έτσι, αν x^* είναι η προσεγγιστική τιμή και x η ακριβής ή αληθινή τιμή ενός αριθμού, τότε το **Σφάλμα** δίνεται από τη σχέση:

$$\varepsilon = x^* - x$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2 : Η αντίθετη ποσότητα του σφάλματος ονομάζεται ***Διόρθωση*** και δίνεται από τη σχέση :

$$r = x - x^*$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3 : Η απόλυτη τιμή του σφάλματος ονομάζεται ***Απόλυτο Σφάλμα*** και ορίζεται από τη σχέση :

$$|\varepsilon| = |x^* - x|$$

Παράδειγμα 2.1

- Η ακριβής τιμή ενός αριθμού είναι $x = 2$, και η προσεγγιστική του τιμή (η τιμή που μετρήθηκε) είναι $x^* = 1$. Να βρεθεί το Σφάλμα και το Απόλυτο Σφάλμα του x.

Απάντηση

Σφάλμα : $\varepsilon = x^* - x = 1 - 2 = -1$

Απόλυτο Σφάλμα : $|\varepsilon| = |x^* - x| = |-1| = 1$

Παράδειγμα 2.2

- Η ακριβής τιμή ενός αριθμού είναι $x = 2000$, και η προσεγγιστική του τιμή είναι $x^* = 1999$. Να βρεθεί το Σφάλμα και το Απόλυτο Σφάλμα του x.

Απάντηση

Σφάλμα : $\varepsilon = x^* - x = 1999 - 2000 = -1$

Απόλυτο Σφάλμα : $|\varepsilon| = |x^* - x| = |-1| = 1$

Παρατήρηση

- Όπως φαίνεται στα παραπάνω παραδείγματα 2.1 και 2.2, το απόλυτο σφάλμα και στις δύο περιπτώσεις είναι το ίδιο. Στη δεύτερη όμως περίπτωση, η μέτρηση θεωρείται πιο ακριβής, γιατί υποσυνείδητα συσχετίζουμε το σφάλμα με την ακριβή τιμή. Γι' αυτό μια χρήσιμη έννοια είναι το Σχετικό Σφάλμα που ορίζεται ως εξής :

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.4 : Το πηλίκο του σφάλματος δια του αριθμού x ονομάζεται ***Σχετικό Σφάλμα*** και ορίζεται από τη σχέση :

$$\varepsilon_\sigma = \frac{\varepsilon}{x} = \frac{x^* - x}{x} \approx \frac{x^* - x}{x^*}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.5 : Το ***Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα*** ορίζεται από τη σχέση :

$$|\varepsilon_\sigma| = \left|\frac{\varepsilon}{x}\right| = \left|\frac{x^* - x}{x}\right| \approx \left|\frac{x^* - x}{x^*}\right|$$

Παράδειγμα 2.3

- Η ακριβής τιμή ενός αριθμού είναι $x = 2.0$, και η προσεγγιστική του τιμή $x^* = 1.999$. Να βρεθεί το Σφάλμα, το Απόλυτο Σφάλμα, το Σχετικό Σφάλμα, και το Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα του αριθμού x.

<u>Απάντηση</u>

Σφάλμα : $\varepsilon = x^* - x = 1.999 - 2.0 = -0.001$

Απόλυτο Σφάλμα : $|\varepsilon| = |x^* - x| = |-0.001| = 0.001$

Σχετικό Σφάλμα : $\varepsilon_\sigma = \dfrac{\varepsilon}{x} = \dfrac{-0.001}{2.0} = -0.0005$

Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα : $|\varepsilon_\sigma| = \left|\dfrac{\varepsilon}{x}\right| = \dfrac{0.001}{2.0} = 0.0005$

Παρατηρήσεις

- Όσο μικρότερο είναι το σχετικό σφάλμα, τόσο καλύτερη είναι η μέτρηση.

- Για την προσεγγιστική τιμή x^* (χρησιμοποιώντας τους Ορισμούς 2.1, 2.4) ισχύει η σχέση :

$$x^* = x + \varepsilon = x + \varepsilon \cdot x \cdot \frac{1}{x} = x \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{x} \right) = x \cdot (1 + \varepsilon_\sigma)$$

2.2 Σφάλματα στους Υπολογισμούς

Κατά την εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων (υπολογισμών), εκτός απ' τα σφάλματα των δεδομένων ενός προβλήματος που οφείλονται σε συστηματικά ή τυχαία σφάλματα των οργάνων μετρήσεως ή σε αμελητέες δυνάμεις στη διατύπωση του προβλήματος, υπεισέρχονται σ' αυτές κι άλλα σφάλματα. Σφάλματα που οφείλονται στην επιλογή της αριθμητικής μεθόδου (η οποία βρίσκει συνήθως μια προσέγγιση της λύσης), στην αποθήκευση πραγματικών – περιοδικών αριθμών στον Η/Υ και τη συσσώρευση σφαλμάτων, σαν αποτέλεσμα πράξεων. Τα σφάλματα, γενικά, χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: Τα **Σφάλματα Αποκοπής** και τα **Σφάλματα Στρογγυλοποίησης**.

2.2.1 Σφάλμα Αποκοπής

- Το σφάλμα αποκοπής συναντάται συνήθως στην αποθήκευση πραγματικών – περιοδικών αριθμών στον Η/Υ και κατά τον υπολογισμό σειρών, δηλαδή αθροίσματος όρων, όπως π.χ. τον υπολογισμό του e^x :

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

Τα αθροίσματα αυτά (Σειρές) περιέχουν άπειρο πλήθος όρων τους οποίους είναι αδύνατο να τους αθροίσουμε όλους. Έτσι, προσθέτουμε ένα ορισμένο πλήθος πρώτων όρων, αγνοώντας τους υπόλοιπους. Το σφάλμα, στην περίπτωση αυτή, είναι :

$$\varepsilon = x^* - x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = -\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

και ονομάζεται **Σφάλμα Αποκοπής**.

2.2.2 Σφάλμα Στρογγυλοποίησης

Κατά την εκτέλεση των πράξεων, όταν αυτές εκτελούνται με Η/Υ, δεν είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν αριθμοί με πολύ μεγάλο πλήθος ψηφίων, γιατί είναι αδύνατη η αποθήκευσή τους στη Μνήμη του Η/Υ. Έτσι, οι πραγματικοί αριθμοί αντικαθίστανται από άλλους, οι οποίοι έχουν λιγότερα ψηφία. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **Στρογγυλοποίηση** και το σφάλμα που προκύπτει **Σφάλμα Στρογγυλοποίησης.** Η στρογγυλοποίηση δε γίνεται αυθαίρετα, αλλά ακολουθούνται κάποιοι κανόνες που σκοπό έχουν να ελαχιστοποιήσουν το σφάλμα της απόρριψης των ψηφίων.

2.2.3 Στρογγυλοποίηση Δεκαδικών Αριθμών με Πολλά Ψηφία

- Στη στρογγυλοποίηση ενός αριθμού σε k δεκαδικά ψηφία, παραλείπουμε τα ψηφία από την $k+1$ θέση και μετά. Το ψηφίο της k θέσης το αφήνουμε όπως είναι ή το αυξάνουμε κατά μια μονάδα, αν το μέρος που παραλείπεται είναι μεγαλύτερο από μισή μονάδα της k δεκαδικής τάξης. Στην περίπτωση που το μέρος που παραλείπεται είναι ακριβώς μισή μονάδα της k δεκαδικής τάξεως, τότε, αν ο k ψηφίο είναι άρτιο, το αφήνουμε ως έχει, διαφορετικά το αυξάνουμε κατά 1.

Παράδειγμα 2.4

- Να στρογγυλοποιηθεί ο αριθμός $\pi = 3.1415926535$ σε $9,8,7,6,5,4,3,2$ δεκαδικά ψηφία.

<u>Απάντηση</u>

$$\begin{aligned} \pi = 3.1415926535 &= 3.141592654 && \text{στρογγυλοποίηση σε } 9 \text{ δ.ψ.} \\ &= 3.14159265 && \text{στρογγυλοποίηση σε } 8 \text{ δ.ψ.} \\ &= 3.1415926 && \text{στρογγυλοποίηση σε } 7 \text{ δ.ψ.} \\ &= 3.141593 && \text{στρογγυλοποίηση σε } 6 \text{ δ.ψ.} \\ &= 3.14159 && \text{στρογγυλοποίηση σε } 5 \text{ δ.ψ.} \\ &= 3.1416 && \text{στρογγυλοποίηση σε } 4 \text{ δ.ψ.} \\ &= 3.142 && \text{στρογγυλοποίηση σε } 3 \text{ δ.ψ.} \\ &= 3.14 && \text{στρογγυλοποίηση σε } 2 \text{ δ.ψ.} \end{aligned}$$

Παρατήρηση

- Η στρογγυλοποίηση, ανάλογα με τον τρόπο που γίνεται μπορεί να έχει διαφορετικά αποτελέσματα, όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα :

Παράδειγμα 2.5

- Να στρογγυλοποιηθεί ο αριθμός $\pi = 3.1415926535$ σε 7 δεκαδικά ψηφία.

Απάντηση

$\pi = 3.1415926535 \approx 3.1415927 \neq 3.1415926$ του Παραδείγματος 2.4.

Παράδειγμα 2.6

- Να στρογγυλοποιηθεί ο αριθμός $x = 0.385$ σε 2 δεκαδικά ψηφία (δ. ψ.)

Απάντηση

$x = 0.385 \approx 0.38$

Παράδειγμα 2.7

- Να στρογγυλοποιηθεί ο αριθμός $x = 0.375$ σε 2 δεκαδικά ψηφία (δ. ψ.)

Απάντηση

$x = 0.375 \approx 0.38$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.6 : Κατά τη στρογγυλοποίηση ενός δεκαδικού αριθμού x σε k δεκαδικά ψηφία (δ. ψ.), για το απόλυτο σφάλμα στρογγυλοποίησης $|\varepsilon|$ ισχύει πάντοτε :

$$|\varepsilon| = |x^* - x| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}$$

Παράδειγμα 2.8

- Να βρεθεί το απόλυτο και το μέγιστο απόλυτο σφάλμα στρογγυλοποίησης του αριθμού $x = 0.374$ σε $k = 2$ δ. ψ.

Απάντηση

$$|\varepsilon| = |x^* - x| = |0.37 - 0.374| = |-0.004| = 0.004 \leq 0.005 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-k} .$$

Παράδειγμα 2.9

- Να βρεθεί το απόλυτο και το μέγιστο απόλυτο σφάλμα στρογγυλοποίησης του αριθμού $x = 0.375$ σε $k = 2$ δ.ψ.

Απάντηση

$$|\varepsilon| = |x^* - x| = |0.38 - 0.375| = |-0.005| = 0.005 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}\ .$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.7 : Οι αριθμοί x^*, x συμφωνούν σε k δεκαδικά ψηφία όταν ισχύει :

$$|x^* - x| \le \frac{1}{2} 10^{-k}$$

Παράδειγμα 2.10

- Να βρεθεί σε πόσα δ.ψ. συμφωνούν οι αριθμοί $x^* = 0.000244$ και $x = 0.000153$

Απάντηση

$$|\varepsilon| = |x^* - x| = |0.000244 - 0.000153| = |0.000091| = 0.000091 \le 0.0005 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$$

άρα συμφωνούν σε 3 δεκαδικά ψηφία.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.8 : Κατά τη στρογγυλοποίηση (με αποκοπή) ενός δεκαδικού αριθμού x σε k δεκαδικά ψηφία (δ. ψ.), για το απόλυτο σφάλμα αποκοπής $|\varepsilon|$ ισχύει :

$$|\varepsilon| = |x^* - x| \le 10^{-k}$$

Παράδειγμα 2.11

- Να βρεθεί το απόλυτο και το μέγιστο απόλυτο σφάλμα αποκοπής του αριθμού $x = 0.375$ σε $k = 2$ δ.ψ.

Απάντηση

$$|\varepsilon| = |x^* - x| = |0.37 - 0.375| = |-0.005| = 0.005 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \le 10^{-2} = 10^{-k}\ .$$

Παράδειγμα 2.12

- Να βρεθεί το απόλυτο και το μέγιστο απόλυτο σφάλμα αποκοπής του αριθμού $x = 0.379$ σε $k = 2$ δ.ψ.

Απάντηση

$|\varepsilon| = |x^* - x| = |0.37 - 0.379| = |-0.009| = 0.009 \leq 0.01 = 10^{-2} = 10^{-k}$.

2.3 Παράσταση Αριθμών στον Η/Υ

Στην καθημερινή μας ζωή χρησιμοποιούμε το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Στο σύστημα αυτό κάθε αριθμός γράφεται με μοναδικό τρόπο, σαν γραμμικός συνδυασμός δυνάμεων του 10, με συντελεστές τα ψηφία $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$.

Παράδειγμα 2.13

- Ο αριθμός 5902 του δεκαδικού συστήματος μπορεί να γραφεί σαν :

$$5902_{10} = 5 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$$

Παρατήρηση

- Οι Η/Υ χρησιμοποιούν το δυαδικό σύστημα αρίθμησης. Έτσι, κάθε αριθμός γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός δυνάμεων του 2.

Παράδειγμα 2.14

- Ο αριθμός 1110_2 του δυαδικού συστήματος μπορεί να γραφεί σαν :

$$1110_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 2 = 14_{10}$$

2.3.1 Παράσταση Ακεραίων Αριθμών στον Η/Υ

Αν έχουμε έναν Η/Υ που διαθέτει k bits για την παράσταση ενός ακέραιου αριθμού, με το πρώτο να παριστάνει το πρόσημο του αριθμού (0 = Θετικός 1 = Αρνητικός), τότε οι ακέραιοι που μπορούν να παρασταθούν από τον υπολογιστή θα ανήκουν στο διάστημα $[-2^{k-1}, 2^{k-1} - 1]$. Συνήθως οι Η/Υ διαθέτουν 16 bits (2 bytes) για την παράσταση των ακεραίων, επομένως οι ακέραιοι που μπορούν να παρασταθούν θα βρίσκονται στο διάστημα $[-2^{16-1},\ 2^{16-1} - 1] = [-32768,\ 32767]$.

2.3.2 Παράσταση Πραγματικών Αριθμών στον Η/Υ

Κάθε αριθμός μπορεί να γραφεί στη δεκαδική του μορφή με ένα ακέραιο και ένα δεκαδικό μέρος, το οποίο μπορεί να αποτελείται από άπειρα ψηφία, όπως φαίνεται στα επόμενα παραδείγματα :

$$\frac{1}{3} = 0.3333333333...$$

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950458...$$

$$0.1_{10} = 0.000110011001100110011001100110011..._{2}$$

Παρατηρήσεις

- Στη μνήμη ενός υπολογιστή είναι αδύνατο να παραστήσουμε αριθμούς με άπειρο πλήθος ψηφίων, γιατί το μέγεθος της μνήμης είναι πεπερασμένο. Αποθηκεύεται μια κατάλληλη προσέγγιση του αριθμού, η οποία εξαρτάται από το πρόβλημα που λύνουμε.

- Όπως το ακέραιο μέρος γράφεται σαν άθροισμα δυνάμεων του *10* (στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης), έτσι και το δεκαδικό μέρος γράφεται σαν άθροισμα αρνητικών δυνάμεων του *10*.

Παράδειγμα 2.15

$$5902.35_{10} = 5 \cdot 10^{3} + 9 \cdot 10^{2} + 0 \cdot 10^{1} + 2 \cdot 10^{0} + 3 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$$

- Στο δυαδικό σύστημα αντίστοιχα θα έχουμε :

$$1110.101_{2} = 1 \cdot 2^{3} + 1 \cdot 2^{2} + 1 \cdot 2^{1} + 0 \cdot 2^{0} + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3}$$

- Κάθε πραγματικός αριθμός μπορεί να παρασταθεί μόνο με δεκαδικό μέρος (ακέραιο μέρος = 0), αφού πολλαπλασιαστεί με κατάλληλη δύναμη της βάσης του αντίστοιχου αριθμητικού συστήματος.

Παράδειγμα 2.16

$$5902.35_{10} = 0.590235 \cdot 10^{4}$$

$$1110.101_{2} = 0.1110101 \cdot 2^{4}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.9 **:** Σε ένα αριθμητικό σύστημα, με βάση *β*, ορίζουμε τον αριθμό *x* σαν ***Αριθμό Κινητής Υποδιαστολής (floating point)*** μήκους *n* ως εξής :

$$x = \pm(0.d_{1}d_{2}...d_{n}) \cdot \beta^{\varepsilon}, \ d_{1} \neq 0$$

όπου **:**

β = η βάση του αριθμητικού συστήματος
$0.d_1d_2...d_n$ = το κλασματικό μέρος, γνωστό και σαν ***mantissa*,** με $d_1 \neq 0$
$d_1, d_2, ..., d_n$ = ψηφία του συστήματος
ε = ο εκθέτης

Παρατηρήσεις

- Τα $d_1, d_2, ..., d_n$ καλούνται ***σημαντικά ψηφία*** του αριθμού.

- Για Απλή Ακρίβεια $n = 23$, ενώ για Διπλή Ακρίβεια $n = 52$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.10* : *Σημαντικά Ψηφία (σ.ψ) ενός δεκαδικού αριθμού ονομάζονται όλα τα ψηφία του αριθμού, εκτός από τυχόν μηδενικά που υπάρχουν στην αρχή του αριθμού.

Παράδειγμα 2.17

Ο αριθμός *320.7* έχει *4* σημαντικά ψηφία
Ο αριθμός *4.60* έχει *3* σημαντικά ψηφία
Ο αριθμός *0.0058* έχει *2* σημαντικά ψηφία

Παρατηρήσεις

- Τα σημαντικά ψηφία παίζουν σημαντικό ρόλο στην εσωτερική παράσταση του αριθμού στον Η/Υ.

- Αν με m συμβολίσουμε το κλασματικό μέρος, τότε ο x γράφεται σαν $x = \pm m \cdot \beta^{\varepsilon}$

- Συνήθως οι αριθμητικοί υπολογισμοί γίνονται σε αριθμητική κινητής υποδιαστολής.

- Για το δεκαδικό μέρος m ισχύει $\frac{1}{\beta} \leq m < 1$, αφού το πρώτο ψηφίο είναι πάντα 1.

Παράδειγμα 2.18

Στο Δεκαδικό σύστημα ($\beta = 10$) : $0.1_{10} = \frac{1}{10} \leq m \leq 0.9999999 < 1$.

Στο Δυαδικό σύστημα ($\beta = 2$) :

$$0.1_2 = 0.5_{10} = \frac{1}{2} \leq m \leq 0.111111111_2 = 0.9999999_{10} < 1.$$

Παρατήρηση

- Σε έναν Η/Υ με *k bits* για τη *mantissa* γίνεται στρογγυλοποίηση ή αποκοπή σε *k* δυαδικά ψηφία : $0.d_1 d_2 ... d_n \Rightarrow 0.d_1 d_2 ... d_k$ ως εξής :

Αποκοπή : *Αποκόπτονται* τα ψηφία $d_{k+1}, d_{k+2}, ..., d_n$, *αποθηκεύονται* τα ψηφία $d_1, d_2, ..., d_k$.

Στρογγυλοποίηση : *Προστίθεται* στον αριθμό το $2^{-(k+1)}$ και απ' τον νέο αριθμό *αποκόπτονται* τα ψηφία $d_{k+1}, d_{k+2}, ..., d_n$ και *αποθηκεύονται* τα ψηφία $d_1, d_2, ..., d_k$.

Παράδειγμα 2.19

- Αν $m = 0.6_{10} = 0.1001100110011001100110011 0011..._2$ και $k = 7$, τότε

Αποκοπή :

$$m^* = 0.1001100_2 = 2^{-1} + 2^{-4} + 2^{-5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{16+2+1}{32} = \frac{19}{32} = 0.59375_{10}$$

Στρογγυλοποίηση :

$$m = m + 2^{-8} : \quad \begin{array}{r} 0.10011001100110011001100110011..._2 \\ +\,0.00000001000000000000000000..._2 \\ \hline 0.10011010100110011001101011 0011..._2 \end{array}$$

Αποκοπή σε $k = 7$ ψηφία :

$$m^* = 0.1001101_2 = 2^{-1} + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} = \frac{64+8+4+1}{128} = \frac{77}{128} = 0.6015625_{10}$$

Παράδειγμα 2.20

- Να βρεθεί το απόλυτο και το απόλυτο σχετικό σφάλμα του Παραδείγματος 2.19.

<u>Απάντηση</u>

Αν $m = 0.6_{10} = 0.10011001100110011001100110011..._2$ και $k = 7$, τότε

Αποκοπή : $|\varepsilon| = |m^* - m| = |0.59375 - 0.6| = |-0.00625| = 0.00625$

$$|\varepsilon_\sigma| = \frac{|\varepsilon|}{|m|} = \frac{0.00625}{0.6} = 0.0104166666$$

Στρογγυλοποίηση : $|\varepsilon| = |m^* - m| = |0.6015625 - 0.6| = |0.0015625| = 0.0015625$

$$|\varepsilon_\sigma| = \frac{|\varepsilon|}{|m|} = \frac{0.0015625}{0.6} = 0.00260416666$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.11 : Κατά τη στρογγυλοποίηση ενός δυαδικού αριθμού x σε k δυαδικά ψηφία, για το απόλυτο σφάλμα στρογγυλοποίησης $|\varepsilon|$ ισχύει :

$$|\varepsilon| = |x^* - x| \leq \frac{1}{2} \cdot 2^{-k} = 2^{-1-k}$$

Παράδειγμα 2.21

- Να βρεθεί το απόλυτο και το μέγιστο απόλυτο σφάλμα στρογγυλοποίησης του αριθμού $x = 0.1011$ σε $k = 2$ δ. ψ.

Απάντηση

$$x^* = x + 2^{-3} = \begin{array}{r} 0.1011 \\ +\underline{0.001} \end{array}$$

$$= 0.1101 = 0.11$$

$$|\varepsilon| = |x^* - x| = |0.11 - 0.1011| = |0.0001| = 2^{-4} \leq 2^{-3} = 2^{-1-2} = 2^{-1-k}.$$

Παράδειγμα 2.22

- Να βρεθεί το απόλυτο και το μέγιστο απόλυτο σφάλμα στρογγυλοποίησης του αριθμού $x = 0.101$ σε $k = 2$ δ. ψ.

Απάντηση

$$x^* = x + 2^{-3} = \begin{array}{r} 0.101 \\ +\underline{0.001} \end{array}$$

$$= 0.110 = 0.11$$

$$|\varepsilon| = |x^* - x| = |0.11 - 0.101| = |0.001| = 2^{-3} = 2^{-1-2} = 2^{-1-k}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.12 : Κατά τη στρογγυλοποίηση (με αποκοπή) ενός δυαδικού αριθμού x σε k δυαδικά ψηφία, για το απόλυτο σφάλμα αποκοπής $|\varepsilon|$ ισχύει πάντοτε:

$$|\varepsilon| = |x^* - x| \leq 2^{-k}$$

Παράδειγμα 2.23

- Να βρεθεί το απόλυτο και το μέγιστο απόλυτο σφάλμα αποκοπής του αριθμού $x = 0.101$ σε $k = 2$ δ. ψ.

Απάντηση

$|\varepsilon| = |x^* - x| = |0.10 - 0.101| = |0.001| = 2^{-3} \leq 2^{-2} = 2^{-k}$.

Παράδειγμα 2.24

- Να βρεθεί το απόλυτο και το μέγιστο απόλυτο σφάλμα αποκοπής του αριθμού $x = 0.101111111...1$ σε $k = 2$ δ. ψ.

Απάντηση

$|\varepsilon| = |x^* - x| = |0.10 - 0.101111...1| = |0.001111...1| \approx 2^{-2} = 2^{-k}$.

Παρατήρηση

- Για έναν Η/Υ που διαθέτει *5* χαρακτήρες (bytes) για την παράσταση των πραγματικών αριθμών, από τους οποίους τον *1* χαρακτήρα για τον εκθέτη και τους υπόλοιπους *4* χαρακτήρες για το δεκαδικό μέρος, αν το πρώτο ψηφίο διατίθεται για το πρόσημο του αριθμού, τότε ο εκθέτης *e* ανήκει στο διάστημα $[-2^{8-1},\ 2^{8-1} - 1] = [-128, 127]$, οπότε ο υπολογιστής μπορεί να αποθηκεύσει αριθμούς που βρίσκονται στο διάστημα $[-2^{-128},\ 2^{127}]$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1 : *Το μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα της στρογγυλοποίησης ενός πραγματικού αριθμού στο δεκαδικό σύστημα σε k σημαντικά ψηφία είναι* $\frac{1}{2} \cdot 10^{1-k}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ :

Αν $x = m \cdot 10^e$ η ακριβής τιμή του αριθμού και $x^* = m^* \cdot 10^e$ η τιμή που αποθηκεύεται, τότε, αφού η *mantissa* στρογγυλοποιείται σε *k* σ.ψ. θα είναι : $|m^* - m| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}$.

Επίσης, $\frac{1}{10} \leq m < 1 \Rightarrow \frac{1}{m} \leq 10$

οπότε :

$$|\varepsilon_\sigma| = \frac{|\varepsilon|}{|x|} = \frac{|x^* - x|}{|x|} = \frac{|m^* \cdot 10^e - m \cdot 10^e|}{|m \cdot 10^e|} = \frac{|m^* - m| \cdot 10^e}{|m| \cdot 10^e} = \frac{|m^* - m|}{|m|} \leq 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-k} = \frac{1}{2} \cdot 10^{1-k}$$

Παράδειγμα 2.25

- Αφού στρογγυλοποιηθεί ο αριθμός $x = 5902.35_{10} = m \cdot 10^4 = 0.590235 \cdot 10^4$ σε $k = 5$ σ.ψ., να βρεθεί το απόλυτο σχετικό σφάλμα και το μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα.

Απάντηση

$$x^* = (5902.35_{10})^* = (0.590235 \cdot 10^4)^* = m^* \cdot 10^4 = 0.59024 \cdot 10^4 = 5902.4_{10}$$

$$|\varepsilon| = |x^* - x| = |5902.4 - 5902.35| = |0.05| = 0.05$$

$$|\varepsilon_\sigma| = \frac{|\varepsilon|}{|x|} = \frac{0.05}{5902.35} = 0.00000847$$

$$max|\varepsilon_\sigma| = \frac{1}{2} \cdot 10^{1-k} = \frac{1}{2} \cdot 10^{1-5} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} = 0.00005$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.13 : Όταν ένας αριθμός δίνεται στρογγυλεμένος σε k σημαντικά ψηφία, για το απόλυτο σχετικό σφάλμα στρογγυλοποίησης θα ισχύει :

$$|\varepsilon_\sigma| = \left|\frac{\varepsilon}{x}\right| = \left|\frac{x^* - x}{x}\right| \le \frac{1}{2} \cdot 10^{1-k} = 5 \cdot 10^{-k}$$

Παράδειγμα 2.26

- Όταν ο αριθμός $x^* = 2.0$, δίνεται στρογγυλεμένος σε 2 σ.ψ. (1 δ.ψ) να βρεθούν φράγματα για το Απόλυτο Σφάλμα και το Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα του αριθμού x .

Απάντηση

Απόλυτο Σφάλμα : $|\varepsilon| \le \frac{1}{2} \cdot 10^{-1} = 0.05$

Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα : $|\varepsilon_\sigma| \le \frac{1}{2} \cdot 10^{1-2} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-1} = 0.05$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.14 : Οι αριθμοί x, x^* συμφωνούν σε k σημαντικά ψηφία, αν ισχύει :

$$|\varepsilon_\sigma| = \left|\frac{\varepsilon}{x}\right| = \left|\frac{x^* - x}{x}\right| \le \frac{1}{2} \cdot 10^{1-k}$$

Παράδειγμα 2.27

- Οι αριθμοί $x = 35.12478$ και $x^* = 35.12452$, συμφωνούν σε 5 σ.ψ.

Απάντηση

Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα :

$$|\varepsilon_\sigma| = \left|\frac{\varepsilon}{x}\right| = \left|\frac{35.12452 - 35.12478}{35.12478}\right| = \left|\frac{-0.00026}{35.12478}\right| = 0.0000074 \le 0.00005 = \frac{1}{2}\cdot 10^{1-5}$$

***ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2** : Το μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα της στρογγυλοποίησης ενός αριθμού στο δυαδικό σύστημα σε k σημαντικά ψηφία είναι 2^{-k}.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ :

Αν $x = m \cdot 2^e$ η ακριβής τιμή του αριθμού και $x^* = m^* \cdot 2^e$ η τιμή που αποθηκεύεται, τότε, αφού η *mantissa* στρογγυλοποιείται σε k σ.ψ. θα είναι : $|m^* - m| \le \frac{1}{2}\cdot 2^{-k} = 2^{-1-k}$.

Επίσης, $\frac{1}{2} \le m < 1 \Rightarrow \frac{1}{m} \le 2$

οπότε :

$$|\varepsilon_\sigma| = \frac{|\varepsilon|}{|x|} = \frac{|x^* - x|}{|x|} = \frac{|m^*\cdot 2^e - m\cdot 2^e|}{|m\cdot 2^e|} = \frac{|m^* - m|\cdot 2^e}{|m|\cdot 2^e} = \frac{|m^* - m|}{|m|} \le 2\cdot 2^{-1-k} = 2^{-k}$$

Παράδειγμα 2.28

- Αφού στρογγυλοποιηθεί ο αριθμός $x = 1110.101_2 = 14.625_{10} = m\cdot 2^4 = 0.1110101\cdot 2^4$ σε $k = 6$ σ.ψ., να βρεθεί το απόλυτο σχετικό σφάλμα και το μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα.

Απάντηση

$$x^* = (1110.101_2)^* = (0.1110101\cdot 2^4)^* = m^*\cdot 2^4 = 0.111011\cdot 2^4 =$$
$$= 1110.11_2 = 14.75_{10}$$
$$|\varepsilon| = |x^* - x| = |1110.11 - 1110.101| = |0.001_2| = 0.125_{10}$$
$$|\varepsilon_\sigma| = \frac{|\varepsilon|}{|x|} = \frac{0.125}{14.625} = 0.008547$$
$$max|\varepsilon_\sigma| = 2^{-k} = 2^{-6} = 0.015625_{10}$$

***ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3** : Το μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα της στρογγυλοποίησης (με αποκοπή) ενός πραγματικού αριθμού στο δεκαδικό σύστημα σε k σημαντικά ψηφία είναι 10^{1-k}.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ :

Αν $x = m \cdot 10^e$ η ακριβής τιμή του αριθμού και $x^* = m^* \cdot 10^e$ η τιμή που αποθηκεύεται, τότε, αφού η *mantissa* στρογγυλοποιείται σε *k* σ.ψ. θα ισχύει : $\left| m^* - m \right| \le 10^{-k}$.

Επίσης, $\frac{1}{10} \le m < 1 \Rightarrow \frac{1}{m} \le 10$

οπότε :

$$\left| \varepsilon_\sigma \right| = \frac{|\varepsilon|}{|x|} = \frac{\left| x^* - x \right|}{|x|} = \frac{\left| m^* \cdot 10^e - m \cdot 10^e \right|}{\left| m \cdot 10^e \right|} = \frac{\left| m^* - m \right| \cdot 10^e}{|m| \cdot 10^e} = \frac{\left| m^* - m \right|}{|m|} \le 10 \cdot 10^{-k} = 10^{1-k}$$

Παράδειγμα 2.29

- Αφού στρογγυλοποιηθεί (με αποκοπή) ο αριθμός $x = 5902.35_{10} = m \cdot 10^4 = 0.590235 \cdot 10^4$ σε $k = 5$ σ.ψ., να βρεθεί το απόλυτο σχετικό σφάλμα και το μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα του.

<u>Απάντηση</u>

$$x^* = (5902.35_{10})^* = (0.590235 \cdot 10^4)^* = m^* \cdot 10^4 = 0.59023 \cdot 10^4 = 5902.3_{10}$$
$$|\varepsilon| = \left| x^* - x \right| = |5902.3 - 5902.35| = |0.05| = 0.05$$
$$\left| \varepsilon_\sigma \right| = \frac{|\varepsilon|}{|x|} = \frac{0.05}{5902.35} = 0.00000847$$
$$max\left| \varepsilon_\sigma \right| = 10^{1-k} = 10^{1-5} = 10^{-4} = 0.0001$$

***ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4** : Το μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα της στρογγυλοποίησης (με αποκοπή) ενός αριθμού στο δυαδικό σύστημα σε k σημαντικά ψηφία είναι 2^{1-k} .*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ :

Αν $x = m \cdot 2^e$ η ακριβής τιμή του αριθμού και $x^* = m^* \cdot 2^e$ η τιμή που αποθηκεύεται, τότε, αφού η *mantissa* στρογγυλοποιείται σε *k* σ.ψ. θα ισχύει : $\left| m^* - m \right| \le 2^{-k}$. Επίσης, $\frac{1}{2} \le m < 1 \Rightarrow \frac{1}{m} \le 2$, οπότε :

$$\left| \varepsilon_\sigma \right| = \frac{|\varepsilon|}{|x|} = \frac{\left| x^* - x \right|}{|x|} = \frac{\left| m^* \cdot 2^e - m \cdot 2^e \right|}{\left| m \cdot 2^e \right|} = \frac{\left| m^* - m \right| \cdot 2^e}{|m| \cdot 2^e} = \frac{\left| m^* - m \right|}{|m|} \le 2 \cdot 2^{-k} = 2^{1-k}$$

Παράδειγμα 2.30

- Αφού στρογγυλοποιηθεί (με αποκοπή) ο αριθμός $x = 1110.101_2 = m \cdot 2^4 = 0.1110101 \cdot 2^4 = 14.625_{10}$ σε $k = 6$ σ.ψ., να βρεθεί το απόλυτο σχετικό σφάλμα και το μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα του.

<u>Απάντηση</u>

$$x^* = (1110.101_2)^* = (0.1110101 \cdot 2^4)^* = m^* \cdot 2^4 = 0.111010 \cdot 2^4 =$$
$$= 1110.10_2 = 14.5_{10}$$
$$|\varepsilon| = |x^* - x| = |1110.10 - 1110.101| = |0.001_2| = 0.125_{10}$$
$$|\varepsilon_\sigma| = \frac{|\varepsilon|}{|x|} == \frac{0.125}{14.5} = 0.00862$$
$$max|\varepsilon_\sigma| = 2^{1-k} = 2^{1-6} = 2^{-5} = 0.03125_{10}$$

Παράδειγμα 2.31

- Να βρεθεί το μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα του Παραδείγματος 2.19.

<u>Απάντηση</u>

Αποκοπή : $max|\varepsilon_\sigma| = 2^{1-7} = 2^{-6} = \frac{1}{64} = 0.015625$

Στρογγυλοποίηση : $max|\varepsilon \;| = 2^{-7} = \frac{1}{128} = 0.0078125$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.14 **:** Το μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα των Θεωρημάτων 2.2 και 2.4 ονομάζεται ***αριθμός μηχανής*** και ορίζεται σαν

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 2^{-k} & \text{στη στρογγυλοποίηση} \\ 2^{1-k} & \text{στην αποκοπή} \end{cases}$$

και γενικά

$$\varepsilon_m = \begin{cases} \frac{1}{2}\beta^{1-k} & \text{στη στρογγυλοποίηση} \\ \beta^{1-k} & \text{στην αποκοπή} \end{cases}$$

Παρατήρηση

- Ο Αριθμός Μηχανής αντιπροσωπεύει το μέγιστο σχετικό σφάλμα στην προσέγγιση του αριθμού που αποθηκεύεται και κυμαίνεται μεταξύ του 10^{-6} και 10^{-15}.

Παράδειγμα 2.32

- Να βρεθεί ο Αριθμός Μηχανής σε έναν Η/Υ που διαθέτει $k = 23$ για Αριθμούς Απλής Ακρίβειας και $k = 52$ για Αριθμούς Διπλής Ακρίβειας.

Απάντηση

Στρογγυλοποίηση : $\varepsilon_m = 2^{-k} = 2^{-23} = 0.0000001192 \le 10^{-6}$, για Απλή Ακρίβεια

$\varepsilon_m = 2^{-k} = 2^{-52} \le 10^{-15}$ για Διπλή Ακρίβεια

Αποκοπή : $\varepsilon_m = 2^{1-k} = 2^{1-23} = 2^{-22} = 0.000000238 \le 10^{-6}$

$\varepsilon_m = 2^{1-k} = 2^{1-52} = 2^{-51} \le 10^{-15}$ για Διπλή Ακρίβεια

2.4 Απώλεια Σημαντικών Ψηφίων

Όπως στην αποθήκευση των αριθμών, έτσι και κατά την εκτέλεση των τεσσάρων πράξεων της αριθμητικής και ιδίως όταν εργαζόμαστε με Η/Υ, εργαζόμαστε με περιορισμένο αριθμό σημαντικών ψηφίων (π.χ. στην αποθήκευση ενός δυαδικού αριθμού η mantissa στρογγυλοποιείται σε 23 δυαδικά ψηφία), οπότε, αν οι αριθμοί που δίνονται διαφέρουν στον αριθμό των σημαντικών ψηφίων, κάποια σημαντικά ψηφία των μικρότερων αριθμών χάνονται, όπως φαίνεται στα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 2.33

- Αν $x = 1.25$ και $y = 0.125$ να βρεθεί το **απόλυτο σφάλμα** και το **απόλυτο σχετικό σφάλμα** του αθροίσματος $x + y$, όταν οι αριθμοί x, y δίνονται στρογγυλεμένοι σε 3 σ.ψ.

Απάντηση

$$\left|(x+y)^*\right| = \left|(1.25+0.125)^*\right| = \left|(1.375)^*\right| = |1.38| = 1.38$$

$$|x+y| = |1.25+0.125| = |1.375| = 1.375$$

$$|\varepsilon| = \left|(x+y)^* - (x+y)\right| = |1.38-1.375| = |0.005| = 0.005$$

$$\left|\varepsilon_{\sigma(x+y)}\right| = \left|\frac{\varepsilon_{x+y}}{x+y}\right| = \left|\frac{0.005}{1.375}\right| = |0.003636| = 0.003636$$

Παράδειγμα 2.34

- Αν $x = 1.25$ και $y = 0.125$ να βρεθεί το **απόλυτο σφάλμα** και το **απόλυτο σχετικό σφάλμα** της διαφοράς $x - y$, όταν οι αριθμοί x, y δίνονται στρογγυλεμένοι σε 3 σ.ψ. (σε 2 δ.ψ. ο αριθμός x και σε 3 δ.ψ. ο αριθμός y).

Απάντηση

$$\left|(x-y)^*\right| = \left|(1.25-0.125)^*\right| = \left|(1.125)^*\right| = \left|1.12\right| = 1.12$$
$$\left|x-y\right| = \left|1.25-0.125\right| = \left|1.125\right| = 1.125$$
$$\left|\varepsilon\right| = \left|(x-y)^* - (x-y)\right| = \left|1.12-1.125\right| = \left|0.005\right| = 0.005$$
$$\left|\varepsilon_{\sigma(x-y)}\right| = \left|\frac{\varepsilon_{x-y}}{x-y}\right| = \left|\frac{0.005}{1.125}\right| = \left|0.00444\right| = 0.00444$$

Παράδειγμα 2.35

- Αν $x = 1.25$ και $y = 0.125$ να βρεθεί το **απόλυτο σφάλμα** και το **απόλυτο σχετικό σφάλμα** του γινομένου $x \cdot y$, όταν οι αριθμοί x, y δίνονται στρογγυλεμένοι σε 3 σ.ψ. (σε 2 δ.ψ. ο αριθμός x και σε 3 δ.ψ. ο αριθμός y).

Απάντηση

$$\left|(x \cdot y)^*\right| = \left|(1.25 \cdot 0.125)^*\right| = \left|(15.625)^*\right| = \left|15.6\right| = 15.6$$
$$\left|x \cdot y\right| = \left|1.25 \cdot 0.125\right| = \left|15.625\right| = 15.625$$
$$\left|\varepsilon\right| = \left|(x \cdot y)^* - (x \cdot y)\right| = \left|15.6-15.625\right| = \left|0.025\right| = 0.025$$
$$\left|\varepsilon_{\sigma(x \cdot y)}\right| = \left|\frac{\varepsilon_{x \cdot y}}{x \cdot y}\right| = \left|\frac{0.025}{15.625}\right| = \left|0.0016\right| = 0.0016$$

Παράδειγμα 2.36

- Αν $x = 2.45$ και $y = 15.0$ να βρεθεί το **απόλυτο σφάλμα** και το **απόλυτο σχετικό σφάλμα** του πηλίκου x / y, όταν οι αριθμοί x, y δίνονται στρογγυλεμένοι σε 3 σ.ψ.

Απάντηση

$$\left|(x/y)^*\right| = \left|(2.45/15.0)^*\right| = \left|(0.163333)^*\right| = \left|0.163\right| = 0.163$$
$$\left|x/y\right| = \left|2.45/15.0\right| = \left|0.1633333\right| = 0.1633333333$$
$$\left|\varepsilon\right| = \left|(x/y)^* - (x/y)\right| = \left|0.163-0.163333\right| = \left|0.0003333\right| = 0.0003333$$
$$\left|\varepsilon_{\sigma(x/y)}\right| = \left|\frac{\varepsilon_{x/y}}{x/y}\right| = \left|\frac{0.00033333}{0.1633333}\right| = \left|0.0020406\right| = 0.0020406$$

Παρατήρηση

- Λόγω περιορισμένου αριθμού σημαντικών ψηφίων, σε πολλές περιπτώσεις καταστρατηγούνται και οι νόμοι της αριθμητικής, όπως η προσεταιριστική ιδιότητα στην πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό. Χαρακτηριστικά είναι τα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 2.37

- Αν οι αριθμοί $x = 1.24$, $y = 0.123$ και $z = 0.0123$ δίνονται στρογγυλεμένοι σε 3 σ.ψ. να δειχθεί ότι **δεν ισχύει** η **προσεταιριστική ιδιότητα** στην πρόσθεση, δηλαδή $(x+y)+z \neq x+(y+z)$ και να βρεθεί το **απόλυτο σφάλμα** του αθροίσματος $(x+y)+z$ και $x+(y+z)$.

Απάντηση

$$x+y+z = 1.24+0.123+0.0123 = 1.3753$$
$$((x+y)^*+z)^* = ((1.24+0.123)^*+0.0123)^* = ((1.363)^*+0.0123)^* =$$
$$= (1.36+0.0123)^* = (1.3723)^* = 1.37$$
$$(x+(y+z)^*)^* = (1.24+(0.123+0.0123)^*)^* = (1.24+(0.1353)^*)^* =$$
$$= (1.24+0.135)^* = (1.375)^* = 1.38$$

επομένως

$$((x+y)^*+z)^* = 1.38 \neq (x+(y+z)^*)^* = 1.37 \neq x+y+z = 1.3753$$

$$\left|\varepsilon_{(x+y)+z}\right| = \left|((x+y)^*+z)^* - ((x+y)+z)\right| = \left|1.37-1.3753\right| = \left|0.0053\right| = 0.0053$$
$$\left|\varepsilon_{x+(y+z)}\right| = \left|(x^*+(y+z)^*) - (x+(y+z)\right| = \left|1.38-1.3753\right| = \left|0.0047\right| = 0.0047$$

Παράδειγμα 2.38

- Αν οι αριθμοί $x = 0.4$, $y = 0.6$ και $z = 0.7$ δίνονται στρογγυλεμένοι σε 1 σ.ψ. να δειχθεί ότι **δεν ισχύει** η **προσεταιριστική ιδιότητα** στον πολλαπλασιασμό, δηλαδή $(x \cdot y) \cdot z \neq x \cdot (y \cdot z)$ και να βρεθεί το **απόλυτο σφάλμα** του γινομένου $(x \cdot y) \cdot z$ και $x \cdot (y \cdot z)$.

Απάντηση

$$((x \cdot y)^* \cdot z)^* = ((0.4 \cdot 0.6)^* \cdot 0.7)^* = ((0.24)^* \cdot 0.7)^* = (0.2 \cdot 0.7)^* =$$
$$= (0.14)^* = 0.1$$
$$(x \cdot (y \cdot z)^*)^* = (0.4 \cdot (0.6 \cdot 0.7)^*)^* = (0.4 \cdot (0.42)^*)^* = (0.4 \cdot 0.4)^* =$$
$$= (0.16)^* = 0.2$$

$$x \cdot (y \cdot z) = 0.4 \cdot (0.6 \cdot 0.7) = 0.4 \cdot 0.42 = 0.168$$

επομένως

$$((x\cdot y)^*\cdot z)^* = 0.1 \neq 0.2 = (x\cdot(y\cdot z)^*)^* \neq x\cdot(y\cdot z) = 0.168$$

$$\left|\varepsilon_{(x\cdot y)\cdot z}\right| = \left|((x\cdot y)^*\cdot z)^* - ((x\cdot y)\cdot z)\right| = \left|0.1-0.168\right| = \left|-0.068\right| = 0.068$$

$$\left|\varepsilon_{x\cdot(y\cdot z)}\right| = \left|((x\cdot(y\cdot z)^*)^* - ((x\cdot y)\cdot z)\right| = \left|0.2-0.168\right| = \left|0.032\right| = 0.032$$

2.5 Μετάδοση Σφαλμάτων στους Υπολογισμούς

Κατά την εκτέλεση των τεσσάρων πράξεων της αριθμητικής, όπου χρησιμοποιούνται αρχικά δεδομένα προερχόμενα από μετρήσεις, τα σφάλματα των πληροφοριών της εισόδου μεταδίδονται κατά τέτοιον τρόπο, ώστε οι πληροφορίες εξόδου να περιέχουν επίσης σφάλματα. Σχετικά με τη διάδοση των σφαλμάτων αποδεικνύουμε τα παρακάτω θεωρήματα :

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.5 : *Το μέγιστο απόλυτο σφάλμα του αθροίσματος ή της διαφοράς 2 ή περισσότερων αριθμών ισούται με το άθροισμα των απολύτων σφαλμάτων αυτών των αριθμών.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ :

Αν x, y είναι οι ακριβείς και x^*, y^* οι προσεγγιστικές τιμές 2 αριθμών, τότε το απόλυτο σφάλμα του αθροίσματος ή της διαφοράς $\left|\varepsilon_{x\pm y}\right|$ θα είναι :

$$\left|\varepsilon_{x\pm y}\right| = \left|(x^* \pm y^*) - (x \pm y)\right| = \left|(x^* - x) \pm (y^* - y)\right| = \left|\varepsilon_x \pm \varepsilon_y\right| \leq \left|\varepsilon_x\right| + \left|\varepsilon_y\right|$$

Παράδειγμα 2.39

- Αν $x^* = 1.25$ και $y^* = 0.125$ οι στρογγυλοποιημένες τιμές 2 αριθμών x, y, να βρεθεί το **μέγιστο απόλυτο σφάλμα** του αθροίσματος $x + y$, όταν οι αριθμοί x, y δίνονται στρογγυλεμένοι σε 2 δ.ψ. ο αριθμός x και σε 3 δ.ψ. ο αριθμός y.

<u>Απάντηση</u>

$$max\left|\varepsilon_{x+y}\right| = \left|\varepsilon_x\right| + \left|\varepsilon_y\right| \leq \frac{1}{2}\cdot 10^{-2} + \frac{1}{2}\cdot 10^{-3} = 0.005 + 0.0005 = 0.0055$$

Παράδειγμα 2.40

- Αν $x^* = 1.25$ και $y^* = 0.125$ οι στρογγυλοποιημένες τιμές 2 αριθμών x, y, να βρεθεί το **μέγιστο απόλυτο σφάλμα** της διαφοράς $x - y$, όταν οι αριθμοί x, y δίνονται στρογγυλεμένοι σε 2 δ.ψ. ο αριθμός x και σε 3 δ.ψ. ο αριθμός y .

Απάντηση

$$max\left|\varepsilon_{x-y}\right| = \left|\varepsilon_x\right| + \left|\varepsilon_y\right| \le \tfrac{1}{2}\cdot 10^{-2} + \tfrac{1}{2}\cdot 10^{-3} = 0.005 + 0.0005 = 0.0055$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.6 :	*Το μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα του αθροίσματος 2 ή περισσότερων αριθμών* ***που έχουν το ίδιο πρόσημο*** *ισούται με το μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα αυτών των αριθμών.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ :

Αν x, y είναι οι ακριβείς και x^*, y^* οι προσεγγιστικές τιμές 2 **θετικών** αριθμών, τότε :

$$\left|\varepsilon_{\sigma(x+y)}\right| = \frac{\left|(x^* + y^*) - (x+y)\right|}{|x+y|} = \frac{\left|(x\cdot(1+\varepsilon_{\sigma x}) + y\cdot(1+\varepsilon_{\sigma y})) - (x+y)\right|}{|x+y|} =$$

$$= \frac{\left|x + x\cdot\varepsilon_{\sigma x} + y + y\cdot\varepsilon_{\sigma y} - x - y\right|}{|x+y|} = \frac{\left|x\cdot\varepsilon_{\sigma x} + y\cdot\varepsilon_{\sigma y}\right|}{|x+y|}$$

Αν $\overline{\varepsilon_{\sigma(x,y)}} = max(\left|\varepsilon_{\sigma x}\right|, \left|\varepsilon_{\sigma y}\right|)$

τότε

$$\left|\varepsilon_{\sigma(x+y)}\right| = \frac{\left|x\varepsilon_{\sigma x} + y\varepsilon_{\sigma y}\right|}{|x+y|} \le \frac{|x|\cdot\left|\varepsilon_{\sigma x}\right| + |y|\cdot\left|\varepsilon_{\sigma y}\right|}{|x+y|} \le \frac{|x|\cdot\overline{\varepsilon_{\sigma(x,y)}} + |y|\cdot\overline{\varepsilon_{\sigma(x,y)}}}{|x+y|} = \frac{(|x| + |y|)\cdot\overline{\varepsilon_{\sigma(x,y)}}}{|x| + |y|} =$$

$$= \overline{\varepsilon_{\sigma(x,y)}} = max(\left|\varepsilon_{\sigma x}\right|, \left|\varepsilon_{\sigma y}\right|)$$

Παράδειγμα 2.41

- Αν $x^* = 1.25$ και $y^* = 0.125$ οι στρογγυλοποιημένες τιμές 2 αριθμών x, y, να βρεθεί το **μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα** και το **μέγιστο απόλυτο σφάλμα** του αθροίσματος $x + y$, όταν οι αριθμοί x, y δίνονται στρογγυλεμένοι σε 2 δ.ψ. ο αριθμός x και σε 3 δ.ψ. ο αριθμός y.

Απάντηση

$$\left|\varepsilon_{\sigma x}\right| \approx \frac{\left|\varepsilon_x\right|}{\left|x^*\right|} \le \frac{\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}}{1.35} = \frac{1}{270} = 0.0037037$$

$$\left|\varepsilon_{\sigma y}\right| \approx \frac{\left|\varepsilon_y\right|}{\left|y^*\right|} \le \frac{\frac{1}{2}\cdot 10^{-3}}{0.125} = \frac{1}{250} = 0.004$$

$$\left|\varepsilon_{\sigma(x+y)}\right| \approx \frac{\left|\varepsilon_{x+y}\right|}{\left|x^* + y^*\right|} \le \overline{\varepsilon_{\sigma(x,y)}} = max(\left|\varepsilon_{\sigma x}\right|, \left|\varepsilon_{\sigma y}\right|) = 0.004 \Rightarrow$$

$$\left|\varepsilon_{x+y}\right| \approx \left|\varepsilon_{\sigma(x+y)}\right|\cdot\left|x^* + y^*\right| \le \overline{\varepsilon_{\sigma(x,y)}}\cdot\left|x^* + y^*\right| = 0.004\cdot 1.375 = 0.0055$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.7 : *Το μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα της διαφοράς 2 ή περισσότερων αριθμών ισούται με το άθροισμα των απολύτων σφαλμάτων δια της διαφοράς αυτών των αριθμών.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ :

Απ' τον ορισμό του σχετικού σφάλματος και τη χρήση του Θεωρήματος 2.5 θα έχουμε :

$$\left|\varepsilon_{\sigma(x-y)}\right| \approx \frac{\left|\varepsilon_{x-y}\right|}{\left|x^* - y^*\right|} \le \frac{\left|\varepsilon_x\right| + \left|\varepsilon_y\right|}{\left|x^* - y^*\right|}$$

Παράδειγμα 2.42

- Αν $x^* = 1.25$ και $y^* = 0.125$ οι στρογγυλοποιημένες τιμές 2 αριθμών x, y, να βρεθεί το **μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα** και το **μέγιστο απόλυτο σφάλμα** της διαφοράς $x - y$, όταν οι αριθμοί x, y δίνονται στρογγυλεμένοι σε 2 δ.ψ. ο αριθμός x και σε 3 δ.ψ. ο αριθμός y .

<u>Απάντηση</u>

$$\left|\varepsilon_{\sigma x}\right| \approx \frac{\left|\varepsilon_x\right|}{\left|x^*\right|} \le \frac{\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}}{1.25} = \frac{1}{250} = 0.004$$

$$\left|\varepsilon_{\sigma y}\right| \approx \frac{\left|\varepsilon_y\right|}{\left|y^*\right|} \le \frac{\frac{1}{2}10^{-3}}{0.125} = \frac{1}{250} = 0.004$$

$$\left|\varepsilon_{\sigma(x-y)}\right| \le \frac{\left|\varepsilon_x\right| + \left|\varepsilon_y\right|}{\left|x^* - y^*\right|} \le \frac{\left|\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}\right| + \left|\frac{1}{2}\cdot 10^{-3}\right|}{\left|1.25 - 0.125\right|} = \frac{0.005 + 0.0005}{1.125} = \frac{0.0055}{1.125} = 0.0048888$$

$$\left|\varepsilon_{\sigma(x-y)}\right| \approx \frac{\left|\varepsilon_{x-y}\right|}{\left|x^* - y^*\right|} \Rightarrow \left|\varepsilon_{x-y}\right| \approx \left|\varepsilon_{\sigma(x-y)}\right| \cdot \left|x^* - y^*\right| \le 0.0048888 \cdot 1.125 = 0.0055$$

Παρατήρηση

- Όταν οι αριθμοί που αφαιρούνται δεν έχουν μεγάλη διαφορά, δεν υπάρχει μεγάλη ακρίβεια στην αφαίρεση.

Παράδειγμα 2.43

- Αν $x^* = 47.132$ και $y^* = 47.111$ να βρεθεί το **μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα** και το **μέγιστο απόλυτο σφάλμα** της διαφοράς $x^* - y^*$, όταν οι αριθμοί x, y δίνονται στρογγυλεμένοι σε 3 δ.ψ..

Απάντηση

$$\left|\varepsilon_{\sigma x}\right| \approx \frac{\left|\varepsilon_x\right|}{\left|x^*\right|} \le \frac{\frac{1}{2}\cdot 10^{-3}}{47.132} = 0.0000106$$

$$\left|\varepsilon_{\sigma y}\right| \approx \frac{\left|\varepsilon_y\right|}{\left|y^*\right|} \le \frac{\frac{1}{2}\cdot 10^{-3}}{47.111} = 0.0000106$$

$$\left|\varepsilon_{\sigma(x-y)}\right| \le \frac{\left|\varepsilon_x\right| + \left|\varepsilon_y\right|}{\left|x^* - y^*\right|} \le \frac{\left|\frac{1}{2}\cdot 10^{-3}\right| + \left|\frac{1}{2}\cdot 10^{-3}\right|}{\left|47.132 - 47.111\right|} = \frac{0.0005 + 0.0005}{0.021} = \frac{0.001}{0.021} = 0.047619$$

$$\left|\varepsilon_{x-y}\right| \approx \left|\varepsilon_{\sigma(x-y)}\right| \cdot \left|x^* - y^*\right| \le 0.047619 \cdot 0.021 = 0.001$$

δηλαδή το σχετικό σφάλμα της διαφοράς είναι 4492 φορές το απόλυτο σχετικό σφάλμα του κάθε αριθμού.

Στο ίδιο συμπέρασμα θα φτάναμε με τους παρακάτω υπολογισμούς :

$$x^* - y^* = 47.132 - 47.111 = 0.021$$

$\left|\varepsilon_{x-y}\right| \le \left|\varepsilon_x\right| + \left|\varepsilon_y\right| \le \left|\frac{1}{2}\cdot 10^{-3}\right| + \left|\frac{1}{2}\cdot 10^{-3}\right| = 0.0005 + 0.0005 = 0.001$, οπότε το τελευταίο ψηφίο της διαφοράς δεν είναι ακριβές (αφού το $x^* - y^* = 0.021$), ενώ το σχετικό σφάλμα θα είναι :

$$\left|\varepsilon_{\sigma(x-y)}\right| \approx \frac{\left|\varepsilon_{x-y}\right|}{\left|x^* - y^*\right|} \le \frac{0.001}{0.021} = 0.047619$$

> ***ΘΕΩΡΗΜΑ 2.8*** : *Το μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα του γινομένου 2 ή περισσότερων αριθμών ισούται με το άθροισμα των απολύτων σχετικών σφαλμάτων αυτών των αριθμών.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ :

Αν x, y είναι οι ακριβείς και x^*, y^* οι προσεγγιστικές τιμές 2 αριθμών, τότε :

$$\left|\varepsilon_{\sigma(x\cdot y)}\right| = \left|\frac{\varepsilon_{x\cdot y}}{x\cdot y}\right| = \left|\frac{(x^*\cdot y^*) - (x\cdot y)}{x\cdot y}\right| = \left|\frac{x\cdot(1+\varepsilon_{\sigma x})\cdot y\cdot(1+\varepsilon_{\sigma y}) - x\cdot y}{x\cdot y}\right| =$$

$$= \left|\frac{x\cdot y\cdot(1+\varepsilon_{\sigma x})\cdot(1+\varepsilon_{\sigma y}) - x\cdot y}{x\cdot y}\right| = \left|\frac{x\cdot y\cdot((1+\varepsilon_{\sigma x})\cdot(1+\varepsilon_{\sigma y}) - 1)}{x\cdot y}\right| =$$

$$= \left|1 + \varepsilon_{\sigma x} + \varepsilon_{\sigma y} + \varepsilon_{\sigma x}\cdot\varepsilon_{\sigma y} - 1\right| = \left|\varepsilon_{\sigma x} + \varepsilon_{\sigma y} + \varepsilon_{\sigma x}\cdot\varepsilon_{\sigma y}\right| \approx \left|\varepsilon_{\sigma x} + \varepsilon_{\sigma y}\right| \le \left|\varepsilon_{\sigma x}\right| + \left|\varepsilon_{\sigma y}\right|$$

Παράδειγμα 2.44

- Αν $x^* = 2.45$ και $y^* = 15.0$ οι στρογγυλοποιημένες τιμές 2 αριθμών x, y, να βρεθεί το **μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα** και το **μέγιστο απόλυτο σφάλμα** του γινομένου $x^* \cdot y^*$, όταν οι αριθμοί x, y δίνονται στρογγυλεμένοι σε 2 δ.ψ. ο αριθμός x και σε 1 δ.ψ. ο αριθμός y.

Απάντηση

$$x^* \cdot y^* = 2.45 \cdot 15.0 = 36.75$$

$$\left|\varepsilon_{\sigma x}\right| \approx \frac{\left|\varepsilon_x\right|}{\left|x^*\right|} \le \frac{\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}}{2.45} = \frac{1}{490} = 0.0020408$$

$$\left|\varepsilon_{\sigma y}\right| \approx \frac{\left|\varepsilon_y\right|}{\left|y^*\right|} \le \frac{\frac{1}{2} \cdot 10^{-1}}{15.0} = \frac{1}{300} = 0.0033333$$

$$\left|\varepsilon_{\sigma(x \cdot y)}\right| \approx \frac{\left|\varepsilon_{x \cdot y}\right|}{\left|x^* \cdot y^*\right|} \le \left|\varepsilon_{\sigma x}\right| + \left|\varepsilon_{\sigma y}\right| = 0.0020408 + 0.0033333 = 0.0053741 \Rightarrow$$

$$\left|\varepsilon_{(x \cdot y)}\right| \approx \left|\varepsilon_{\sigma(x \cdot y)}\right| \cdot \left|x^* \cdot y^*\right| \le (\left|\varepsilon_{\sigma x}\right| + \left|\varepsilon_{\sigma y}\right|) \cdot \left|x^* \cdot y^*\right| = 0.0053741 \cdot 36.75 = 0.1974981$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.9 : *Το μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα του πηλίκου 2 αριθμών ισούται με το άθροισμα των απολύτων σχετικών σφαλμάτων αυτών των αριθμών.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ :

Αν x, y είναι οι ακριβείς και x^*, y^* οι προσεγγιστικές τιμές 2 αριθμών, τότε :

$$\left|\varepsilon_{\sigma(x/y)}\right| = \frac{\left|\varepsilon_{x/y}\right|}{\left|\frac{x}{y}\right|} = \frac{\left|\frac{x^*}{y^*} - \frac{x}{y}\right|}{\left|\frac{x}{y}\right|} = \frac{\left|\frac{x \cdot (1+\varepsilon_{\sigma x})}{y \cdot (1+\varepsilon_{\sigma y})} - \frac{x}{y}\right|}{\left|\frac{x}{y}\right|} = \frac{\left|\frac{x}{y} \cdot \left(\frac{1+\varepsilon_{\sigma x}}{1+\varepsilon_{\sigma y}} - 1\right)\right|}{\left|\frac{x}{y}\right|} = \left|\left(\frac{1+\varepsilon_{\sigma x}}{1+\varepsilon_{\sigma y}} - 1\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{\varepsilon_{\sigma x} - \varepsilon_{\sigma y}}{1+\varepsilon_{\sigma y}}\right| \approx \left|\frac{\varepsilon_{\sigma x} - \varepsilon_{\sigma y}}{1}\right| \le \left|\varepsilon_{\sigma x}\right| + \left|\varepsilon_{\sigma y}\right|$$

αν θεωρήσουμε το $\varepsilon_{\sigma y}$ πολύ μικρό, ώστε να επηρεάζει τον παρονομαστή που είναι *1*.

Παράδειγμα 2.45

- Αν $x^* = 2.45$ και $y^* = 15.0$ οι στρογγυλοποιημένες τιμές 2 αριθμών x, y, να βρεθεί το **μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα** και το **μέγιστο απόλυτο σφάλμα** του πηλίκου x^* / y^*, όταν οι αριθμοί x, y δίνονται στρογγυλεμένοι σε 2 δ.ψ. ο αριθμός x και σε 1 δ.ψ. ο αριθμός y.

Απάντηση

$$x^* / y^* = 2.45 / 15.0 = 0.1633333$$

$$|\varepsilon_{\sigma x}| \approx \frac{|\varepsilon_x|}{|x^*|} \leq \frac{\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}}{2.45} = \frac{1}{490} = 0.0020408$$

$$|\varepsilon_{\sigma y}| \approx \frac{|\varepsilon_y|}{|y^*|} \leq \frac{\frac{1}{2}\cdot 10^{-1}}{15.0} = \frac{1}{300} = 0.0033333$$

$$|\varepsilon_{\sigma(x/y)}| \approx \frac{|\varepsilon_{x/y}|}{x^* / y^*} \leq |\varepsilon_{\sigma x}| + |\varepsilon_{\sigma y}| = 0.0020408 + 0.0033333 = 0.0053741 \Rightarrow$$

$$|\varepsilon_{(x/y)}| \approx |\varepsilon_{\sigma(x/y)}| \cdot |x^* / y^*| \leq (|\varepsilon_{\sigma x}| + |\varepsilon_{\sigma y}|) \cdot |x^* / y^*| = 0.0053741 \cdot 0.1633333 = 0.0008777 .$$

Άλυτες Ασκήσεις $2^{ου}$ Κεφαλαίου

1. Η ακριβής τιμή ενός αριθμού x είναι 274.3585, ενώ η προσεγγιστική του τιμή x^* είναι 273.9999. Να βρεθεί το Σφάλμα, το Απόλυτο Σφάλμα, το Σχετικό Σφάλμα, και το Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα του αριθμού x.

2. Αφού στρογγυλοποιηθεί ο αριθμός $x = 274.3585$ σε 3, 2 και 1 δ.ψ.. να βρεθεί το Απόλυτο Σφάλμα Στρογγυλοποίησης, και το Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα Στρογγυλοποίησης.

3. Να βρεθεί σε πόσα δ.ψ. και σε πόσα σ.ψ. συμφωνούν οι αριθμοί $x = 274.3585$ και $x^* = 273.9999$. Το ίδιο για τους αριθμούς $x = 274.0385$ και $x^* = 273.9999$.

4. Αφού στρογγυλοποιηθεί ο αριθμός $x = 274.3585$ σε 4 σ.ψ. (1 δ.ψ.)να βρεθεί το Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγυλοποίησης, και το Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγυλοποίησης.

5. Να βρεθεί σε πόσα σ.ψ. συμφωνούν οι αριθμοί $x = 274.3585$ και $x^* = 273.9999$. Το ίδιο για τους αριθμούς $x = 274.0385$ και $x^* = 273.9999$.

6. Αφού στρογγυλοποιηθεί **με Αποκοπή** ο αριθμός $x = 274.0385$ σε 3 δ.ψ. να βρεθεί το Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής, και το Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα Αποκοπής. Το ίδιο για τον αριθμό $x = 273.9999$.

7. Αφού στρογγυλοποιηθεί **με Στρογγυλοποίηση** ο αριθμός $x = 274.0385$ σε 3 δ.ψ. να βρεθεί το Απόλυτο Σφάλμα Στρογγυλοποίησης, και το Μέγιστο Απόλυτο Σφάλμα Στρογγυλοποίησης. Το ίδιο για τον αριθμό $x = 273.9999$.

8. Αφού μετατραπεί ο αριθμός $x = 0.6125_{10}$ στο δυαδικό σύστημα και στρογγυλοποιηθεί σε 7 σ.ψ. (με **Στρογγυλοποίηση**) να βρεθεί το Απόλυτο, το Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγυλοποίησης, το Μέγιστο Απόλυτο και το Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγυλοποίησης. Το ίδιο για τον αριθμό $x = 0.2_{10}$.

9. Αφού μετατραπεί ο αριθμός $x = 0.6125_{10}$ στο δυαδικό σύστημα και στρογγυλοποιηθεί σε 7 σ.ψ. (με **Αποκοπή**) να βρεθεί το Απόλυτο και το Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Αποκοπής, και το Μέγιστο Απόλυτο και το Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Αποκοπής. Το ίδιο για τον αριθμό $x = 0.2_{10}$.

10. Αφού στρογγυλοποιηθεί ο αριθμός $x = 1.0110_2$ σε 3 σ.ψ. (με **Στρογγυλοποίηση**) να βρεθεί το Απόλυτο και το Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγυλοποίησης, και το Μέγιστο Απόλυτο και το Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγυλοποίησης.

11. Αφού στρογγυλοποιηθεί ο αριθμός $x = 1.0110_2$ σε 3 σ.ψ. (με **Αποκοπή**) να βρεθεί το Απόλυτο και το Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Αποκοπής, και το Μέγιστο Απόλυτο και το Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Αποκοπής.

12. Αφού στρογγυλοποιηθεί ο αριθμός $x = 1.375_{10}$ σε 3 σ.ψ. (με **Στρογγυλοποίηση**) να βρεθεί το Απόλυτο και το Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγυλοποίησης, και το Μέγιστο Απόλυτο και το Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Στρογγυλοποίησης.

13. Αφού στρογγυλοποιηθεί ο αριθμός $x = 1.375_{10}$ σε 3 σ.ψ. (με **Αποκοπή**) να βρεθεί το Απόλυτο και το Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Αποκοπής, και το Μέγιστο Απόλυτο και το Μέγιστο Απόλυτο Σχετικό Σφάλμα Αποκοπής.

14. Αν οι αριθμοί $x = 1.66$, $y = 0.133$ δίνονται στρογγυλεμένοι σε 3 σημαντικά ψηφία, να βρεθεί το **απόλυτο σφάλμα** και το **απόλυτο σχετικό σφάλμα** του Αθροίσματος $x + y$, **λόγω απώλειας σημαντικών ψηφίων**.

15. Αν οι αριθμοί $x = 1.66$, $y = 0.133$ δίνονται στρογγυλεμένοι σε 3 σημαντικά ψηφία, να βρεθεί το **απόλυτο σφάλμα** και το **απόλυτο σχετικό σφάλμα** της Διαφοράς $x - y$, **λόγω απώλειας σημαντικών ψηφίων**.

16. Αν οι αριθμοί $x = 1.66$, $y = 0.133$ δίνονται στρογγυλεμένοι σε 3 σημαντικά ψηφία, να βρεθεί το **απόλυτο σφάλμα** και το **μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα** του Γινομένου $x \cdot y$, **λόγω απώλειας σημαντικών ψηφίων**.

17. Αν οι αριθμοί $x = 1.66$, $y = 0.133$ δίνονται στρογγυλεμένοι σε 3 σημαντικά ψηφία, να βρεθεί το **απόλυτο σφάλμα** και το **απόλυτο σχετικό σφάλμα** του Πηλίκου x / y, **λόγω απώλειας σημαντικών ψηφίων**.

18. Να αποδειχθεί ότι αν οι αριθμοί $x = 1.66$, $y = 0.166$, $z = 0.0166$ δίνονται στρογγυλεμένοι σε 3 σημαντικά ψηφία, δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα στην πρόσθεση, δηλαδή $(x + y) + z \neq x + (y + z)$ και να βρεθεί το **απόλυτο σφάλμα** του αθροίσματος $x + y + z$.

19. Να αποδειχθεί ότι αν οι αριθμοί $x = 0.4$, $y = 0.5$, $z = 0.7$ δίνονται στρογγυλεμένοι σε 1 σημαντικό ψηφίο, δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα στον Πολλαπλασιασμό, δηλαδή $(x \cdot y) \cdot z \neq x \cdot (y \cdot z)$ και να βρεθεί το **απόλυτο σφάλμα** του γινομένου $x \cdot y \cdot z$.

20. Αν οι αριθμοί $x^* = 2.5$, $y^* = 0.25$ δίνονται στρογγυλεμένοι σε ένα δεκαδικό ψηφίο ο αριθμός x και σε δύο δ.ψ. ο αριθμός y, να βρεθεί το **μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα** και το **μέγιστο απόλυτο σφάλμα** του Αθροίσματος $x^* + y^*$.

21. Αν οι αριθμοί $x^* = 2.5$, $y^* = 0.25$ δίνονται στρογγυλεμένοι σε ένα δεκαδικό ψηφίο ο αριθμός x και σε δύο δ.ψ. ο αριθμός y, να βρεθεί να βρεθεί το **μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα** και το **μέγιστο απόλυτο σφάλμα** της Διαφοράς $x^* - y^*$.

22. Αν οι αριθμοί $x^* = 2.5$, $y^* = 0.25$ δίνονται στρογγυλεμένοι σε ένα δεκαδικό ψηφίο ο αριθμός x και σε δύο δ.ψ. ο αριθμός y, να βρεθεί το **μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα** και το **μέγιστο απόλυτο σφάλμα** του Γινομένου $x^* \cdot y^*$.

23. Αν οι αριθμοί $x^* = 2.5$, $y^* = 0.25$ δίνονται στρογγυλεμένοι σε 1 δεκαδικό ψηφίο ο αριθμός x και σε 2 δ.ψ. ο αριθμός y, να βρεθεί το **μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα** και το **μέγιστο απόλυτο σφάλμα** του Πηλίκου x^* / y^*.

Σειρές - Συναρτήσεις

3

Αναλυτικές Συναρτήσεις
Εφαρμογές σε Αναπτύγματα Στοιχειωδών Συναρτήσεων
Υπολογισμός της Τιμής Πολυωνύμου - Σχήμα Horner
Υπολογισμός της Τιμής της Παραγώγου Πολυωνύμου
Υπολογισμός της Τιμής όλων των Παραγώγων Πολυωνύμου

3.1 Γενικά

Η εύρεση των τιμών μιας συνάρτησης απ' το Μαθηματικό της τύπο δημιουργεί ορισμένα προβλήματα ακρίβειας, γι' αυτό αναζητούμε χρήσιμες εκφράσεις για τις στοιχειώδεις Αναλυτικές Συναρτήσεις κατάλληλες για κάθε συγκεκριμένο τύπο συνάρτησης, ώστε οι εκτελούμενες πράξεις να έχουν το ελάχιστο δυνατό σφάλμα. Σαν χαρακτηριστικό παράδειγμα θα μπορούσαν να αναφερθούν τα αναπτύγματα των συναρτήσεων σε σειρές Taylor και MacLaurin.

3.2 Αναλυτικές Συναρτήσεις

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1 : Για μια πραγματική συνάρτηση *f(x)* ορισμένη σ' ένα διάστημα $(\alpha,\beta)\subseteq\Re$, $\exists x,\xi \in (\alpha,\beta)$:

$$f(x)=f(\xi)+\frac{f'(\xi)}{1!}\cdot(x-\xi)+\frac{f''(\xi)}{2!}\cdot(x-\xi)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\cdot(x-\xi)^n+\cdots$$

- Αν η συνάρτηση *f(x)* είναι πολυώνυμο *n* βαθμού, θα υπάρχουν οι παράγωγοι μέχρι *n* βαθμού, οπότε ο παραπάνω τύπος γίνεται **:**

$$f(x)=f(\xi)+\frac{f'(\xi)}{1!}\cdot(x-\xi)+\frac{f''(\xi)}{2!}\cdot(x-\xi)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\cdot(x-\xi)^n$$

- Αν στον παραπάνω τύπο τεθεί $x=\xi+\varepsilon \Rightarrow x-\xi=\varepsilon$**,** ο τύπος γίνεται **:**

$$f(x)=f(\xi+\varepsilon)=f(\xi)+\varepsilon\cdot f^{'}(\xi)+\frac{\varepsilon^2}{2!}\cdot f^{''}(\xi)+\cdots+\frac{\varepsilon^n}{n!}\cdot f^{(n)}(\xi)+\cdots$$

❖ Όταν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε τους ***n*** από τους άπειρους όρους του αναπτύγματος της σειράς Taylor που πιθανόν να υπάρχουν, ο παραπάνω τύπος γίνεται **:**

$$f(x)=f(\xi+\varepsilon)=f(\xi)+\varepsilon\cdot f^{'}(\xi)+\frac{\varepsilon^2}{2!}\cdot f^{''}(\xi)+\cdots+\frac{\varepsilon^n}{n!}\cdot f^{(n)}(\overline{\xi})$$

όπου $\overline{\xi}\in[min(x,\xi),max(x,\xi)]$

❖ Αν στον παραπάνω τύπο τεθεί $\xi=0$**,** βρίσκουμε το γνωστό τύπο του **MacLaurin :**

$$f(x)=f(0)+f^{'}(0)\cdot x+\frac{f^{''}(0)}{2!}\cdot x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n+\cdots$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.2 : Το πολυώνυμο $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}\cdot(x-\xi)^k$ ονομάζεται **πολυώνυμο του Taylor**

Παράδειγμα 3.1

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)^3$. Να αναπτυχθεί σε Σειρά Taylor στο σημείο $\xi=2$.

<u>Απάντηση</u>

Υπολογίζουμε τις παραγώγους μέχρι $3^{ης}$ τάξης, μιας και ο βαθμός του πολυωνύμου είναι 3 :

$$f(x)=(x-1)^3$$
$$f^{'}(x)=3\cdot(x-1)^2$$
$$f^{''}(x)=6\cdot(x-1)$$
$$f^{'''}(x)=6$$

οπότε

$$f(x)=f(2)+(x-2)\cdot f^{'}(2)+\frac{(x-2)^2}{2!}\cdot f^{''}(2)+\frac{(x-2)^3}{3!}\cdot f^{'''}(2)$$
$$=1+(x-2)\cdot 3+\frac{(x-2)^2}{2!}\cdot 6+\frac{(x-2)^3}{3!}\cdot 6=1+3(x-2)+3(x-2)^2+(x-2)^3$$

Παράδειγμα 3.2

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)^3$. Να αναπτυχθεί σε Σειρά **MacLaurin** στο σημείο $\xi=0$.

Απάντηση

Αντίστοιχα θα έχουμε

$$f(x) = f(0) + x \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2!} \cdot f''(0) + \frac{(x)^3}{3!} \cdot f'''(0)$$

$$= -1 + x \cdot 3 + \frac{x^2}{2!} \cdot (-6) + \frac{x^3}{3!} \cdot 6 = -1 + 3x - 3x^2 + x^3$$

3.2 Εφαρμογές σε Αναπτύγματα Στοιχειωδών Συναρτήσεων

Μπορούμε επίσης να εκφράσουμε στοιχειώδεις συναρτήσεις (λογαριθμικές, τριγωνομετρικές) προσεγγιστικά με τη βοήθεια πολυωνύμων ή να τις αναπτύξουμε σε ακέραιες σειρές κατά Taylor. Περιοριζόμαστε εδώ σε σειρές των οποίων οι συντελεστές μπορούν να εκφραστούν με απλές μαθηματικές σχέσεις.

3.2.1 Ανάπτυγμα σε Σειρά MacLaurin της συνάρτησης $\frac{1}{1-x}, 0 < x < 1$

- Για τη συνάρτηση αυτή ως γνωστόν ισχύει :

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1!}{(1-x)^2} \qquad f'(0) = 1!$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \frac{2!}{(1-x)^3} \qquad f''(0) = 2!$$

$$f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4} = \frac{3!}{(1-x)^4} \qquad f'''(0) = 3!$$

και γενικά :

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \qquad f^{(n)}(0) = n!$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο του **Maclaurin** βρίσκουμε :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = f(0) + \frac{x \cdot f'(0)}{1!} + \frac{x^2 \cdot f''(0)}{2!} + \cdots + \frac{x^n \cdot f^{(n)}(0)}{n!} + \ldots =$$

$$= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$$

3.2.2 Ανάπτυγμα σε Σειρά MacLaurin της εκθετικής συνάρτησης e^x

- Για τη συνάρτηση αυτή ως γνωστόν ισχύει :

$$f(x) = e^x = f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = \cdots$$

και

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = \cdots = 1$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο του **Maclaurin** βρίσκουμε :

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}$$

Παρατήρηση

- Για τον προσεγγιστικό υπολογισμό του e^x και για μικρά x χρησιμοποιούμε τον παρακάτω αλγόριθμο, ο οποίος είναι κατάλληλος για Ηλεκτρονικό Υπολογιστή :

Αλγόριθμος Υπολογισμού του e^x

<u>Αρχή</u>

$ex = 1$
$oldoros = 0$
$oros = 1$
$i = 1$

<u>Για Όσο</u> $|oldoros - oros| > 10^{-6}$

{
  $oldoros = oros$
  $oros = oros \cdot \dfrac{x}{i}$
  $ex = ex + oros$
  $i = i + 1$
}

<u>Τέλος</u>

3.2.3 Σφάλμα Αποκοπής (Διόρθωση) στον Υπολογισμό Σειρών

Οι Σειρές – αναπτύγματα Maclaurin περιέχουν άπειρο πλήθος όρων τους οποίους είναι αδύνατο να τους αθροίσουμε όλους. Έτσι, προσθέτουμε ένα ορισμένο πλήθος πρώτων όρων, αγνοώντας τους υπόλοιπους. Το σφάλμα αυτό ονομάζεται **Σφάλμα Αποκοπής** και συμβολίζεται με $\varepsilon_n(x)$, ενώ η **Διόρθωση** (το αντίθετο του **Σφάλματος Αποκοπής**) με $r_n(x)$.

3.2.4 *Διόρθωση στον Υπολογισμό της συνάρτησης* $\frac{1}{1-x}, 0 < x < 1$

- **Αν** $s = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$ και $s^* = \sum_{i=0}^{n} x^i$ η ακριβής και η προσεγγιστική έκφραση της Σειράς $\frac{1}{1-x}, 0 < x < 1$, η **Διόρθωση** $r_n(x)$ θα είναι :

$$r_n(x) = s - s^* = \sum_{i=0}^{\infty} x^i - \sum_{i=0}^{n} x^i = \sum_{i=n+1}^{\infty} x^i = x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots =$$

$$= x^{n+1} \cdot \left(1 + x + x^2 + \ldots\right) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Παράδειγμα 3.3

- Να χρησιμοποιηθούν οι $n = 5$ πρώτοι όροι του αναπτύγματος για τον υπολογισμό της Σειράς $\frac{1}{1-x}$, $x = \frac{1}{2}$ και να βρεθεί η **Διόρθωση** $r_n(x) = r_5(x) = s - s^*$.

<u>Απάντηση</u>

Η ακριβής τιμή s η προσεγγιστική s^* και η διόρθωση $r_5(x)$ θα είναι αντίστοιχα :

$$s = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$s^* = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{32+16+8+4+2+1}{32} = \frac{63}{32} = 1.96875$$

$$r_n(x) = r_5(x) = s - s^* = 2 - 1.96875 = 0.03125$$

❖ Στο ίδιο αποτέλεσμα φτάνουμε με τη χρήση της αναλυτικής έκφρασης που βρέθηκε στο 3.2.4 :

$$r_n(x) = r_5(x) = \frac{x^{5+1}}{1-x} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{5+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} = 0.03125$$

3.2.5 *Διόρθωση στον Υπολογισμό της εκθετικής συνάρτησης* $e^x,\ 0 < x < 1$

- **Αν** $s = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ η ακριβής και $s^* = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$ η προσεγγιστική έκφραση της Σειράς $e^x,\ 0 < x < 1$, η **Διόρθωση** $r_n(x)$ θα είναι :

$$r_n(x) = s - s^* = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} - \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{x^{n+3}}{(n+3)!} + \ldots =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left(1 + \frac{x}{n+2} + \frac{x^2}{(n+2)\cdot(n+3)} + \ldots \right) <$$

$$< \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left(1 + \frac{x}{n+2} + \left(\frac{x}{n+2} \right)^2 + \ldots \right) < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{x}{n+2}} \right)$$

$$= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{n+2}{n+2-x} \right)$$

*** Ισχύει όμως :

$$n \cdot (n+2) = n^2 + 2 \cdot n < n^2 + 2 \cdot n + 1 = (n+1)^2 \Rightarrow \frac{n+2}{n+1} < \frac{n+1}{n}$$

Επίσης

$$0 < x < 1 \Rightarrow -x > -1 \Rightarrow n + 2 - x > n + 2 - 1 = n + 1 \Rightarrow \frac{1}{n+2-x} < \frac{1}{n+1}$$

και

$$\frac{n+2}{n+2-x} < \frac{n+2}{n+1}$$

οπότε το **ανώτατο φράγμα** για τη **Διόρθωση** γίνεται :

$$r_n(x) < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{n+2}{n+2-x} \right) < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1} < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{x^{n+1}}{n \cdot (n)!} .$$

Παράδειγμα 3.4

- Να χρησιμοποιηθούν οι $n = 5$ πρώτοι όροι του αναπτύγματος για τον υπολογισμό της Σειράς $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!},\ x = \frac{1}{2}$ και να βρεθεί η **Διόρθωση** και το **ανώτατο φράγμα** για τη **Διόρθωση** $r_n(x) = r_5(x) = s - s^*$.

Απάντηση

Η ακριβής τιμή s η προσεγγιστική $s*$ και η διόρθωση $r_5(x)$ θα είναι αντίστοιχα :

$$s = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^i}{i!} = \sqrt{e} = 1.64872127$$

$$s^* = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{6} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{24} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{120} =$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} + \frac{1}{3840} = \frac{3840 + 1920 + 480 + 80 + 10 + 1}{3840} =$$
$$= \frac{6331}{3840} = 1.6486979$$

$$r_n(x) = r_5(x) = s - s^* = 1.64872127 - 1.64869790 = 0.00002337$$

- Το ανώτατο φράγμα για τη Διόρθωση με τη χρήση της αναλυτικής έκφρασης που βρέθηκε στο 3.2.5 θα είναι :

$$r_n(x) = r_5(x) < \frac{x^{n+1}}{n \cdot n!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{5+1}}{5 \cdot 5!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6}{5 \cdot 120} = \frac{1}{38400} = 0.000026$$

3.3 Εύρεση Τιμής Πολυώνυμου - Σχήμα Horner

- Δίνεται το πολυώνυμο :

$$P(x) = p_0 \cdot x^n + p_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} \cdot x + p_n$$

βαθμού n ως προς x, με $p_i \in \Re,\ i = 0,1,2,\ldots,n$ και $\xi \in \Re$ και ζητείται η τιμή του πολυώνυμου $P(\xi) = p_0 \cdot \xi^n + p_1 \cdot \xi^{n-1} + \ldots + p_{n-1} \cdot \xi + p_n$, για $x = \xi$. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι να βρούμε την τιμή $P(\xi)$: Ο πιο απλός και πολυδάπανος τρόπος είναι να υπολογίσουμε αναλυτικά τον καθένα από τους παραπάνω όρους και να τους αθροίσουμε. Π.χ. για τον υπολογισμό του μεγιστοβάθμιου όρου $p_0 \cdot \xi^n$ πολλαπλασιάζουμε το συντελεστή p_0 επί τον αριθμό ξ, το γινόμενο $p_0 \cdot \xi$ επί τον αριθμό ξ, το νέο γινόμενο $p_0 \cdot \xi^2$ ξανά επί ξ κ.ο.κ. μέχρι να βρούμε τον όρο $p_0 \cdot \xi^n$. Έτσι, για την εύρεση του πρώτου όρου εκτελούμε συνολικά n πολλαπλασιασμούς. Για την εύρεση της τιμής του δεύτερου όρου $p_1 \cdot \xi^{n-1}$ πολλαπλασιάζουμε τον συντελεστή p_1 επί ξ, το γινόμενο $p_1 \cdot \xi$ ξανά επί ξ κ.ο.κ. μέχρι να βρούμε τον όρο $p_1 \cdot \xi^{n-1}$. Κάνουμε έτσι για την εύρεση του δεύτερου όρου $p_1 \cdot \xi^{n-1}$, $n-1$ πολλαπλασιασμούς. Με τον ίδιο τρόπο συνεχίζουμε και βρίσκουμε όλους τους όρους μέχρι και τον προτελευταίο $p_{n-1} \cdot \xi$, που για να τον βρούμε κάνουμε έναν πολλαπλασιασμό. Για την εύρεση όλων των παραπάνω όρων του αθροίσματος θα χρειαστούν $n+(n-1)+(n-2)+...+2+1=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ πολλαπλασιασμοί και για την εύρεση του αθροίσματος $P(\xi)=p_0\cdot\xi^n+p_1\cdot\xi^{n-1}+...+p_{n-1}\cdot\xi+p_n$ θα χρειαστούν n προσθέσεις.

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να παρασταθεί με τον παρακάτω αλγόριθμο :

Αλγόριθμος 1 – Υπολογισμός Τιμής Πολυωνύμου

Αρχή
Θέσε $sum = p_n$
Για $i = 1..n$
{
    Θέσε $oros = p_{n-i}$
    Για $j = 1..i$
        Υπολόγισε $oros = oros\cdot\xi$
    Υπολόγισε $sum = sum + oros$
}
Τέλος

Ένας δεύτερος και πιο σύντομος τρόπος για την εύρεση της τιμής $P(\xi)$ είναι αρχίζοντας από τον τελευταίο προς τον πρώτο όρο, να σχηματίζουμε τη δύναμη του κάθε όρου από τη δύναμη του προηγούμενου όρου. Πολλαπλασιάζοντας το ξ επί τον συντελεστή p_{n-1} βρίσκουμε το $p_{n-1}\cdot\xi$ κάνοντας έναν πολλαπλασιασμό. Πολλαπλασιάζοντας το ξ επί το ξ βρίσκουμε το ξ^2, το οποίο πολλαπλασιάζουμε επί τον συντελεστή p_{n-2} βρίσκοντας το $p_{n-2}\cdot\xi^2$ κάνοντας δύο πολλαπλασιασμούς. Συνεχίζουμε πολλαπλασιάζοντας το ξ^2 επί το ξ βρίσκοντας το ξ^3, το οποίο πολλαπλασιάζουμε επί τον συντελεστή p_{n-3} κάνοντας δύο πολλαπλασιασμούς κ.λ.π., μέχρι που τελικά πολλαπλασιάζουμε το ξ^{n-1} επί το ξ βρίσκοντας το ξ^n, το οποίο πολλαπλασιάζουμε επί τον συντελεστή p_0 κάνοντας άλλους δύο πολλαπλασιασμούς. Έτσι για την εύρεση των όρων του αθροίσματος $P(\xi)$ κάνουμε συνολικά $2\cdot n-1$ πολλαπλασιασμούς και n προσθαφαιρέσεις για την εύρεση του αθροίσματος $P(\xi)$. Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να παρασταθεί με τον παρακάτω αλγόριθμο :

Αλγόριθμος 2 – Υπολογισμός Τιμής Πολυωνύμου

Αρχή
Θέσε $sum = p_n$
Θέσε $dynamh\_ksi = 1$
Για $i = 1..n$
{
    Υπολόγισε $dynamh\_ksi = dynamh\_ksi\cdot\xi$
    Υπολόγισε $oros = p_{n-i}\cdot dynamh\_ksi$
    Υπολόγισε $sum = sum + oros$
}
Τέλος

Συγκρίνοντας τους δυο τρόπους που περιγράψαμε από την άποψη του πλήθους πράξεων, που απαιτούνται για την εύρεση της τιμής $P(\xi)$ βλέπουμε ότι και στις δυο περιπτώσεις χρειάζεται το ίδιο πλήθος προσθαφαιρέσεων n, ενώ για το πλήθος των πολλαπλασιασμών που απαιτούνται σχηματίζουμε τη διαφορά :

$$\frac{n(n+1)}{2}-(2n-1)=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

Η έκφραση του δεύτερου μέλους δείχνει ότι εκτός από τις περιπτώσεις $n=1$ και 2, οπότε η διαφορά είναι μηδέν, για κάθε άλλη τιμή του $n \geq 3$ η διαφορά είναι θετική και επομένως το πλήθος των πολλαπλασιασμών, άρα και το πλήθος των πράξεων, στη δεύτερη περίπτωση είναι μικρότερο.

Ένας ταχύτερος από τους δυο προηγούμενους τρόπος για την εύρεση της τιμής του $P(\xi)$ είναι ο εξής : Γράφουμε το $P(\xi)=p_0\cdot\xi^n+p_1\cdot\xi^{n-1}+\ldots+p_{n-1}\cdot\xi+p_n$ με τη μορφή $P(\xi)=\left(\left(\left(\left(p_0\cdot\xi+p_1\right)\cdot\xi+p_2\right)\cdot\xi+\ldots+p_{n-1}\right)\cdot\xi+p_n\right)$, οπότε, βρίσκουμε το συντελεστή q_1 κάνοντας έναν πολλαπλασιασμό του $q_0(=p_0)$ επί το ξ και μια προσθαφαίρεση των όρων p_1 και $q_0\cdot\xi$, βρίσκουμε το συντελεστή q_2 κάνοντας πάλι έναν πολλαπλασιασμό και μια προσθαφαίρεση κ.ο.κ. και τέλος βρίσκουμε το συντελεστή $q_n(=P(\xi))$ κάνοντας έναν ακόμη πολλαπλασιασμό και μια προσθαφαίρεση. Με τον τρόπο αυτό βρίσκουμε την τιμή $P(\xi)$ κάνοντας συνολικά n πολλαπλασιασμούς και n προσθαφαιρέσεις. Όπως παρατηρούμε ο αριθμός των προσθαφαιρέσεων είναι ο ίδιος, ενώ ο αριθμός των πολλαπλασιασμών είναι, εκτός από την περίπτωση $n=1$, μικρότερος από την προηγούμενη περίπτωση. Αυτό βέβαια φαίνεται από την διαφορά :

$2n-1-n=n-1$ που για $n \geq 2$ είναι πάντοτε θετική.

Η μέθοδος αυτή, εκτός από το ότι πλεονεκτεί από τις δυο προηγούμενες από την άποψη του πλήθους των απαιτούμενων πράξεων, έχει και το πλεονέκτημα να βρίσκει τις τιμές των παραγώγων του πολυωνύμου. Στηρίζεται στην παρατήρηση ότι η τιμή $P(\xi)$ είναι το υπόλοιπο της διαιρέσεως του πολυωνύμου $P(x)$ δια του μονωνύμου $(x-\xi)$. Από τη γνωστή ταυτότητα της διαιρέσεως των πολυώνυμων διά του μονωνύμου $(x-\xi)$ έχουμε :

$$P(x)=(x-\xi)\cdot Q(x)+r_0 \qquad 3.1$$

όπου :

$Q(x)$ = το πηλίκο

r_0 = το υπόλοιπο

Είναι φανερό ότι το υπόλοιπο της διαιρέσεως αυτής είναι σταθερός αριθμός και βρίσκεται αμέσως, αν θέσουμε στον τύπο 3.1 $x=\xi$:

$$P(\xi)=(\xi-\xi)\cdot Q(\xi)+r_0=r_0$$

Εάν $Q(x)$ είναι το ζητούμενο πηλίκο, τότε θα είναι βαθμού $n-1$:

$$Q(x)=q_0\cdot x^{n-1}+q_1\cdot x^{n-2}+\ldots+q_{n-2}\cdot x+q_{n-1}$$

οπότε, από την (3.1) θα έχουμε :

$$P(x) = (q_0 \cdot x^{n-1} + q_1 \cdot x^{n-2} + \dots + q_{n-2} \cdot x + q_{n-1}) \cdot (x - \xi) + r_0$$

ή

$$\begin{aligned} P(x) &= p_0 \cdot x^n + p_1 \cdot x^{n-1} + \dots + p_{n-1} \cdot x + p_n \\ &\equiv q_0 \cdot x^n + (q_1 - q_0 \cdot \xi) \cdot x^{n-2} + \dots + (q_{n-1} - q_{n-2} \cdot \xi) \cdot x + r_0 - \xi \cdot q_{n-1} \end{aligned}$$

και εξισώνοντας τους αντίστοιχους συντελεστές έχουμε :

$$\begin{aligned} p_0 &= q_0 \\ p_1 &= q_1 - q_0 \cdot \xi \\ p_2 &= q_2 - q_1 \cdot \xi \\ &\dots \\ p_{n-1} &= q_{n-1} - q_{n-2} \cdot \xi \\ p_n &= r_0 - q_{n-1} \cdot \xi \end{aligned}$$

οπότε, οι συντελεστές $q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$ και το r_0 δίνονται απ' τις σχέσεις :

$$\begin{aligned} q_0 &= p_0 \\ q_1 &= p_1 + q_0 \cdot \xi \\ q_2 &= p_2 + q_1 \cdot \xi \\ &\dots \\ q_{n-1} &= p_{n-1} + q_{n-2} \cdot \xi \\ r_0 &= p_n + q_{n-1} \cdot \xi \end{aligned}$$

Οι παραπάνω τύποι του Υπολογισμού των συντελεστών του Πηλίκου και του Υπολοίπου μπορούν να γραφούν σε μορφή Αλγορίθμου :

Αλγόριθμος Σχήματος Horner

Αρχή
Υπολόγισε $q_0 = p_0$
Για $i = 1..n-1$
    Υπολόγισε $q_i = p_i + q_{i-1} \cdot \xi$
Υπολόγισε $r_0 = P(\xi) = p_n + q_{n-1} \cdot \xi$
Τέλος

- Με τη χρήση των παραπάνω τύπων δημιουργούμε το παρακάτω σχήμα, το οποίο μας επιτρέπει τον άμεσο υπολογισμό των συντελεστών του πηλίκου και του υπολοίπου, το οποίο είναι γνωστό ως Σχήμα Horner :

Σχήμα Horner

	p_0	p_1	…	p_n
ξ		$q_0 \cdot \xi$	…	$q_{n-1} \cdot \xi$
	q_0	q_1	…	$q_n = r_0 = P(\xi)$

Παράδειγμα 3.5

- Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3 \cdot x^4 - 2 \cdot x^3 - x^2 + x - 1$. Να υπολογιστεί το $P(2)$.

<u>Απάντηση</u>

Κατασκευάζουμε το σχήμα Horner για το $P(x)$:

	3	-2	-1	1	-1
2		6	8	14	30
	3	4	7	15	$29 = P(2)$

από το οποίο βρίσκουμε:

$$Q(x) = 3 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 + 7 \cdot x + 15$$

$$r_0 = P(2) = 29$$

- Όταν το ξ είναι ρίζα του Πολυωνύμου $P(x)$, τότε $r_0 = P(\xi) = 0$, όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα :

Παράδειγμα 3.6

- Δίνεται το πολυώνυμο :

  $P(x) = 3 \cdot x^4 - 2 \cdot x^3 - x^2 + x - 1$

  Να υπολογιστούν το πηλίκο και το υπόλοιπο ($P(1)$) της διαιρέσεώς του δια του μονωνύμου $x - 1$.

<u>Απάντηση</u>

Κατασκευάζουμε το σχήμα Horner για το $P(x)$:

	3	-2	-1	1	-1
1		3	1	0	1
	3	1	0	1	$0 = P(1)$

από το οποίο βρίσκουμε:

$Q(x) = 3 \cdot x^3 + x^2 + 1$

$r_0 = P(1) = 0$

3.3.1 Υπολογισμός Τιμής Παραγώγου Πολυωνύμου σε Κάποιο Σημείο

Αν παραγωγίσουμε τη σχέση (3.1) θα έχουμε :

$$P'(x) = (x-\xi)' \cdot Q(x) + (x-\xi) \cdot Q'(x) + r_0' = Q(x) + (x-\xi) \cdot Q'(x)$$

και

$$P'(\xi) = Q(\xi) + (\xi - \xi) \cdot Q'(\xi) = Q(\xi)$$

δηλαδή, η Τιμή της Παραγώγου του Πολυωνύμου $P(x)$ στο $x = \xi$ ισούται με την Τιμή του Πολυωνύμου $Q(x)$ στο $x = \xi$, η οποία μπορεί να υπολογισθεί με το σχήμα του Horner :

$$Q(x) = (x-\xi) \cdot C(x) + r_1$$

όπου $C(x) = c_0 \cdot x^{n-2} + c_1 \cdot x^{n-3} + \ldots + c_{n-3} \cdot x + c_{n-2}$

	q_0	q_1	…	q_{n-1}
ξ		$c_0 \cdot \xi$	…	$c_{n-2} \cdot \xi$
	c_0	c_1	…	$c_{n-1} = r_1 = Q(\xi) = P'(\xi)$

Παράδειγμα 3.7

- Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3 \cdot x^4 - 2 \cdot x^3 - x^2 + x - 1$. Να βρεθεί με το Σχήμα του Horner η τιμή της παραγώγου του στο σημείο $\xi = 1$.

<u>Απάντηση</u>

Εφαρμόζουμε 2 φορές το Σχήμα του Horner για το *P(x)* και *Q(x)*, οπότε έχουμε :

	3	-2	-1	1	-1
1		3	1	0	1
	3	1	0	1	$0 = P(1)$
1		3	4	4	
	3	4	4	$5 = P'(1)$	

3.3.2 Υπολογισμός των Τιμών Όλων των Παραγώγων Πολυωνύμου σε Κάποιο Σημείο

Για την εύρεση των τιμών όλων των παραγώγων του πολυωνύμου $P(x) = p_0 \cdot x^n + p_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} \cdot x + p_n \quad (p_0 \neq 0)$ στο σημείο $x = \xi$ εργαζόμαστε ως εξής. Καταρχήν από το θεώρημα του Taylor έχουμε :

$$P(x) = P(\xi) + \frac{(x-\xi)}{1!} \cdot P^{'}(\xi) + \frac{(x-\xi)^2}{2!} \cdot P^{''}(\xi) + \ldots + \frac{(x-\xi)^n}{n!} \cdot P^{(n)}(\xi) \qquad (3.2)$$

Εφαρμόζοντας τώρα διαδοχικά την ταυτότητα της διαιρέσεως του $P(x)$ δια του $(x-\xi)$ και στη συνέχεια των διαδοχικών πηλίκων δια $(x-\xi)$ θα έχουμε :

$$P(x) \equiv (x-\xi) \cdot Q_1(x) + r_0$$
$$Q_1(x) \equiv (x-\xi) \cdot Q_2(x) + r_1$$
$$Q_2(x) \equiv (x-\xi) \cdot Q_3(x) + r_2$$

.

.

.

$$Q_{n-1}(x) \equiv (x-\xi) \cdot Q_n(x) + r_{n-1}$$
$$Q_n(x) \equiv (x-\xi) \cdot 0 + r_n$$

Από τις παραπάνω σχέσεις με διαδοχικές αντικαταστάσεις έχουμε :

$$\begin{aligned} &P(x) \equiv (x-\xi) \cdot Q_1(x) + r_0 \equiv (x-\xi) \cdot ((x-\xi) \cdot Q_2(x) + r_1) + r_0 \equiv \\ &(x-\xi)^2 \cdot Q_2(x) + (x-\xi) \cdot r_1 + r_0 \equiv \ldots \equiv \\ &\equiv (x-\xi)^n \cdot r_n + (x-\xi)^{n-1} \cdot r_{n-1} + \ldots + (x-\xi) \cdot r_1 + r_0 \end{aligned} \qquad (3.3)$$

Εξισώνοντας τώρα τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του $(x-\xi)$ στα δυο αναπτύγματα των δεξιών μελών των σχέσεων (3.2) και (3.3) θα έχουμε :

$$r_0 = P(\xi)$$
$$r_1 = P^{'}(\xi) / 1!$$
$$r_2 = P^{''}(\xi) / 2!$$

...

$$r_n = P^{(n)}(\xi) / n!$$

Οπότε γενικά ισχύει :

$$P^{(k)}(\xi) = k!\, r_k \mid k = 0(1)n$$

Από τις παραπάνω σχέσεις και από το γεγονός ότι οι συντελεστές $r_k \mid k = 0(1)n$ είναι τα υπόλοιπα των διαιρέσεων των πολυωνύμων $Q_k(x) \mid k = 0(1)n$ δια του μονωνύμου $(x - \xi)$, δηλαδή οι τιμές $Q_k(\xi) \mid k = 0(1)n$, συμπεραίνεται ότι με επανειλημμένες εφαρμογές του σχήματος του Horner είναι δυνατό να βρούμε τόσο την τιμή του πολυωνύμου όσο και των παραγώγων του στο σημείο $x = \xi$.

Παράδειγμα 3.8

- Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3 \cdot x^4 - 2 \cdot x^3 - x^2 + x - 1$. Να βρεθεί με το Σχήμα του Horner η τιμή **όλων** των παραγώγων του στο σημείο $\xi = 1$.

Απάντηση

Εφαρμόζουμε όσες φορές χρειάζεται το Σχήμα του Horner για τα *P(x)* και $Q_k(x) \mid k = 0(1)n$, έχουμε :

	3	-2	-1	1	-1
1		3	1	0	1
	3	1	0	1	$0 = r_0$
1		3	4	4	
	3	4	4	$5 = r_1$	
1		3	7		
	3	7	$11 = r_2$		
1		3			
	3	$10 = r_3$			
1					
	$3 = r_4$				

Εφαρμόζοντας τον τύπο $p^{(k)}(x_0) = k!\, r_k$ για $k = 0(1)4$ βρίσκουμε

$$P(1) = 0! \cdot r_0 = 1 \cdot 0 = 0$$
$$P'(1) = 1! \cdot r_1 = 1 \cdot 5 = 5$$
$$P''(1) = 2! \cdot r_2 = 2 \cdot 11 = 22$$
$$P'''(1) = 3! \cdot r_3 = 6 \cdot 10 = 60$$
$$P^{iv}(1) = 4! \cdot r_4 = 24 \cdot 3 = 72$$

Παράδειγμα 3.9

- Δίνεται το πολυώνυμο $p(x) \equiv 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 5$. Με επανειλημμένες εφαρμογές του σχήματος του Horner να γραφτεί με τη μορφή $P(x) \equiv \alpha + \beta \cdot (x - 2) + \gamma \cdot (x - 2)^2$.

<u>Απάντηση</u>

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Tailor με $\xi = 2$, το πολυώνυμο που δόθηκε μπορεί να γραφτεί ως εξής :

$$P(x) \equiv 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 5 \equiv P(2) + \frac{(x-2)}{1!} \cdot P'(2) + \frac{(x-2)^2}{2!} \cdot P''(2)$$

Όμως ισχύει

$$P^{(k)}(\xi) = k! \cdot r_k \mid k = 0(1)2$$

οπότε θα έχουμε τελικά :

$$P(x) \equiv r_0 + r_1 \cdot (x-2) + r_2 \cdot (x-2)^2 .$$

επομένως

$\alpha = r_0 , \beta = r_1$ και $\gamma = r_2$.

Εφαρμόζουμε όσες φορές χρειάζεται το Σχήμα του Horner για τα $P(x)$ και $Q_k(x) \mid k = 0(1)n$, έχουμε :

	3	-4	5
2		6	4
	3	2	$9 = r_0$
2		6	
	3	$8 = r_1$	
	$3 = r_2$		

οπότε το πολυώνυμο που δόθηκε μπορεί να γραφτεί ως εξής :

$$P(x) \equiv 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 5 \equiv r_0 + r_1 \cdot (x-2) + r_2 \cdot (x-2)^2 = 9 + 8 \cdot (x-2) + 3 \cdot (x-2)^2$$

ενώ η τιμή του Πολυωνύμου και των παραγώγων του στο σημείο $\xi = 2$ θα είναι :

$$P(2) = 0! \cdot r_0 = 1 \cdot 9 = 9$$
$$P'(2) = 1! \cdot r_1 = 1 \cdot 8 = 8$$
$$P''(2) = 2! \cdot r_2 = 2 \cdot 3 = 6$$

Άλυτες Ασκήσεις 3ου Κεφαλαίου

1. Να χρησιμοποιηθούν οι $n = 5$ πρώτοι όροι του αναπτύγματος για τον υπολογισμό της Σειράς $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!},\ x = \frac{1}{4}$ και να βρεθεί τη **Διόρθωση** και το **ανώτατο φράγμα** για τη **Διόρθωση** $r_n(x) = r_5(x) = s - s^*$.

2. Να αναπτυχθεί η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1+x}$ σε σειρά MacLaurin.

3. Να χρησιμοποιηθούν οι $n = 5$ πρώτοι όροι του αναπτύγματος για τον υπολογισμό της Σειράς $f(x) = \frac{1}{1+x},\ x = \frac{1}{2}$ και να βρεθεί τη **Διόρθωση** και το **ανώτατο φράγμα** για τη **Διόρθωση** $r_n(x) = r_5(x) = s - s^*$.

4. Να αναπτυχθεί η συνάρτηση $f(x) = sin(x)$ σε σειρά MacLaurin.

5. Να χρησιμοποιηθούν οι $n = 5$ πρώτοι όροι του αναπτύγματος για τον υπολογισμό της Σειράς $f(x) = sin(x), x = \pi/4$ και να βρεθεί η **Διόρθωση** και το **ανώτατο φράγμα** για τη **Διόρθωση** $r_n(x) = r_5(x) = s - s^*$.

6. Δίνεται το Πολυώνυμο $p(x) = x^3 - 1$. Να βρεθεί με το Σχήμα του Horner η τιμή του στο σημείο $\xi = 1$.

7. Δίνεται το Πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 1$. Να βρεθεί με το Σχήμα του Horner η τιμή της παραγώγου στο σημείο $\xi = 1$.

8. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 1$. Να βρεθεί με το Σχήμα του Horner η τιμή των παραγώγων του στο σημείο $\xi = 3$.

9. Δίνεται το πολυώνυμο $p(x) \equiv 2 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 2$. Με επανειλημμένες εφαρμογές του σχήματος του Horner και μόνο να γραφτεί με τη μορφή $P(x) \equiv \alpha + \beta \cdot (x - 1) + \gamma \cdot (x - 1)^2$.

4 Αριθμητική Επίλυση Εξισώσεων

Προσδιορισμός Διαστημάτων των Ριζών Εξίσωσης
Τάξη Σύγκλισης
Μέθοδος της Διχοτόμησης (Bolzano)
Μέθοδος της Εσφαλμένης Θέσης
Μέθοδος των Διαδοχικών Προσεγγίσεων
Μέθοδος Newton-Raphson
Μέθοδος της Χορδής
Άλλες Μέθοδοι

4.1 Προσδιορισμός Διαστημάτων των Ριζών Εξίσωσης

Είναι γνωστό απ' τα στοιχειώδη Μαθηματικά ότι **μόνο** Πολυωνυμικές Εξισώσεις μέχρι τετάρτου βαθμού μπορούν να επιλυθούν με μαθηματικούς τύπους. Για Πολυωνυμικές Εξισώσεις μεγαλύτερου βαθμού ή πολύπλοκες, (π.χ. η εξίσωση $f(x) = e^x + sin(x) = 0$), είναι αναγκαία η ανάπτυξη προσεγγιστικών μεθόδων για την επίλυσή τους. Η εξίσωση θα έχει γενικά τη μορφή :

$f(x) = 0, \quad x \in (a,b) \subseteq \Re$, $f(x)$ συνεχής και παραγωγίσιμη στο $I = [a,b] \subseteq \Re$

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1 : Ο πραγματικός αριθμός ξ θα ονομάζεται ***ρίζα*** της εξίσωσης $f(x) = 0$, εάν :

$$f(\xi) = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1: Αν η συνάρτηση $f(x)=0$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b] \subseteq \Re$ και ισχύει $f(a)\cdot f(b)<0$, τότε υπάρχει ***τουλάχιστον*** *μια πραγματική ρίζα ξ στο $I=(a,b) \subseteq \Re : f(\xi)=0$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2: Αν η συνάρτηση $f(x)=0$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b] \subseteq \Re$ και ισχύει $f(a)\cdot f(b)<0$, αν η παράγωγος $f'(x)$ διατηρεί το πρόσημο στο $[a,b]$, δηλαδή $f'(x)>0$ ή $f'(x)<0$, $\forall x \in [a,b]$, τότε υπάρχει μια ***μοναδική*** *πραγματική ρίζα ξ στο $I=(a,b) \subseteq \Re$: $f(\xi)=0$*

- Για τον προσδιορισμό των διαστημάτων των ριζών μιας εξίσωσης στο $I=(a,b)$ χρησιμοποιούμε τον παρακάτω αλγόριθμο :

Αλγόριθμος Προσδιορισμού των Διαστημάτων των Ριζών μιας Εξίσωσης

Αν $f(a)\cdot f(b)<0$ τότε

Υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα ή περισσότερες (περιττού πλήθους) στο $I=(a,b)$

Αν $f(a)\cdot f(b)>0$ τότε

Δεν υπάρχει ρίζα ή υπάρχουν αρτίου πλήθους ρίζες στο $I=(a,b)$

Παράδειγμα 4.1

- Δίνεται το Πολυώνυμο $P(x)=x^3-4\cdot x=0$. Να βρεθεί πόσες και ποιες ρίζες υπάρχουν στα διαστήματα $(-3,3),(-1,-3),(-1,3),(3,4)$.

<u>Απάντηση</u>

$P(-3)\cdot P(3)=-15\cdot 15<0$, υπάρχει περιττός αριθμός ριζών (3 ρίζες, $\xi_1=-2, \xi_2=0, \xi_3=2$)

$P(-1)\cdot P(-3)=3\cdot -15<0$, υπάρχει μία ρίζα ($\xi_1=-2$)

$P(-1)\cdot P(3)=3\cdot 15>0$, υπάρχει άρτιος αριθμός ριζών (2 ρίζες, $\xi_1=0, \xi_2=2$)

$P(3)\cdot P(4)=15\cdot 48>0$, δεν υπάρχει καμιά ρίζα

- Εάν είναι γνωστό ότι στο διάστημα $I=(a,b)$ περιέχονται όλες οι ρίζες μιας εξίσωσης, τότε η εύρεση του **διαστήματος της κάθε ρίζας** ακολουθεί τα παρακάτω βήματα :

Αλγόριθμος Προσδιορισμού του Διαστήματος της κάθε Ρίζας μιας Εξίσωσης

1) Διαιρούμε το διάστημα $I=(a,b)$ σε n ίσα μέρη ώστε η διαφορά $h=\dfrac{b-a}{n}$ να είναι ένας πολύ μικρός αριθμός και σε κάθε σημείο της υποδιαίρεσης βρίσκουμε το πρόσημο της $f(x)$.
2) Βρίσκουμε δύο διαδοχικές αλλαγές του προσήμου της $f(x)$ και έστω a_k, a_{k+1} τα σημεία στα οποία αντιστοιχεί η αλλαγή αυτή, τότε μεταξύ των σημείων αυτών υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της $f(x)=0$.
3) Βρίσκουμε τη ρίζα και επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2,3.

Παράδειγμα 4.2

- Δίνεται το Πολυώνυμο $P(x)=x^3-4\cdot x=0$. Να βρεθούν τα υπο-διαστήματα στα οποία υπάρχουν ρίζες, αν $(a,b)=(-5.5,5.5)$ και $n=11$.

<u>Απάντηση</u>

1) Βρίσκουμε το βήμα $h=\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{5.5-(-5.5)}{11}=1$
2) Διαιρούμε το διάστημα $I=(a,b)$ στα σημεία $-5.5,-4.5,-3.5,-2.5,-1.5,-0.5,0.5,1.5,2.5,3.5,4.5,5.5$.

3) Βρίσκουμε το πρόσημο των τιμών του Πολυωνύμου $P(x)$ σ' αυτά τα σημεία, όπως φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

x	-5.5	-4.5	-3.5	-2.5	-1.5	-0.5	0.5	1.5	2.5	4.5	4.5	5.5
$P(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$

4) Το Πολυώνυμο έχει τρεις πραγματικές ρίζες, στα διαστήματα $(-2.5,-1.5),(-0.5,0.5),(1.5,2.5)$.

Παράδειγμα 4.3

- Δίνεται το Πολυώνυμο $P(x)=x^3-4\cdot x=0$. Να ελεγχθεί αν η ρίζα που υπάρχει στο διάστημα $(-1,1)$ είναι μοναδική.

<u>Απάντηση</u>

$P(-1)\cdot P(1)=3\cdot(-3)<0$, άρα υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-1,1)$

$P'(x)=3\cdot x^2-4$,

$P'(-1)=3\cdot(-1)^2-4=-1<0$

$P'(1)=3\cdot(1)^2-4=-1<0$

$P'(0)=3\cdot(0)^2-4=-4<0$

Επομένως, ισχύει $P'(x) < 0, \ \forall x \in [-1,1]$, οπότε η ρίζα που υπάρχει στο διάστημα $(-1,1)$ είναι μοναδική.

Παράδειγμα 4.4

- Να προσδιοριστούν διαστήματα των ριζών της εξίσωσης :

$$f(x) = e^x + 3 \cdot x + 1 = 0$$

<u>Απάντηση</u>

Αν πάρουμε την παράγωγο της συνάρτησης βρίσκουμε ότι $f'(x) = e^x + 3 > 0 \ \forall x \in \Re$, πράγμα που σημαίνει ότι η συνάρτηση είναι μονίμως αύξουσα και επειδή $\underset{x \to -\infty}{f(x) \to -\infty}, \underset{x \to +\infty}{f(x) \to +\infty}$ η εξίσωση έχει μία μόνο ρίζα στο $\Re$.

Παρατήρηση

- Αν η εύρεση των ριζών της παραγώγου του πολυωνύμου είναι εύκολη, ο προηγούμενος αλγόριθμος τροποποιείται ως εξής :

Αλγόριθμος Προσδιορισμού του Διαστήματος της κάθε Ρίζας μιας Εξίσωσης

1. Βρίσκουμε τις $n-1$ ρίζες ($\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n-1}$) της παραγώγου του πολυωνύμου $P(x)$, βαθμού n με n πραγματικές ρίζες.

2. Διαιρούμε το διάστημα $I = (a,b)$ στα n υποδιαστήματα $(a, \xi_1], [\xi_1, \xi_2], ..., [\xi_{n-1}, b)$ και σε κάθε σημείο της υποδιαίρεσης βρίσκουμε το πρόσημο της $f(x)$.

3. Βρίσκουμε δύο διαδοχικές αλλαγές του προσήμου της $f(x)$ και έστω a_k, a_{k+1} τα σημεία στα οποία αντιστοιχεί η αλλαγή αυτή, τότε μεταξύ των σημείων αυτών υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της $f(x) = 0$.

4. Βρίσκουμε τη ρίζα και επαναλαμβάνουμε τα βήματα 3,4.

Παράδειγμα 4.5

- Δίνεται το Πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 4 \cdot x = 0$. Να βρεθούν τα υπο-διαστήματα στα οποία υπάρχουν ρίζες, αν $(a,b) = (-5.5, 5.5)$.

Απάντηση

1) Η παράγωγος του Πολυωνύμου $P(x)$ είναι :
$P'(x) = 3 \cdot x^2 - 4$

με ρίζες $\xi_1 = -\sqrt{\frac{4}{3}}$, $\xi_2 = \sqrt{\frac{4}{3}}$.

2) Διαιρούμε το διάστημα $(a,b) = (-5.5, 5.5)$ στα υπο-διαστήματα $\left(-5.5, -\sqrt{\frac{4}{3}}\right), \left(-\sqrt{\frac{4}{3}}, \sqrt{\frac{4}{3}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{4}{3}}, 5.5\right)$.

3) Βρίσκουμε το πρόσημο των τιμών του Πολυωνύμου $P(x)$ σ' αυτά τα σημεία, όπως φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

x	-5.5	$-\sqrt{\frac{4}{3}}$	$\sqrt{\frac{4}{3}}$	5.5
$P(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

4) Το Πολυώνυμο έχει τρεις πραγματικές ρίζες στα διαστήματα $\left(-5.5, -\sqrt{\frac{4}{3}}\right), \left(-\sqrt{\frac{4}{3}}, \sqrt{\frac{4}{3}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{4}{3}}, 5.5\right)$.

Παρατήρηση

❖ Για την εύρεση του διαστήματος (a,b), στο οποίο ανήκουν όλες οι πραγματικές ρίζες ενός πολυωνύμου, με τη βοήθεια του Σχήματος του Horner διατυπώνουμε τα παρακάτω Θεωρήματα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.3: Αν το Πολυώνυμο $P(x) = 0$, βαθμού n, έχει n πραγματικές ρίζες $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ και για τους συντελεστές του Πηλίκου $Q(x)$ του Σχήματος του Horner που προκύπτει απ' τη διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ δια του $x - b$, δηλαδή $P(x) = Q(x) \cdot (x - b) + q_n$, με $b > 0$ ισχύουν $q_1, q_2, ..., q_n \geq 0$ και $q_0 = p_0 > 0$, τότε $\forall \xi_i, i = 1,2,...,n$ ισχύει : $\xi_i \leq b$, $i = 1,2,...,n$, δηλαδή το b θα είναι το άνω φράγμα των ριζών $\xi_i, i = 1,2,...,n$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ :

Με την εφαρμογή του Σχήματος του Horner θα έχουμε :

$P(x) = Q(x) \cdot (x-b) + q_n = (q_0 \cdot x^{n-1} + q_1 \cdot x^{n-2} + \ldots + q_{n-1}) \cdot (x-b) + q_n > 0$
διότι, $\forall x > b$ θα ισχύει $q_0 \cdot x^{n-1} > 0$, $q_1 \cdot x^{n-2} \geq 0, \ldots, q_{n-1} \geq 0$, $(x-b) > 0$, $q_n \geq 0$, πράγμα που σημαίνει ότι καμιά τιμή μεγαλύτερη του b δεν θα είναι ρίζα του Πολυωνύμου $P(x)$, οπότε $\forall \xi_i, i = 1,2,\ldots,n$ θα ισχύει : $\xi_i \leq b,\ i = 1,2,\ldots,n$.

- ❖ Για την εύρεση του κάτω φράγματος των ριζών $\xi_i, i = 1,2,\ldots,n$, δημιουργούμε το Πολυώνυμο

$(-1)^n \cdot P(-x) = (-1)^n \cdot (p_0 \cdot (-x)^n + p_1 \cdot (-x)^{n-1} + \ldots + p_{n-1} \cdot (-x) + p_n) =$

$= p_0 \cdot x^n + (-1)^{2n-1} \cdot p_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot p_{n-1} \cdot x + (-1)^n \cdot p_n$

και κάνουμε εφαρμογή του Θεωρήματος *4.3* για $\alpha > 0$

οπότε $\forall \xi_i, i = 1,2,\ldots,n$ θα ισχύει : $-\xi_i \leq a,\ i = 1,2,\ldots,n$ ή $\xi_i \geq -a,\ i = 1,2,\ldots,n$ και οι ρίζες θα ανήκουν στο διάστημα $(-a,b)$.

Παράδειγμα 4.6

- Δίνεται το Πολυώνυμο $P(x) = x^2 - 2 \cdot x = 0$. Να βρεθεί διάστημα (a,b) που να περιέχει τις 2 πραγματικές ρίζες $\xi_1, \xi_2 = 0,2$ (άνω και κάτω φράγμα).

<u>Απάντηση</u>

Για $b = 1$, εφαρμόζουμε το Σχήμα Horner :

	1	*-2*	*0*
1		*1*	*-1*
	1=q₀	*-1=q₁*	*-1=q₂= P(1)*

Για τους συντελεστές q_1, q_2 ισχύει $q_1, q_2 < 0$, οπότε εφαρμόζουμε το Σχήμα Horner για $b = 3$:

	1	*-2*	*0*
3		*3*	*3*
	$1=q_0$	$1=q_1$	$3=q_2= P(3)$

Οι συντελεστές $q_1, q_2, \ldots, q_n \geq 0$ και $q_0 = p_0 > 0$, οπότε $\forall \xi_i, i = 1,2,\ldots,n$ ισχύει : $\xi_i \leq b = 3,\ i = 1,2,\ldots,n$.

Δημιουργούμε το Πολυώνυμο :

$$(-1)^2 \cdot P(-x) = (-1)^2 \cdot ((-x)^2 - 2 \cdot (-x)) = x^2 + 2 \cdot x = x \cdot (x+2)$$

με ρίζες $-\xi_1, -\xi_2 = 0, -2$ και κάνουμε εφαρμογή του Θεωρήματος *4.3* για $a = 1$:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 0 \\ 1 & & 1 & 3 \\ \hline & 1=q_0 & 3=q_1 & 3=q_2 = P(1) \end{array}$$

Οι συντελεστές $q_1, q_2, ..., q_n \geq 0$ και $q_0 = p_0 > 0$, οπότε $\forall \xi_i, i = 1,2,...,n$ ισχύει : $-\xi_i \leq 1 = a,\ i = 1,2,...,n$ ή $\xi_i \geq -1 = -\alpha,\ i = 1,2,...,n$ και οι ρίζες ανήκουν στο διάστημα $(-a,b) = (-1,3)$.

4.2 Τάξη Σύγκλισης

- Για τον ακριβή προσδιορισμό κάθε μιας από τις ρίζες αυτές θα χρησιμοποιήσουμε κάποια από τις παρακάτω περιγραφόμενες μεθόδους επίλυσης εξισώσεων. Για την ταχύτητα σύγκλισης της κάθε μεθόδου, δίνεται ο παρακάτω ορισμός :

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.2 : Αν $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ είναι μια ακολουθία τιμών που συγκλίνει στη ρίζα ξ της εξίσωσης $f(x) = 0$ και $\varepsilon_n = x_n - \xi$, υπάρχουν p και $C \neq 0$:

$$\lim_{n \to -\infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^p} = C$$

όπου : p = Τάξη Σύγκλισης
C = Σταθερά Σφάλματος

$p = 1$: Η Τάξη Σύγκλισης είναι *1* και η Σύγκλιση *Γραμμική*
$p = 2$: Η Τάξη Σύγκλισης είναι *2* και η Σύγκλιση *Τετραγωνική*
$p = 3$: Η Τάξη Σύγκλισης είναι *3* και η Σύγκλιση *Κυβική*

4.3 Μέθοδος της Διχοτόμησης (Bolzano)

❖ Η Μέθοδος της Διχοτόμησης είναι η πιο απλή μέθοδος επίλυσης εξισώσεων. Τα χαρακτηριστικά της είναι η αργή (γενικά) σύγκλιση της μεθόδου και ο γνωστός εκ των προτέρων αριθμός των επαναλήψεων που απαιτούνται για τη σύγκλιση της μεθόδου.

4.3.1 *Περιγραφή της Μεθόδου της Διχοτόμησης*

Έστω η εξίσωση $f(x)=0$ με μια ρίζα ξ στο διάστημα $I_0=(a_0,b_0)$. Υποθέτουμε ότι για τη συνάρτηση $f(x)$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος (4.1) και η εξίσωση έχει μία μοναδική ρίζα στο διάστημα $I_0=(a_0,b_0)$. Για την εύρεση της ρίζας ξ, απαιτούνται τα παρακάτω βήματα :

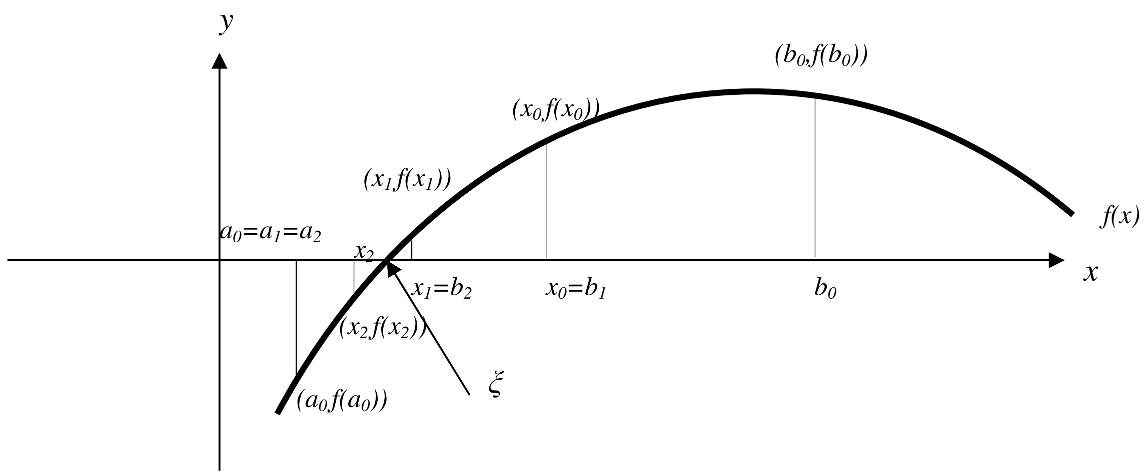
1. Βρίσκουμε την πρώτη προσέγγιση της ζητούμενης ρίζας που είναι το σημείο $x_0=\dfrac{a_0+b_0}{2}$
2. Αν το x_0 δεν είναι η ρίζα, ψάχνουμε τη ρίζα σ' ένα από τα υπο-διαστήματα (a_0,x_0), (x_0,b_0), στο πρώτο, αν $f(a_0)\cdot f(x_0)<0$ ή στο δεύτερο, αν $f(x_0)\cdot f(b_0)<0$.
3. Στην πρώτη περίπτωση νέο διάστημα εντοπισμού της ρίζας είναι το $I_1=(a_1,b_1)=(a_0,x_0)$, ενώ στη δεύτερη $I_1=(a_1,b_1)=(x_0,b_0)$
4. Βρίσκουμε τη νέα προσέγγιση της ζητούμενης ρίζας που είναι το σημείο :

$$x_1=\frac{a_1+b_1}{2}$$

και επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2, 3, 4, μέχρι να βρούμε μια ικανοποιητική προσέγγιση για τη ρίζα ξ.

4.3.2 *Γεωμετρική Ερμηνεία της Μεθόδου της Διχοτόμησης*

Η Γεωμετρική Ερμηνεία της μεθόδου φαίνεται στο Σχήμα 4.1



Σχήμα 4.1 : Γεωμετρική Ερμηνεία της μεθόδου της Διχοτόμησης

4.3.3 *Αλγόριθμος της Μεθόδου της Διχοτόμησης*

Αν θελήσουμε να υλοποιήσουμε την παραπάνω μέθοδο στον Η/Υ, χρησιμοποιούμε τον παρακάτω αλγόριθμο :

Αλγόριθμος της Μεθόδου της Διχοτόμησης

Αρχή
Βρίσκουμε διάστημα (a,b) τέτοιο ώστε να ισχύει $f(a)\cdot f(b)<0$

Βρίσκουμε το μέσον του διαστήματος $x=\dfrac{a+b}{2}$

Για Όσο $|f(x)|>10^{-6}$
{
    Αν $f(a)\cdot f(x)<0$ **τότε** $b=x$
    Αν $f(x)\cdot f(b)<0$ **τότε** $a=x$
    Βρίσκουμε τη νέα προσέγγιση $x=\dfrac{a+b}{2}$
}
Τέλος

4.3.4 *Σύγκλιση της Μεθόδου της Διχοτόμησης*

Η ακολουθία των προσεγγίσεων $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ που δημιουργείται με την εφαρμογή της μεθόδου, όπως περιγράφηκε στο 4.3.1 θα συγκλίνει στη ρίζα ξ της εξίσωσης $f(x)=0.$ Αν $\varepsilon_n = x_n - \xi$ το σφάλμα της n επανάληψης θα ισχύει :

$$\varepsilon_n = x_n - \xi = \frac{b_n + a_n}{2} - \xi = \frac{b_n - a_n + 2\cdot a_n}{2} - \xi = \frac{b_n - a_n}{2} + a_n - \xi \approx \frac{b_n - a_n}{2}$$

Σύμφωνα με τον τρόπο που διχοτομήσαμε τα υπο-διαστήματα, το κάθε νέο διάστημα έχει το μισό μήκος του προηγούμενου, δηλαδή :

$$b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$$

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^2}$$

και επαγωγικά :

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

οπότε :

$$\varepsilon_n = x_n - \xi \approx \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$$

Αλλά :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_0-a_0}{2^{n+1}}=0 \text{ , οπότε } \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=\lim_{n\to\infty}x_n-\xi=0$$

και τελικά

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\xi \text{ ,}$$

δηλαδή η ακολουθία των προσεγγίσεων $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ συγκλίνει στη ρίζα *ξ*.

4.3.5 Τάξη Σύγκλισης της Μεθόδου της Διχοτόμησης

Όπως δείξαμε στην 4.3.4 για το σφάλμα της *n* και *n+1* επανάληψης θα ισχύει :

$$|\varepsilon_n|=|x_n-\xi|\approx\left|\frac{b_n-a_n}{2}\right|=\left|\frac{b_0-a_0}{2^{n+1}}\right| \text{ και } |\varepsilon_{n+1}|=|x_{n+1}-\xi|\approx\left|\frac{b_{n+1}-a_{n+1}}{2}\right|=\left|\frac{b_0-a_0}{2^{n+2}}\right|$$

οπότε :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|}\approx\frac{\left|\dfrac{b_0-a_0}{2^{n+2}}\right|}{\left|\dfrac{b_0-a_0}{2^{n+1}}\right|}=\frac{1}{2},$$ επομένως η σύγκλιση είναι *γραμμική*.

4.3.6 Ελάχιστος Αριθμός Επαναλήψεων για τη Σύγκλιση της Μεθόδου της Διχοτόμησης

Στη μέθοδο της Διχοτόμησης, στις περισσότερες περιπτώσεις, μπορούμε να υπολογίσουμε εκ των προτέρων τον αριθμό επαναλήψεων που θα χρειαστούν για να συγκλίνει η μέθοδος. Αν *n* είναι ο αριθμός των επαναλήψεων $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ και $\varepsilon_n = x_n - \xi$ το σφάλμα της *n* επανάληψης, θα ισχύει :

$$|\varepsilon_n|=|x_n-\xi|=\left|\frac{b_n+a_n}{2}-\xi\right|=\left|\frac{b_n-a_n}{2}+a_n-\xi\right|\approx\left|\frac{b_n-a_n}{2}\right|=\left|\frac{b_0-a_0}{2^{n+1}}\right|$$

Αν στην προσέγγιση που θέλουμε ζητάμε ακρίβεια *k* δεκαδικών ψηφίων θα έχουμε :

$$|\varepsilon_n|\approx\left|\frac{b_0-a_0}{2^{n+1}}\right|\le\frac{1}{2}10^{-k}\Rightarrow\frac{1}{2^{n+1}}\le\frac{1}{2\cdot|b_0-a_0|\cdot 10^k}\Rightarrow 2^n\ge|b_0-a_0|\cdot 10^k$$

οπότε λογαριθμίζοντας θα έχουμε :

$$n\cdot\log 2\ge\log\left(|b_0-a_0|\cdot 10^k\right)$$

και τελικά :

$$n \geq \frac{log\left(|b_0 - a_0| \cdot 10^k\right)}{log\,2}, \text{ όπου } log\,2 = 0.3017$$

Παράδειγμα 4.7

- Να βρεθεί το ελάχιστο πλήθος των επαναλήψεων n που απαιτούνται για την εύρεση της ρίζας $\xi = 2$ της εξίσωσης $f(x) = x^3 - 4 \cdot x = 0$ στο διάστημα $(1.4,\ 2.4)$ με ακρίβεια 1 δεκαδικού ψηφίου ($k=1$) και να βρεθούν οι επαναλήψεις $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$:

<u>Απάντηση</u>

$$n \geq \frac{log\left(|b_0 - a_0| \cdot 10^k\right)}{log\,2} = \frac{log\left(|2.4 - 1.4| \cdot 10^1\right)}{0.3017} = \frac{log\left(10^1\right)}{0.3017} = \frac{1}{0.3017} = 3.3 \approx 3$$

άρα απαιτούνται τουλάχιστον 3 επαναλήψεις.

$f(a_0) = {a_0}^3 - 4 \cdot a_0 = 1.4^3 - 4 \cdot 1.4 = 2.744 - 5.6 = -2.856 < 0$,

$f(b_0) = {b_0}^3 - 4 \cdot b_0 = 2.4^3 - 4 \cdot 2.4 = 13.824 - 9.6 = 4.224 > 0$

$f(a_0) \cdot f(b_0) = -2.856 \cdot 4.224 < 0$, επομένως υπάρχει ρίζα στο $(a_0, b_0) = (1.4, 2.4)$

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{1.4 + 2.4}{2} = \frac{3.8}{2} = 1.9, \qquad |\varepsilon_0| = |x_0 - \xi| = |1.9 - 2| = 0.1 > 0.05 = \tfrac{1}{2} \cdot 10^{-1}$$

$f(x_0) = {x_0}^3 - 4 \cdot x_0 = 1.9^3 - 4 \cdot 1.9 = 6.859 - 7.6 = -0.741 < 0$, $f(x_0) \cdot f(b_0) = -0.741 \cdot 4.224 < 0$,
$(a_1, b_1) = (1.9, 2.4)$,

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1.9 + 2.4}{2} = \frac{4.3}{2} = 2.15, \qquad |\varepsilon_1| = |x_1 - \xi| = |2.15 - 2| = 0.15 > 0.05 = \tfrac{1}{2} \cdot 10^{-1}$$

$f(x_1) = {x_1}^3 - 4 \cdot x_1 = 2.15^3 - 4 \cdot 2.15 = 9.94 - 8.6 = 1.34 > 0$,

$(a_2, b_2) = (1.9, 2.15)$,

$$x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{1.9 + 2.15}{2} = \frac{4.05}{2} = 2.025, \quad |\varepsilon_2| = |x_2 - \xi| = |2.025 - 2| = 0.025 < 0.05 = \tfrac{1}{2} \cdot 10^{-1}$$

4.4 Μέθοδος της Εσφαλμένης Θέσης

Μία βελτίωση της μεθόδου της διχοτόμησης αποτελεί η Μέθοδος **της Εσφαλμένης Θέσης (Regula Falsi)**. Η μέθοδος ισχύει, αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 4.1.

4.4.1 Περιγραφή της Μεθόδου της Εσφαλμένης Θέσης

Έστω η εξίσωση $f(x)=0$ με μια ρίζα ξ στο διάστημα $I_0=(a_0,b_0)$. Υποθέτουμε ότι για τη συνάρτηση $f(x)$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος 4.1 και η εξίσωση έχει μία μοναδική ρίζα στο διάστημα $I_0=(a_0,b_0)$. Για την εύρεση της ρίζας ξ, απαιτούνται τα παρακάτω βήματα:

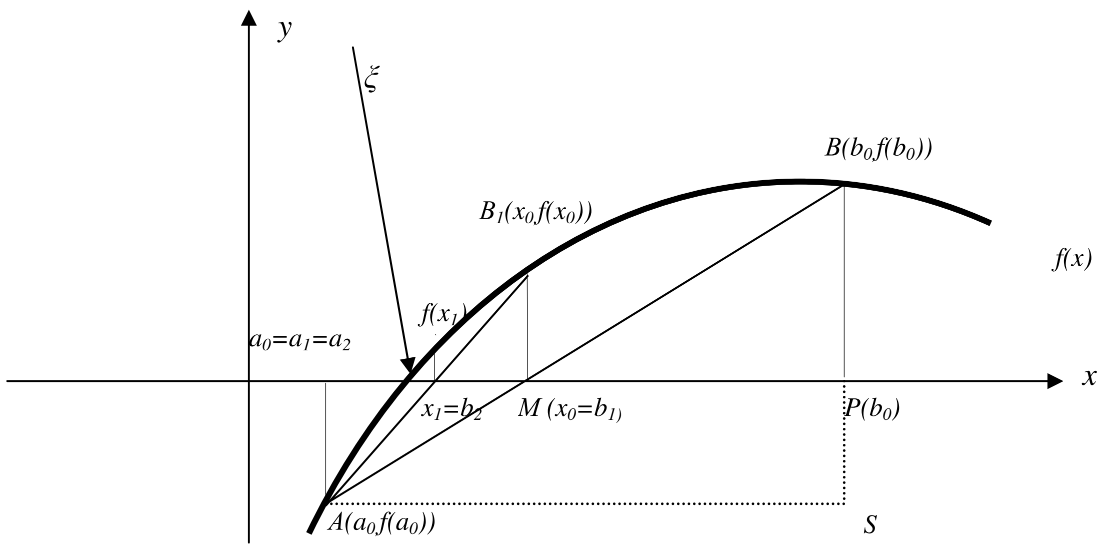
1. Βρίσκουμε την πρώτη προσέγγιση της ζητούμενης ρίζας που είναι το σημείο $x_0=b_0-\dfrac{b_0-a_0}{f(b_0)-f(a_0)}\cdot f(b_0)$
2. Αν το x_0 δεν είναι η ρίζα, ψάχνουμε τη ρίζα σ' ένα από τα υποδιαστήματα $[a_0,x_0]$, $[x_0,b_0]$, στο πρώτο, αν $f(a_0)\cdot f(x_0)<0$ ή στο δεύτερο, αν $f(x_0)\cdot f(b_0)<0$.
3. Στην πρώτη περίπτωση νέο διάστημα εντοπισμού της ρίζας είναι το $I_1=(a_1,b_1)=(a_0,x_0)$, ενώ στη δεύτερη $I_1=(a_1,b_1)=(x_0,b_0)$
4. Βρίσκουμε τη νέα προσέγγιση της ζητούμενης ρίζας που είναι το σημείο :

$$x_1=b_1-\frac{b_1-a_1}{f(b_1)-f(a_1)}\cdot f(b_1)$$

και επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2, 3, 4, μέχρι να βρούμε μια ικανοποιητική προσέγγιση για τη ρίζα ξ.

4.4.2 Γεωμετρική Ερμηνεία της Μεθόδου της Εσφαλμένης Θέσης

Η Γεωμετρική Ερμηνεία της μεθόδου φαίνεται στο Σχήμα 4.2



Σχήμα 4.2 : Γεωμετρική Ερμηνεία της μεθόδου της Εσφαλμένης Θέσης

- Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2, σαν πρώτη προσέγγιση της ζητούμενης ρίζας παίρνουμε την τομή του άξονα x (τετμημένη x_1) με τη χορδή που ορίζεται απ' τα σημεία $A(a_0, f(a_0))$ και B

$(b_0, f(b_0))$. Στο σημείο αυτό της τομής φέρνουμε την κάθετο στον άξονα των x, η οποία συναντά την καμπύλη στο σημείο $B_1(x_0, f(x_0))$. Φέρνουμε τη χορδή AB_1, η οποία συναντά τον άξονα των x σ' ένα σημείο με τετμημένη x_1. Την τιμή αυτή θεωρούμε σαν δεύτερη προσέγγιση της ζητούμενης ρίζας. Συνεχίζουμε την παραπάνω διαδικασία, μέχρις ότου η τετμημένη x_n να προσεγγίσει τη ρίζα ξ με την ακρίβεια που θέλουμε. Είναι φανερό ότι απ' τα όμοια τρίγωνα MPB και ASB θα έχουμε:

$$\frac{MP}{AS} = \frac{BP}{BS} \text{ ή } \qquad \frac{b_0 - x_0}{b_0 - a_0} = \frac{f(b_0)}{f(b_0) - f(a_0)} \Rightarrow b_0 - x_0 = \frac{b_0 - a_0}{f(b_0) - f(a_0)} \cdot f(b_0) \Rightarrow$$

$$x_0 = b_0 - \frac{b_0 - a_0}{f(b_0) - f(a_0)} \cdot f(b_0)$$

Παρατήρηση

- Στην παραπάνω σχέση καταλήγουμε αν χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση ευθείας για τη χορδή AB :

  $$y - f(b_0) = (x - b_0) \cdot \lambda_{\chi o \rho \delta \acute{\eta} \varsigma} = (x - b_0) \cdot \frac{f(b_0) - f(a_0)}{b_0 - a_0}$$

  Για $x = x_0, y = 0$, η προηγούμενη σχέση γίνεται :

  $$y - f(b_0) = (x_0 - b_0) \cdot \frac{f(b_0) - f(a_0)}{b_0 - a_0} \Rightarrow -f(b_0) = (x_0 - b_0) \cdot \frac{f(b_0) - f(a_0)}{b_0 - a_0}$$

  $$x_0 - b_0 = -f(b_0) \cdot \frac{b_0 - a_0}{f(b_0) - f(a_0)} \Rightarrow x_0 = b_0 - \frac{b_0 - a_0}{f(b_0) - f(a_0)} \cdot f(b_0)$$

4.4.3 Αλγόριθμος της Μεθόδου της Εσφαλμένης Θέσης

Αν θελήσουμε να υλοποιήσουμε την παραπάνω μέθοδο στον Η/Υ, χρησιμοποιούμε τον παρακάτω αλγόριθμο :

Αλγόριθμος της Μεθόδου της Εσφαλμένης Θέσης

Αρχή
Βρίσκουμε διάστημα $[a,b]$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(a) \cdot f(b) < 0$

Βρίσκουμε το $x = b - \dfrac{b - a}{f(b) - f(a)} \cdot f(b)$

Για Όσο $|f(x)| > 10^{-6}$

{

Αν $f(a) \cdot f(x) < 0$ **τότε** $b = x$
Αν $f(x) \cdot f(b) < 0$ **τότε** $a = x$

Βρίσκουμε τη νέα προσέγγιση $x = b - \dfrac{b - a}{f(b) - f(a)} \cdot f(b)$

}
Τέλος

4.4.4 *Σύγκλιση της Μεθόδου της Εσφαλμένης Θέσης*

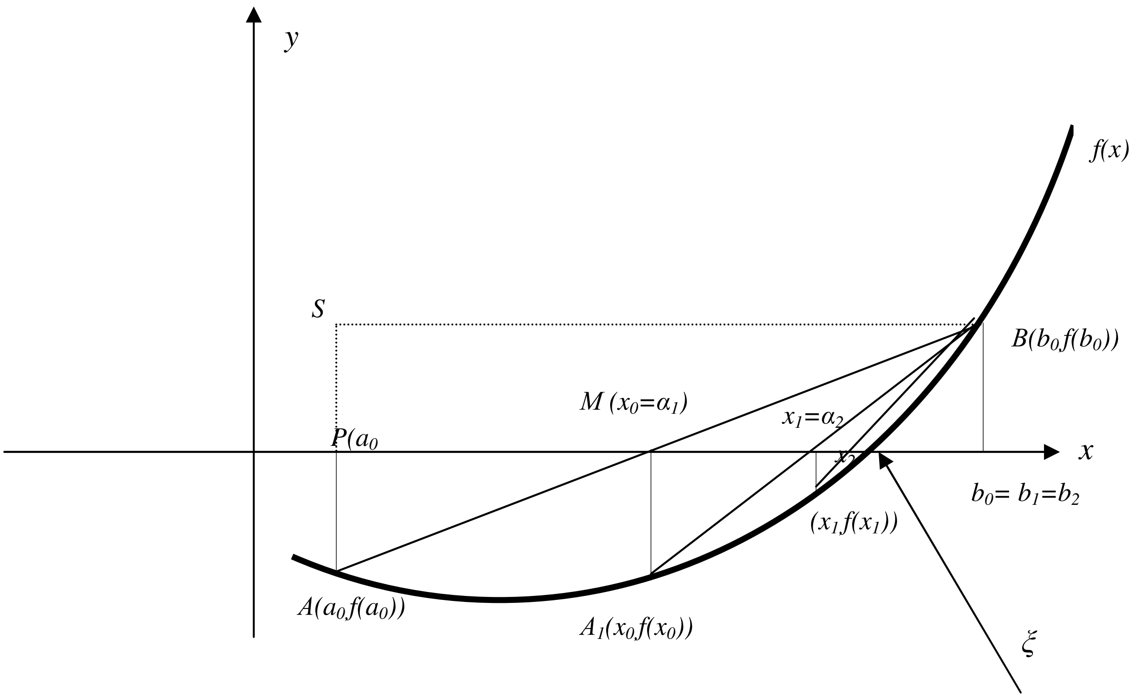
Η ακολουθία των προσεγγίσεων $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ που δημιουργείται με την εφαρμογή της μεθόδου, όπως περιγράφηκε στο 4.4.1 είναι φθίνουσα και φραγμένη, ισχύει δηλαδή $a_0 < \xi < ...x_n < x_{n-1} < ... < x_2 < x_1 < x_0$, οπότε θα συγκλίνει στη ρίζα ξ της εξίσωσης $f(x) = 0$ ($\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \xi$).

4.4.5 *Τάξη Σύγκλισης της Μεθόδου της Εσφαλμένης Θέσης*

Επειδή η μέθοδος της Εσφαλμένης Θέσης είναι μια μερική περίπτωση της Μεθόδου της Χορδής (4.7) η Τάξη Σύγκλισης θα εξετασθεί με τη Μέθοδο της Χορδής.

4.4.6 *Σταθερά Σημεία στη Μέθοδο της Εσφαλμένης Θέσης*

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2, το σημείο a_0 παραμένει σταθερό και όλες οι χορδές περνάνε απ' αυτό. Ανάλογα με τη μορφή της καμπύλης *f(x)* , μπορεί να είναι σταθερό το σημείο b_0, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.3 :



Σχήμα 4.3 : Γεωμετρική Ερμηνεία της μεθόδου της Εσφαλμένης Θέσης

- Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.3, σαν πρώτη προσέγγιση της ζητούμενης ρίζας παίρνουμε την τομή του άξονα *x* (τετμημένη x_1) με τη χορδή που ορίζεται απ' τα σημεία $A(a_0, f(a_0))$ και $B(b_0, f(b_0))$. Στο σημείο αυτό της τομής φέρνουμε την κάθετο στον άξονα των *x*, η οποία συναντά την καμπύλη στο σημείο $A_1(x_0, f(x_0))$. Φέρνουμε τη χορδή BA_1, η οποία συναντά τον άξονα των *x* σ' ένα σημείο με τετμημένη x_1. Την τιμή αυτή θεωρούμε σαν δεύτερη προσέγγιση της ζητούμενης ρίζας. Συνεχίζουμε την παραπάνω διαδικασία, μέχρις ότου η τετμημένη x_n να προσεγγίσει τη ρίζα ξ με την ακρίβεια που θέλουμε. Είναι φανερό ότι απ’ τα όμοια τρίγωνα *MPA* και *ASB* θα έχουμε:

$$\frac{MP}{BS} = \frac{AP}{AS}$$

ή

$$\frac{x_0 - a_0}{b_0 - a_0} = \frac{-f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)} \Rightarrow x_0 - a_0 = -\frac{b_0 - a_0}{f(b_0) - f(a_0)} \cdot f(a_0) \Rightarrow$$

$$x_0 = a_0 - \frac{b_0 - a_0}{f(b_0) - f(a_0)} \cdot f(a_0)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.3 :	Σταθερό σημείο είναι εκείνο για το οποίο η $f(x)$ έχει το ίδιο πρόσημο με την $f''(x)$, ενώ οι προσεγγίσεις $x_0, x_1, ..., x_n$ βρίσκονται στην πλευρά της ρίζας που η $f(x)$ έχει το αντίθετο πρόσημο με την $f''(x)$.

Παράδειγμα 4.8

- Να βρεθεί το σταθερό σημείο στη Μέθοδο της Εσφαλμένης Θέσης για την εύρεση της ρίζας $\xi = 2$ της εξίσωσης $f(x) = x^3 - 4 \cdot x = 0$ στο διάστημα $(a_0, b_0) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

<u>Απάντηση</u>

$$f(x) = x^3 - 4 \cdot x = 0$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8} - 6 < 0 \ ,$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^3 - 4\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{125}{8} - 10 > 0$$

$$f'(x) = 3 \cdot x^2 - 4$$

$$f''(x) = 6 \cdot x, \quad f''\left(\frac{3}{2}\right) = 6 \cdot \frac{3}{2} = 9 > 0 ,$$

$$f''\left(\frac{5}{2}\right) = 6 \cdot \frac{5}{2} = 15 > 0$$

επομένως σταθερό σημείο είναι το $b_0 = \frac{5}{2}$.

4.4.7 Γενίκευση της Μεθόδου της Εσφαλμένης Θέσης

Αν το a είναι σταθερό σημείο, δηλαδή $a = a_0 = a_1 = a_2 = ... = a_n$, τότε το x_0 θα δίνεται απ' τη σχέση :

$$x_0 = b_0 - \frac{b_0 - a_0}{f(b_0) - f(a_0)} \cdot f(b_0) \equiv b_1$$

ενώ το x_1 θα δίνεται απ' τη σχέση :

$$x_1 = b_1 - \frac{b_1 - a_1}{f(b_1) - f(a_1)} \cdot f(b_1) = x_0 - \frac{x_0 - a}{f(x_0) - f(a)} \cdot f(x_0)$$

και επαγωγικά :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} \cdot f(x_n), \quad n = 0,1,2,...$$

Ομοίως, αν το b είναι το σταθερό σημείο, δηλαδή $b = b_0 = b_1 = b_2 = ... = b_n$, το x_0 δίνεται απ' τη σχέση :

$$x_0 = a_0 - \frac{b_0 - a_0}{f(b_0) - f(a_0)} \cdot f(a_0) \equiv a_1$$

ενώ το x_1 θα δίνεται απ' τη σχέση :

$$x_1 = a_1 - \frac{b_1 - a_1}{f(b_1) - f(a_1)} \cdot f(a_1) = x_0 - \frac{b - x_0}{f(b) - f(x_0)} \cdot f(x_0)$$

και επαγωγικά :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} \cdot f(x_n), \quad n = 0,1,2,...$$

Παρατηρήσεις

- Με τη χρήση του επαναληπτικού τύπου δεν χρειάζεται ενημέρωση των άκρων *a, b* ούτε έλεγχος κάθε φορά του υποδιαστήματος που περιέχει τη ρίζα.
- Αν σταθερό σημείο είναι το *a,* η ακολουθία των προσεγγίσεων $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ που δημιουργείται με την εφαρμογή της μεθόδου, όπως περιγράφηκε στο 4.4.1 είναι φθίνουσα και φραγμένη, ισχύει δηλαδή $a_0 < \xi < ... x_n < x_{n-1} < ... < x_2 < x_1 < x_0 < b_0$, οπότε θα συγκλίνει στη **μοναδική** ρίζα ξ της εξίσωσης $f(x) = 0$ ($\lim_{n \to \infty} x_n = \xi$). Η ρίζα ξ είναι μοναδική, διότι αν $\bar{\xi} = \lim_{n \to \infty} x_n$, $a < \bar{\xi} < b$, τότε απ' τη σχέση $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} \cdot f(x_n)$ θα έχουμε :

$$\bar{\xi} = \bar{\xi} - \frac{\bar{\xi} - a}{f(\bar{\xi}) - f(a)} \cdot f(\bar{\xi}) \Rightarrow (\bar{\xi} - a) \cdot f(\bar{\xi}) = 0 \Rightarrow f(\bar{\xi}) = 0 .$$

Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει όμως μια μοναδική ρίζα στο διάστημα (a,b), οπότε θα ισχύει $\bar{\xi} = \xi$.

- Αν σταθερό σημείο είναι το *b*, η ακολουθία των προσεγγίσεων $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ που δημιουργείται με την εφαρμογή της μεθόδου, όπως περιγράφηκε στο 4.4.1 είναι αύξουσα και φραγμένη, ισχύει δηλαδή $a_0 < x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n < \xi < b_0$, οπότε θα συγκλίνει στη **μοναδική** ρίζα ξ της εξίσωσης $f(x) = 0$ ($\lim_{n \to \infty} x_n = \xi$). Η απόδειξη της μοναδικότητας της ρίζας ξ είναι παρόμοια.

4.4.8 Γενίκευση του Αλγορίθμου της Μεθόδου της Εσφαλμένης Θέσης

Αν θελήσουμε να υλοποιήσουμε την παραπάνω μέθοδο στον Η/Υ, χρησιμοποιούμε τον παρακάτω γενικευμένο αλγόριθμο :

Γενικευμένος Αλγόριθμος της Μεθόδου της Εσφαλμένης Θέσης

Αρχή

Βρίσκουμε διάστημα (a,b) τέτοιο ώστε να ισχύει $f(a) \cdot f(b) < 0$

Αρχική Τιμή $x = b$, αν a = σταθερό σημείο

$x = a$, αν b = σταθερό σημείο

Για Όσο $|f(x)| > 10^{-6}$

Βρίσκουμε τη νέα προσέγγιση $x = x - \frac{x - a}{f(x) - f(a)} \cdot f(x)$, αν a = σταθερό σημείο

$x = x - \frac{b - x}{f(b) - f(x)} \cdot f(x)$, αν b = σταθερό σημείο

Τέλος

Παράδειγμα 4.9

- Να βρεθεί η ρίζα $\xi = 1$ της εξίσωσης $f(x) = x^2 - 1 = 0$ στο διάστημα $(a_0, b_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ με ακρίβεια 1 δεκαδικού ψηφίου ($k=1$).

Απάντηση

$$f(a_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} < 0$$

$$f(b_0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} > 0$$

$$f(a_0) \cdot f(b_0) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} = -\frac{15}{16} < 0$$

επομένως υπάρχει ρίζα στο $(a_0, b_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$$f'(x) = 2 \cdot x$$
$$f''(x) = 2,$$
$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 2 > 0$$
$$f''\left(\frac{3}{2}\right) = 2 > 0$$

επομένως σταθερό σημείο είναι το $b_0 = \frac{3}{2}$, οπότε $x_0 = a_0 = \frac{1}{2}$

$$x_1 = x_0 - \frac{b - x_0}{f(b) - f(x_0)} \cdot f(x_0) = \frac{1}{2} - \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{5}{4} - (-\frac{3}{4})} \cdot (-\tfrac{3}{4}) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{4}}{\frac{8}{4}} = \frac{7}{8} = 0.875,$$

$$|\varepsilon_1| = |x_1 - \xi| = |0.875 - 1| = 0.125 > 0.05 = \tfrac{1}{2} 10^{-1},$$

$$f\left(\frac{7}{8}\right) = \left(\frac{7}{8}\right)^2 - 1 = \frac{49}{64} - 1 = -\frac{15}{64}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{b - x_1}{f(b) - f(x_1)} \cdot f(x_1) = \frac{7}{8} - \frac{\frac{3}{2} - \frac{7}{8}}{\frac{5}{4} - (-\frac{15}{64})} \cdot (-\tfrac{15}{64}) = \frac{7}{8} + \frac{\frac{5}{8} \cdot \frac{15}{64}}{\frac{95}{64}} = \frac{37}{38} = 0.97368,$$

$$|\varepsilon_2| = |x_2 - \xi| = |0.97368 - 1| = 0.02632 < 0.05 = \tfrac{1}{2} \cdot 10^{-1}.$$

4.5 Μέθοδος των Διαδοχικών Προσεγγίσεων

Μία βελτίωση των δύο προηγούμενων μεθόδων αποτελεί η μέθοδος των Διαδοχικών Προσεγγίσεων ή μέθοδος Σταθερού Σημείου ή Γενική Επαναληπτική Μέθοδος. Για την εύρεση των προσεγγίσεων $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ χρησιμοποιείται το επαναληπτικό σχήμα $x_{n+1} = g(x_n)$, όπου η συνάρτηση $g(x)$ αποτελεί μια αναδιάταξη της εξίσωσης $f(x) = 0$. Η μέθοδος δεν συγκλίνει πάντοτε - η σύγκλιση εξαρτάται απ' το x_0 και τη $g(x)$- αν όμως συγκλίνει, η σύγκλιση μπορεί να είναι *γραμμική*, *τετραγωνική* ή *ανώτερης τάξης*.

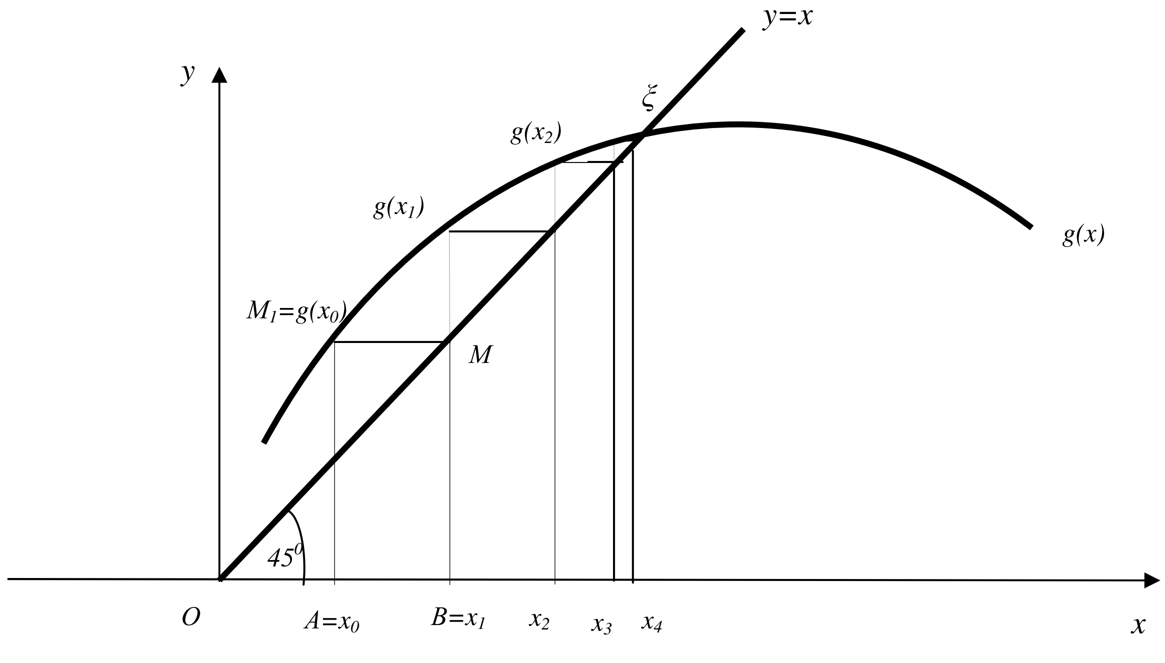
4.5.1 Περιγραφή της Μεθόδου των Διαδοχικών Προσεγγίσεων

Έστω η εξίσωση $f(x)=0$ με μια ρίζα ξ στο διάστημα $I_0=(a_0,b_0)$. Υποθέτουμε ότι για τη συνάρτηση $f(x)$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος (4.1) και η εξίσωση έχει μία μοναδική ρίζα στο διάστημα $I_0=(a_0,b_0)$. Για την εύρεση της ρίζας ξ, απαιτούνται τα παρακάτω βήματα:

1. Βρίσκουμε μια αναδιάταξη $g(x)$ της $f(x)=0$
2. Βρίσκουμε ένα $x_0\in(a_0,b_0)$
3. Αν $|g'(x)|<1$ μέχρι να βρούμε την επιθυμητή ακρίβεια, βρίσκουμε προσεγγίσεις της ζητούμενης ρίζας ξ σύμφωνα με τον τύπο $x_{n+1}=g(x_n)$, $n=0,1,2,...$

4.5.2 Γεωμετρική Ερμηνεία της Μεθόδου των Διαδοχικών Προσεγγίσεων

Η Γεωμετρική Ερμηνεία της μεθόδου φαίνεται στο Σχήμα 4.4



Σχήμα 4.4 : Γεωμετρική Ερμηνεία της μεθόδου των Διαδοχικών Προσεγγίσεων

- Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.4, η ρίζα ξ είναι η τομή της καμπύλης $g(x)$ και της διχοτόμου $y=x$. Με αρχική τιμή το x_0, φέρνουμε την παράλληλη στον άξονα των x απ' το $g(x_0)$. Απ' το σημείο που τέμνει τη διχοτόμο, φέρνουμε την κάθετη στον άξονα των x, η οποία τον τέμνει στο x_1 που είναι η πρώτη προσέγγιση της ζητούμενης ρίζας. Το τρίγωνο BOM είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε θα ισχύει $OB=BM=AM_1$, δηλαδή $x_1=g(x_0)$. Η νέα προσέγγιση θα είναι $x_2=g(x_1)$ και συνεχίζουμε την προηγούμενη διαδικασία μέχρι να βρούμε κατάλληλη προσέγγιση της ρίζας ξ.

4.5.3 *Αλγόριθμος της Μεθόδου των Διαδοχικών Προσεγγίσεων*

Αν θελήσουμε να υλοποιήσουμε την παραπάνω μέθοδο στον Η/Υ, χρησιμοποιούμε τον παρακάτω αλγόριθμο :

Αλγόριθμος της Μεθόδου των Διαδοχικών Προσεγγίσεων

Αρχή
Βρίσκουμε διάστημα $[a,b]$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(a)\cdot f(b)<0$
Θέτουμε $x = x_0 \in (a,b)$
Για Όσο $|f(x)| > 10^{-6}$ και $|g'(x)| < 1$
  Βρίσκουμε τη νέα προσέγγιση $x = g(x)$
Τέλος

4.5.4 *Σύγκλιση – Τάξη Σύγκλισης της Μεθόδου των Διαδοχικών Προσεγγίσεων*

Η ακολουθία των προσεγγίσεων $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ που δημιουργείται με την εφαρμογή της μεθόδου, όπως περιγράφηκε στο 4.5.1 θα συγκλίνει στη ρίζα ξ της εξίσωσης $f(x)=0$ ($\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$), όπως αποδεικνύεται με το θεώρημα που ακολουθεί :

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.3: Αν η εξίσωση $f(x)=0$ και η αναδιάταξή της $x=g(x)$ έχει ρίζα το ξ και οι συναρτήσεις $f(x), g(x), g'(x)$ είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο διάστημα $I=(a,b)$, για το οποίο ισχύει $|x-\xi| \le \rho, \forall x \in I$ και $|g'(x)| \le \lambda < 1, \ \forall x \in I$ τότε :

i. Αν $x_0 \in min((a,\xi), (\xi,b))$ τότε $x_1, x_2, ..., x_n \in I$
ii. $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$
*iii. Η ρίζα ξ είναι η **μοναδική** πραγματική ρίζα της $x = g(x)$*
*iv. Η σύγκλιση είναι **Γραμμική** (Τάξη Σύγκλισης = 1)*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

i. $x_0 \in I \Rightarrow |x_0 - \xi| \le \rho$

$$|\varepsilon_1| = |x_1 - \xi| = |g(x_0) - g(\xi)|$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα της Μέσης Τιμής, υπάρχει $\overline{\xi_0} \in (min(x_0,\xi), max(x_0,\xi))$ τέτοιο ώστε να ισχύει :

$$\frac{g(x_0)-g(\xi)}{x_0-\xi}=g'(\overline{\xi_0})$$

οπότε θα έχουμε :

$$g(x_0)-g(\xi)=(x_0-\xi)\cdot g'(\overline{\xi_0})$$

και η αρχική σχέση γίνεται :

$$|\varepsilon_1|=|x_1-\xi|=|g(x_0)-g(\xi)|=\left|(x_0-\xi)\cdot g'(\overline{\xi_0})\right|=|x_0-\xi|\cdot\left|g'(\overline{\xi_0})\right|\le\rho\cdot\lambda<\rho$$

οπότε και το $x_1\in I$. Επαγωγικά μπορεί να αποδειχθεί, ότι αν $x_{n-1}\in I$ και το $x_n\in I$.

ii. $|\varepsilon_1|=|x_1-\xi|=|g(x_0)-g(\xi)|=\left|(x_0-\xi)\cdot g'(\overline{\xi_0})\right|\le\lambda\cdot|x_0-\xi|=\lambda\cdot|\varepsilon_0|$

$|\varepsilon_2|=|x_2-\xi|\le\lambda\cdot|x_1-\xi|\le\lambda^2\cdot|\varepsilon_0|$

…

$|\varepsilon_n|=|x_n-\xi|\le\lambda\cdot|x_{n-1}-\xi|\le\lambda^n\cdot|\varepsilon_0|\to 0$, αφού $\lambda^n\to 0$

οπότε

$$\lim_{n\to\infty}|\varepsilon_n|=\lim_{n\to\infty}|x_n-\xi|=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=\xi$$

iii. Αν υπάρχει κι άλλη ρίζα $\overline{\xi}\ne\xi,\overline{\xi}\in I$ τότε θα έχουμε :

$\left|\overline{\xi}-\xi\right|=\left|g(\overline{\xi})-g(\xi)\right|=\left|(\overline{\xi}-\xi)\cdot g'(\overline{\overline{\xi}})\right|\le\left|(\overline{\xi}-\xi)\cdot\lambda\right|<\left|\overline{\xi}-\xi\right|$,

με $\overline{\overline{\xi}}\in\left(min\left(\overline{\xi},\xi\right),max\left(\overline{\xi},\xi\right)\right)$, επομένως $\overline{\xi}=\xi$.

iv. Για το σφάλμα της *n+1* επανάληψης θα έχουμε :

$$|\varepsilon_{n+1}|=|x_{n+1}-\xi|=|g(x_n)-g(\xi)|=\left|(x_n-\xi)\cdot g'(\overline{\xi_n})\right|=|\varepsilon_n|\cdot\left|g'(\overline{\xi_n})\right|$$

με $\overline{\xi_n}\in\left(min\left(x_n,\xi\right),max\left(x_n,\xi\right)\right)$

οπότε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|}=\left|g'(\overline{\xi_n})\right|\le\lambda<1$$

επομένως η σύγκλιση είναι *γραμμική*.

Παράδειγμα 4.10

- Αν η εξίσωση $x^2-4=0$ και η αναδιάταξή της $x=\frac{2}{3}\cdot(x+\frac{2}{x})\equiv g(x)$ έχει ρίζα το $\xi=2$ στο διάστημα $I=\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $|x-\xi|\le 0.5=\rho, \forall x\in I$ και $|g'(x)|\le\lambda<1$, $\forall x\in I$ τότε η ακολουθία $x_0,x_1,x_2,...,x_n\in I$ συγκλίνει στη μοναδική ρίζα $\xi=2$ και η σύγκλιση είναι γραμμική.

Απάντηση

Πρέπει να δείξουμε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 4.3. Η εξίσωση $x=\frac{2}{3}\cdot(x+\frac{2}{x})\equiv g(x)$ αποτελεί αναδιάταξή της $x^2-4=0$ και προκύπτει ως εξής :

$$x^2-4=0\Rightarrow 3\cdot x^2-2\cdot x^2-4=0\Rightarrow 3\cdot x^2=2\cdot x^2+4\Rightarrow\frac{3\cdot x^2}{3\cdot x}=\frac{2\cdot x^2}{3\cdot x}+\frac{4}{3\cdot x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{2\cdot x}{3}+\frac{4}{3\cdot x}=\frac{2}{3}\cdot\left(x+\frac{2}{x}\right)$$

Αν παραγωγίσουμε τη $g(x)$ θα έχουμε :

$$g'(x)=\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{2}{x^2}\right)$$

και

$$g'\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{2}{(\frac{3}{2})^2}\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{2}{\frac{9}{4}}\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{8}{9}\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{2}{27}$$

$$g'\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{2}{(\frac{5}{2})^2}\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{2}{\frac{25}{4}}\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{8}{25}\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{17}{25}\right)=\frac{34}{75}$$

$$g'(\xi)=g'(2)=\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{2}{2^2}\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{2}{4}\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$$

οπότε αν η $g'(x)$ είναι συνεχής στο I, τότε $\forall x\in I$ θα ισχύει

$$\frac{2}{27}\le g'(x)\le\frac{34}{75}\quad\text{οπότε}\quad|g'(x)|\le\frac{34}{75}=\lambda<1$$

Δείξαμε ότι $|g'(x)|\le\lambda<1$. Ισχύει επίσης $|x-\xi|\le 0.5=\rho$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 4.3, οπότε η μέθοδος συγκλίνει και η σύγκλιση είναι γραμμική. Αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο με $x_0=\frac{3}{2}\in min((a,\xi),(\xi,b))$ για να βρούμε τη ρίζα με ακρίβεια 1 δ.ψ. θα έχουμε:

$$x_1 = g(x_0) = \frac{2}{3}\cdot\left(x_0 + \frac{2}{x_0}\right) = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{17}{6} = \frac{17}{9} = 1.8888 \in I,$$

$$|\varepsilon_1| = |x_1 - \xi| = |1.88888 - 2| = 0.11111 > 0.05 = \tfrac{1}{2}\cdot 10^{-1}$$

$$x_2 = g(x_1) = \frac{2}{3}\cdot\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right) = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{17}{9} + \frac{2}{\frac{17}{9}}\right) = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{17}{9}+\frac{18}{17}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{451}{153} = \frac{902}{459} = 1.965 \in I,$$

$$|\varepsilon_2| = |x_2 - \xi| = |1.965 - 2| = 0.034858 < 0.05 = \tfrac{1}{2}\cdot 10^{-1}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.4: Αν η εξίσωση $f(x)=0$ και η αναδιάταξή της $x = g(x)$ έχει ρίζα το ξ και οι συναρτήσεις $f(x), g(x), g'(x), g''(x)$ είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο διάστημα $I = (a,b)$, για το οποίο ισχύει $|x-\xi| \le \rho$, $\forall x \in I$ και $|g'(\xi)| = 0 < 1$ και $|g''(\xi)| \neq 0$ τότε :

I. Αν $x_0 \in min((a,\xi), (\xi,b))$ τότε $x_1, x_2, ..., x_n \in I$
II. $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$
*III. Η ρίζα ξ είναι η **μοναδική** πραγματική ρίζα της $x = g(x)$*
IV. Η σύγκλιση είναι Τετραγωνική (Τάξη Σύγκλισης = 2)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

I. $x_0 \in I \Rightarrow |x_0 - \xi| \le \rho$

Αν πάρουμε τους 3 πρώτους όρους του αναπτύγματος του Taylor θα έχουμε :

$$|x_1 - \xi| = |g(x_0) - g(\xi)| = \left|(x_0-\xi)\cdot g'(\xi) + \frac{1}{2}\cdot(x_0-\xi)^2\cdot g''(\overline{\xi_0})\right| = \left|\frac{1}{2}\cdot(x_0-\xi)^2\cdot g''(\overline{\xi_0})\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2}\cdot\varepsilon_0^{\,2}\cdot g''(\overline{\xi_0})\right| = \frac{1}{2}\cdot|g''(\overline{\xi_0})|\cdot|\varepsilon_0|^2$$, όπου $\overline{\xi_0} \in (min(x_0,\xi), max(x_0,\xi))$

Η συνάρτηση $g''(x)$ όμως είναι συνεχής και φραγμένη στο *I*, άρα θα υπάρχει *M*, τέτοιο ώστε να ισχύει :

$\frac{1}{2}\cdot|g''(x)| \le M$, $\forall x \in I$, οπότε η προηγούμενη σχέση γίνεται :

$$|x_1 - \xi| = \frac{1}{2}\cdot|g''(\overline{\xi_0})|\cdot|\varepsilon_0|^2 \le M\cdot|\varepsilon_0|^2$$

Ισχύει όμως :

$$|\varepsilon_0| = |x_0 - \xi| \le |b - a|$$

οπότε θα έχουμε :

$$|x_1 - \xi| = \frac{1}{2} \cdot |g''(\overline{\xi_0})| \cdot |\varepsilon_0|^2 \le M \cdot |\varepsilon_0|^2 \le M \cdot |b-a| \cdot |\varepsilon_0| = \lambda \cdot |\varepsilon_0| \le \lambda \cdot \rho < \rho$$

όπου $\lambda = M \cdot |b-a|$ και $\lambda < 1$, οπότε και το $x_1 \in I$. Επαγωγικά μπορεί να αποδειχθεί, ότι αν $x_{n-1} \in I$ και το $x_n \in I$.

II. $|\varepsilon_1| = |x_1 - \xi| \le \lambda \cdot |x_0 - \xi| = \lambda \cdot |\varepsilon_0|$

$|\varepsilon_2| = |x_2 - \xi| \le \lambda \cdot |x_1 - \xi| \le \lambda^2 \cdot |\varepsilon_0|$

…

$|\varepsilon_n| = |x_n - \xi| \le \lambda \cdot |x_{n-1} - \xi| \le \lambda^n \cdot |\varepsilon_0| \to 0$, αφού $\lambda^n \to 0$

οπότε

$$\lim_{n\to\infty} |\varepsilon_n| = \lim_{n\to\infty} |x_n - \xi| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$$

III. Αν υπάρχει κι άλλη ρίζα $\overline{\xi} \ne \xi, \overline{\xi} \in I$ τότε θα έχουμε :

$$|\overline{\xi} - \xi| = |g(\overline{\xi}) - g(\xi)| = \left| \frac{1}{2} \cdot (\overline{\xi} - \xi)^2 \cdot g''(\overline{\overline{\xi}}) \right| \le |(\overline{\xi} - \xi) \cdot \lambda| \le \lambda \cdot |\overline{\xi} - \xi| \Rightarrow$$

$(1-\lambda) \cdot |\overline{\xi} - \xi| \le 0$, αλλά $(1-\lambda) > 0$, με $\overline{\overline{\xi}} \in \left(min(\overline{\xi}, \xi), max(\overline{\xi}, \xi)\right)$, επομένως θα ισχύει $|\overline{\xi} - \xi| \le 0$, άτοπο, επομένως $\overline{\xi} = \xi$.

IV. $|\varepsilon_{n+1}| = |x_{n+1} - \xi| = |g(x_n) - g(\xi)| = \left| \frac{1}{2} \cdot (x_n - \xi)^2 \cdot g''(\overline{\xi_n}) \right| = \frac{1}{2} \cdot |\varepsilon_n|^2 \cdot |g''(\overline{\xi_n})|$

με $\overline{\xi_n} \in \left(min(x_n, \xi), max(x_n, \xi)\right)$

οπότε

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^2} = \frac{1}{2} \cdot |g''(\overline{\xi_n})| \approx \frac{1}{2} \cdot |g''(\xi)|$, αφού $x_n \to \xi$ και $\overline{\xi_n} \to \xi$, επομένως, αφού $|g''(\xi)| \ne 0$, η σύγκλιση είναι τετραγωνική.

Παράδειγμα 4.11

- Αν η εξίσωση $x^2 - 4 = 0$ και η αναδιάταξή της $x = \frac{1}{2} \cdot (x + \frac{4}{x}) \equiv g(x)$ έχει ρίζα το $\xi = 2$ στο διάστημα $I = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $|x - \xi| \le \rho, \forall x \in I$ και $|g'(\xi)| = 0,$ τότε η ακολουθία

$x_0, x_1, ..., x_n \in I$ συγκλίνει στη *μοναδική* πραγματική ρίζα της $x = g(x)$ στο διάστημα $I = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$ και η σύγκλιση είναι Τετραγωνική (Τάξη Σύγκλισης = 2).

<u>Απάντηση</u>

Η εξίσωση $x = \frac{1}{2} \cdot (x + \frac{4}{x}) \equiv g(x)$ αποτελεί αναδιάταξή της $x^2 - 4 = 0$ και προκύπτει ως εξής :

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow 2 \cdot x^2 - x^2 - 4 = 0 \Rightarrow 2 \cdot x^2 = x^2 + 4 \Rightarrow \frac{2 \cdot x^2}{2 \cdot x} = \frac{x^2}{2 \cdot x} + \frac{4}{2 \cdot x} \Rightarrow x = \frac{1}{2}(x + \frac{4}{x}) \equiv g(x)$$

Αν παραγωγίσουμε τη $g(x)$ θα έχουμε :

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{4}{x^2}\right) \text{ και } g'(\xi) = g'(2) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{4}{2^2}\right) = 0$$

Αν δείξουμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 4.4, τότε η μέθοδος συγκλίνει. Έχουμε όμως :

$$g'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{4}{(\frac{3}{2})^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{4}{\frac{9}{4}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{16}{9}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{7}{9}\right) = -\frac{7}{18}$$

$$g'\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{4}{(\frac{7}{2})^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{4}{\frac{49}{4}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{16}{49}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{33}{49}\right) = \frac{33}{98}$$

οπότε αν η $g'(x)$ είναι συνεχής στο I, τότε $\forall x \in I$ θα ισχύει

$$-\frac{7}{18} \le g'(x) \le \frac{33}{98} \le \frac{7}{18}$$

οπότε

$$\left|g'(x)\right| \le \frac{7}{18} = \lambda < 1$$

Επίσης :

$$g''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot 2 \cdot x}{x^4}\right) = \frac{4}{x^3}$$

$$g''(\xi) = g''(2) = \frac{4}{2^3} = \frac{1}{2} \neq 0$$

$$g''\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{(\frac{3}{2})^3} = \frac{4}{\frac{27}{8}} = \frac{32}{27}$$

$$g''\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{4}{(\frac{7}{2})^3} = \frac{4}{\frac{343}{8}} = \frac{32}{343}$$

οπότε

$$\frac{1}{2}\cdot\left|g''(x)\right|\le\frac{1}{2}\cdot\frac{32}{27}=\frac{16}{27}=M \text{ και } |b-a|=\left|\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\right|=2$$

Άρα $\lambda=M\cdot|b-a|=\frac{16}{27}\cdot 2=\frac{32}{27}>1$.

Βρίσκουμε το μέσον $x_{μέσον}=\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{7}{2}}{2}=\frac{5}{2}$ του διαστήματος $I=\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)$ και μεταξύ των δύο υποδιαστημάτων $\left(\frac{3}{2},x_{μέσον}\right),\left(x_{μέσον},\frac{7}{2}\right)$ παίρνουμε σαν νέο διάστημα αυτό που περιέχει τη ρίζα, δηλαδή το $\left(\frac{3}{2},x_{μέσον}\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$, οπότε θα έχουμε :

$$g''\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{4}{(\frac{3}{2})^3}=\frac{4}{\frac{27}{8}}=\frac{32}{27}$$
$$g''\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{(\frac{5}{2})^3}=\frac{4}{\frac{125}{8}}=\frac{32}{125}$$

οπότε

$$\frac{1}{2}\cdot g''(x)\le\frac{1}{2}\cdot\frac{32}{27}=\frac{16}{27}=M<1 \text{ και } |b-a|=\left|\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\right|=1$$

Άρα υπάρχει $\lambda=M\cdot|b-a|=\frac{16}{27}<1$, επομένως η ακολουθία $x_0,x_1,...,x_n\in I$ συγκλίνει στη *μοναδική* πραγματική ρίζα της $x=g(x)$ και αφού $g''(\xi)=g''(2)=\frac{1}{2}\neq 0$, η σύγκλιση είναι Τετραγωνική (Τάξη Σύγκλισης = 2). Για $x_0=\frac{3}{2}\in min((a,\xi),(\xi,b))$ θα έχουμε :

$$x_1=g(x_0)=\frac{1}{2}\cdot\left(x_0+\frac{4}{x_0}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{8}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{6}=\frac{25}{12}=2.083333\in I,$$

$$|\varepsilon_1|=|x_1-\xi|=|2.083333-2|=0.083333>0.05=\tfrac{1}{2}\cdot 10^{-1}$$

$$x_2=g(x_1)=\frac{1}{2}\cdot\left(x_1+\frac{4}{x_1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{25}{12}+\frac{4}{\frac{25}{12}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{25}{12}+\frac{48}{25}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1201}{300}=\frac{1201}{600}=2.001666\in I,$$

$$|\varepsilon_2|=|x_2-\xi|=|2.001666-2|=0.001666<0.005=\tfrac{1}{2}\cdot 10^{-2}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.5: *Αν η εξίσωση $f(x)=0$ και η αναδιάταξή της $x=g(x)$ έχει ρίζα το ξ και οι συναρτήσεις $f(x), g(x), g'(x), g''(x), \ldots, g^{(k)}(x)$ είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο διάστημα $I=(a,b)$, για το οποίο ισχύει $|x-\xi| \le \rho, \ \forall x \in I$ και $|g'(\xi)|=0$, $|g''(\xi)|=0, \ldots, |g^{(k-1)}(\xi)|=0$ και $|g^{(k)}(\xi)| \neq 0$ τότε :*

I. Αν $x_0 \in min((a,\xi),(\xi,b))$ *τότε* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$

II. $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$

III. Η ρίζα ξ είναι η ***μοναδική*** *πραγματική ρίζα της* $x=g(x)$

IV. Τάξη Σύγκλισης = k

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή του *Θεωρήματος 4.4*, αφού χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα του Taylor μέχρι και τον k όρο. Το σφάλμα στη $n+1$ επανάληψη θα είναι :

$$|\varepsilon_{n+1}| = |x_{n+1}-\xi| = |g(x_n)-g(\xi)| = \left|\frac{1}{k!}\cdot(x_n-\xi)^k \cdot g^{(k)}(\overline{\xi_n})\right| = \frac{1}{k!}\cdot|\varepsilon_n|^k \cdot \left|g^{(k)}(\overline{\xi_n})\right|$$

με $\overline{\xi_n} \in (min(x_n,\xi), max(x_n,\xi))$

οπότε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^k} = \frac{1}{k!}\cdot\lim_{n\to\infty}\left|g^{(k)}(\overline{\xi_n})\right| \approx \frac{1}{k!}\cdot\left|g^{(k)}(\xi)\right| \neq 0$$

(αφού $x_n \to \xi$ και $\overline{\xi_n} \to \xi$), επομένως, αφού $|g^{(k)}(\xi)| \neq 0$, η σύγκλιση είναι *k* τάξεως.

Παράδειγμα 4.12

- Αν η εξίσωση $x^3 - 4\cdot x = 0$ και η αναδιάταξή της $x = \frac{x^3}{4} \equiv g(x)$ έχει ρίζα το $\xi = 0$ στο διάστημα $I=(-1,1)$, για το οποίο ισχύει $|x-\xi| \le \rho, \forall x \in I$ και $|g'(\xi)|=0$, τότε η σύγκλιση είναι Κυβική (Τάξη Σύγκλισης = *3*)

<u>Απάντηση</u>

Η εξίσωση $x = \frac{x^3}{4} \equiv g(x)$ αποτελεί αναδιάταξή της $x^3 - 4\cdot x = 0$ και προκύπτει ως εξής :

$$x^3 - 4\cdot x = 0 \Rightarrow x^3 = 4\cdot x \Rightarrow x = \frac{x^3}{4} \equiv g(x)$$

Αν παραγωγίσουμε τη $g(x)$ θα έχουμε :

$$g'(x)=\frac{3\cdot x^2}{4} \text{ και } g'(\xi)=g'(0)=\frac{3\cdot 0}{4}=0$$
$$g''(x)=\frac{6\cdot x}{4} \text{ και } g''(\xi)=g''(0)=\frac{6\cdot 0}{4}=0$$
$$g'''(x)=\frac{6}{4} \text{ και } g'''(\xi)=g'''(0)=\frac{6}{4}\neq 0$$

επομένως η σύγκλιση είναι κυβική.

Για $x_0=1$, θα έχουμε :

$$x_1=g(x_0)=\frac{(x_0)^3}{4}=\frac{1}{4}=0.25\in I,\quad |\varepsilon_1|=|x_1-\xi|=|0.25-0|=0.25>0.05=\tfrac{1}{2}\cdot 10^{-1}$$
$$x_2=g(x_1)=\frac{(x_1)^3}{4}=\frac{(\frac{1}{4})^3}{4}=\frac{\frac{1}{64}}{4}=\frac{1}{256}=0.0039\in I,$$
$$|\varepsilon_2|=|x_2-\xi|=|0.0039-0|=0.0039<0.005=\tfrac{1}{2}\cdot 10^{-2}$$

Παρατήρηση

- Αν δεν ισχύει $|g'(\xi)|<1$ τότε η μέθοδος γενικά δεν συγκλίνει.

Παράδειγμα 4.13

- Αν η εξίσωση $x=\frac{4}{x}\equiv g(x)$ αποτελεί αναδιάταξή της $x^2-4=0$ με ρίζα το $\xi=2$ και $I=\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$ να δειχθεί ότι δεν συγκλίνει.

<u>Απάντηση</u>

Η εξίσωση $x=\frac{4}{x}\equiv g(x)$ αποτελεί αναδιάταξή της $x^2-4=0$ και προκύπτει ως εξής

$$x^2-4=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow \frac{x^2}{x}=\frac{4}{x}\Rightarrow x=\frac{4}{x}\equiv g(x)$$

Αν παραγωγίσουμε τη $g(x)$ θα έχουμε :

$$g'(x)=-\frac{4}{x^2} \text{ και } |g'(\xi)|=|g'(2)|=\left|-\frac{4}{2^2}\right|=|-1|=1$$

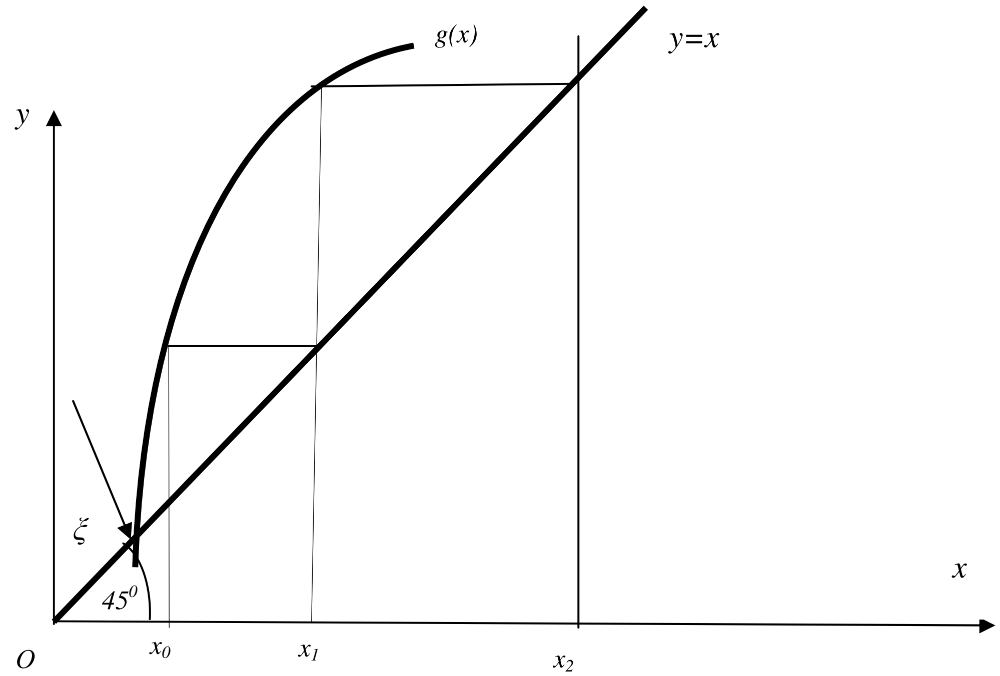
οπότε η μέθοδος δεν συγκλίνει.

Για $x_0=\frac{3}{2}\in I$ θα έχουμε :

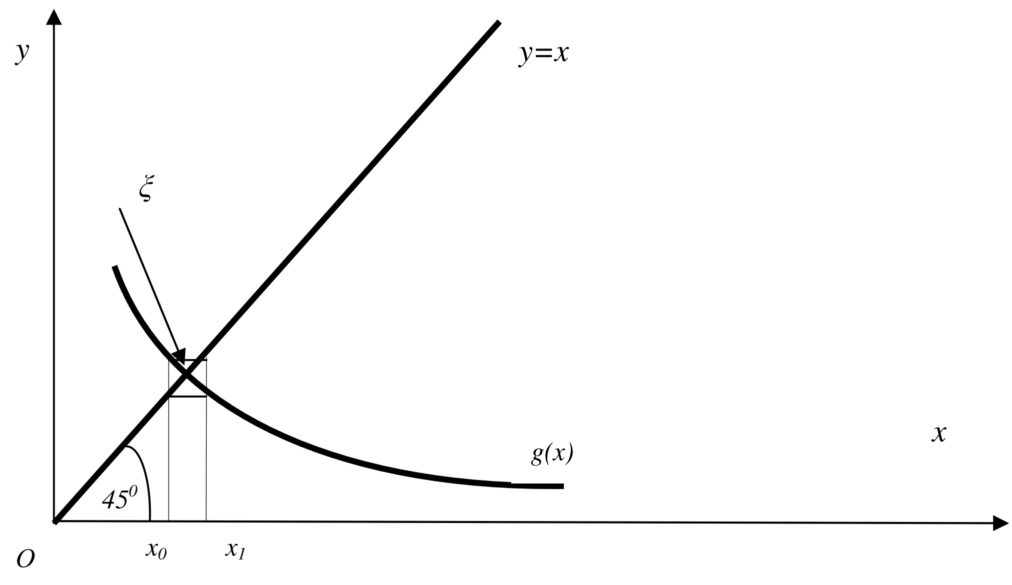
$$x_1 = g(x_0) = \frac{4}{x_0} = \frac{4}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} = 2.6666 \notin I\ , \quad |\varepsilon_1| = |x_1 - \xi| = |2.666 - 2| = 0.666 > 0.05 = \tfrac{1}{2}\cdot 10^{-1}$$

$$x_2 = g(x_1) = \frac{4}{x_1} = \frac{4}{\frac{8}{3}} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \ldots$$

Όπως φαίνεται, οι τιμές των x_i εναλλάσσονται μεταξύ του 2.6666 και του $\frac{3}{2}$ χωρίς να συγκλίνουν ποτέ στη ρίζα $\xi = 2$. Η Γεωμετρική Ερμηνεία της μεθόδου στην περίπτωση που οι προσεγγίσεις αποκλίνουν ή παλινδρομούν φαίνεται στα Σχήματα 4.4α, 4.4β



Σχήμα 4.4α : Γεωμετρική Ερμηνεία της μεθόδου των Διαδοχικών Προσεγγίσεων – Απόκλιση



Σχήμα 4.4β : Γεωμετρική Ερμηνεία της μεθόδου των Διαδοχικών Προσεγγίσεων – Παλινδρόμιση

4.6 Μέθοδος Newton-Raphson

Αν και η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων αποτελεί βελτίωση των προηγούμενων μεθόδων, έχει κάποιες αδυναμίες : Πρώτον, θα πρέπει να βρούμε αναδιάταξη $x = g(x)$ της $f(x) = 0$ για την οποία ισχύει $\left|g'(x)\right| < 1$ και δεύτερο, η σύγκλιση είναι συνήθως γραμμική. Μια δημοφιλής μέθοδος επίλυσης εξισώσεων, η οποία εγγυάται τουλάχιστον τετραγωνική σύγκλιση, είναι η μέθοδος **Newton-Raphson**, η οποία για την εφαρμογή της απαιτεί την ύπαρξη της πρώτης και δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης $f(x) = 0$ στο διάστημα $I = (a,b)$ και αποτελεί μια μερική περίπτωση της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων, ενώ ο γενικός της επαναληπτικός τύπος είναι $x = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \equiv g(x)$, $f'(x) \neq 0$

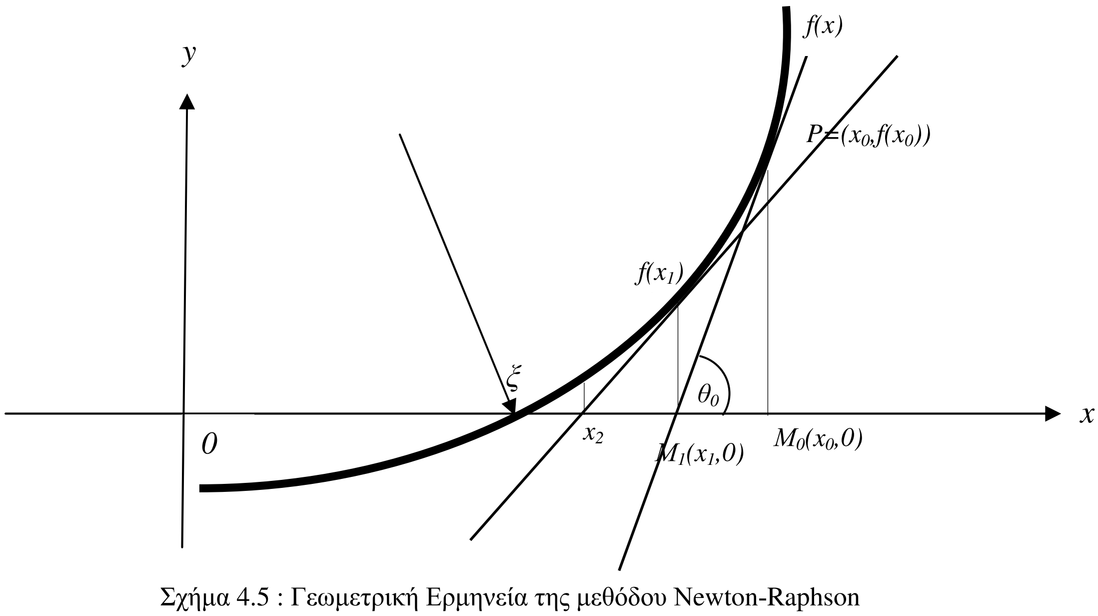
4.6.1 Περιγραφή της Μεθόδου Newton-Raphson

Έστω η εξίσωση $f(x) = 0$ με μια ρίζα ξ στο διάστημα $I_0 = (a_0, b_0)$. Υποθέτουμε ότι για τη συνάρτηση $f(x)$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος (4.1) και η εξίσωση έχει μία μοναδική ρίζα στο διάστημα $I_0 = (a_0, b_0)$. Για την εύρεση της ρίζας ξ, απαιτούνται τα παρακάτω βήματα:

1. Βρίσκουμε ένα $x_0 \in (a_0, b_0)$
2. Αν $f'(x) \neq 0$ μέχρι να βρούμε την επιθυμητή ακρίβεια, βρίσκουμε προσεγγίσεις της ζητούμενης ρίζας ξ σύμφωνα με τον τύπο $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ **,** $n = 0,1,2,...$

4.6.2 Γεωμετρική Ερμηνεία της Μεθόδου Newton-Raphson

Η Γεωμετρική Ερμηνεία της μεθόδου φαίνεται στο Σχήμα 4.5



Σχήμα 4.5 : Γεωμετρική Ερμηνεία της μεθόδου Newton-Raphson

- Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.5, σαν πρώτη προσέγγιση της ζητούμενης ρίζας παίρνουμε την τομή του άξονα x (τετμημένη x_1) με την εφαπτομένη στην $f(x)$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$, την επόμενη εφαπτομένη στην $f(x)$ στο σημείο $(x_1, f(x_1))$ μέχρις ότου η τετμημένη x_n να προσεγγίσει τη ρίζα ξ με την ακρίβεια που θέλουμε. Είναι φανερό ότι απ' το τρίγωνο M_0M_1P θα έχουμε:

$$M_0M_1 = x_0 - x_1 = \frac{M_0P}{\varepsilon\phi\theta_0} = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Επαγωγικά θα ισχύει:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\ ,\ \ n = 0,1,2,...$$

Παρατήρηση

- Στην παραπάνω σχέση καταλήγουμε αν χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση ευθείας για την εφαπτομένη της $f(x)$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = (x - x_0)\cdot\lambda_{\varepsilon\varphi\alpha\pi\tau o\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\varsigma} = (x - x_0)\cdot f'(x_0)$$

Για $x = x_1, (\ y = 0\ )$, η προηγούμενη σχέση γίνεται :

$$0 - f(x_0) = (x_1 - x_0)\cdot f'(x_0) \Rightarrow -f(x_0) = (x_1 - x_0)\cdot f'(x_0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

4.6.3 Αλγόριθμος της Μεθόδου Newton-Raphson

Αν θελήσουμε να υλοποιήσουμε την παραπάνω μέθοδο στον Η/Υ, χρησιμοποιούμε τον παρακάτω αλγόριθμο :

Αλγόριθμος της Μεθόδου Newton-Raphson

<u>Αρχή</u>
<u>Βρίσκουμε</u> διάστημα (a,b) τέτοιο ώστε να ισχύει $f(a)\cdot f(b) < 0$
<u>Θέτουμε</u> $x = x_0 \in (a,b)$
<u>Για Όσο</u> $|f(x)| > 10^{-6}$ και $f'(x) \neq 0$
  <u>Βρίσκουμε</u> τη νέα προσέγγιση $x = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$
<u>Τέλος</u>

4.6.4 Σύγκλιση της Μεθόδου Newton-Raphson

Απ' τον ορισμό της μεθόδου θα έχουμε :

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \text{ και } g'(x) = 1 - \frac{f'(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)\cdot f''(x)}{(f'(x))^2}$$

και

$$g'(\xi) = \frac{f(\xi)\cdot f''(\xi)}{(f'(\xi))^2} = 0$$

οπότε η σύγκλιση είναι τουλάχιστον τετραγωνική. Αν ισχύει $g''(\xi) \neq 0$, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η μέθοδος συγκλίνει. Έχουμε όμως :

$$g''(x) = \frac{(f(x)\cdot f''(x))'\cdot(f'(x))^2 - f(x)\cdot f''(x)(f'(x)^2)'}{(f'(x))^4}$$

$$= \frac{f'(x)\cdot f''(x)\cdot(f'(x))^2 + f(x)\cdot f'''(x)\cdot(f'(x)^2) - 2\cdot f(x)\cdot(f''(x))^2\cdot f'(x)}{(f'(x))^4}$$

και

$$g''(\xi) = \frac{f'(\xi)\cdot f''(\xi)\cdot(f'(\xi))^2 + f(\xi)\cdot f'''(\xi)\cdot(f'(\xi)^2) - 2\cdot f(\xi)\cdot(f''(\xi))^2\cdot f'(\xi)}{(f'(\xi))^4}$$

$$= \frac{f'(\xi)\cdot f''(\xi)'\cdot(f'(\xi))^2}{(f'(\xi))^4} = \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}.$$

Παρατήρηση

❖ Για τη σύγκλιση της μεθόδου, διατυπώνουμε το επόμενο θεώρημα :

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.6: Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζα το ξ, και οι συναρτήσεις $f(x), f'(x), f''(x)$ είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο διάστημα $I=(a,b)$, για το οποίο ισχύει $|x-\xi| \leq \rho, \forall x \in I$ και $f''(\xi) \neq 0$ τότε με την εφαρμογή της μεθόδου Newton-Raphson θα έχουμε :

I. Αν $x_0 \in (min(a,\xi),(\xi,b))$ τότε $x_1, x_2, ..., x_n \in I$

II. $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$

*III. Η ρίζα ξ είναι η **μοναδική** πραγματική ρίζα της $f(x)=0$*

IV. Η σύγκλιση είναι Τουλάχιστον Τετραγωνική (Τάξη Σύγκλισης >= 2)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

I. Είναι γνωστό ότι $\varepsilon_0 = x_0 - \xi$ και $\varepsilon_1 = x_1 - \xi$,

Επίσης, $x_0 \in I \Rightarrow |\varepsilon_0| = |x_0 - \xi| \le \rho$

Αν αναπτύξουμε τη συνάρτηση $f(\xi)$ ως προς x_0 και πάρουμε τους 3 πρώτους όρους του αναπτύγματος του Taylor θα έχουμε :

$$f(\xi) = f(x_0) + (\xi - x_0)\cdot f'(x_0) + \frac{1}{2}\cdot(\xi - x_0)^2 \cdot f''(\overline{\xi_0}) = f(x_0) - \varepsilon_0 \cdot f'(x_0) + \frac{1}{2}\cdot \varepsilon_0^{\,2} \cdot f''(\overline{\xi_0}) = 0$$

με $\overline{\xi_0} \in \left(min(\left(x_0, \xi\right), max\left(x_0, \xi\right)\right) \in I$

Ισχύει όμως :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow f(x_0) = (x_0 - x_1)\cdot f'(x_0)$$

οπότε, η προηγούμενη σχέση γίνεται :

$$(x_0 - x_1)\cdot f'(x_0) - \varepsilon_0 \cdot f'(x_0) + \frac{1}{2}\cdot \varepsilon_0^{\,2} \cdot f''(\overline{\xi_0}) = 0 \Rightarrow$$
$$((x_0 - \varepsilon_0) - x_1)\cdot f'(x_0) + \frac{1}{2}\cdot \varepsilon_0^{\,2} \cdot f''(\overline{\xi_0}) = 0 \Rightarrow$$
$$(\xi - x_1)\cdot f'(x_0) + \frac{1}{2}\cdot \varepsilon_0^{\,2} \cdot f''(\overline{\xi_0}) = 0 \Rightarrow$$
$$-\varepsilon_1 \cdot f'(x_0) + \frac{1}{2}\cdot \varepsilon_0^{\,2} \cdot f''(\overline{\xi_0}) = 0 \Rightarrow$$
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\cdot \varepsilon_0^{\,2} \cdot \frac{f''(\overline{\xi_0})}{f'(x_0)}$$

Η συνάρτηση $f''(x)$ όμως είναι συνεχής και φραγμένη στο *I*, άρα θα υπάρχει *Λ*, τέτοιο ώστε να ισχύει :

$$|f''(x)| \le \Lambda, \quad \forall x \in I.$$

Επίσης και η συνάρτηση $f'(x)$ είναι συνεχής και φραγμένη στο *I*, άρα θα υπάρχει *K*, τέτοιο ώστε να ισχύει :

$$|f'(x)| \ge K, \quad \forall x \in I$$

οπότε θα ισχύει και

$$\frac{1}{\left|f^{'}(x)\right|} \le \frac{1}{K} \Rightarrow \frac{\left|f^{''}(x)\right|}{\left|f^{'}(x)\right|} \le \frac{\Lambda}{K} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{\left|f^{''}(x)\right|}{\left|f^{'}(x)\right|} \le \frac{\Lambda}{2\cdot K}$$

οπότε και $\frac{1}{2}\cdot\frac{\left|f^{''}(\overline{\xi_0})\right|}{\left|f^{'}(x_0)\right|} \le \frac{\Lambda}{2\cdot K}$ και η αρχική σχέση γίνεται :

$$\left|\varepsilon_1\right| = \left|x_1 - \xi\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\frac{f^{''}(\overline{\xi_0})}{f^{'}(x_0)}\right|\cdot\left|\varepsilon_0\right|^2 \le \frac{\Lambda}{2\cdot K}\cdot\left|\varepsilon_0\right|^2$$

Θα ισχύει όμως :

$$\left|\varepsilon_0\right| = \left|x_0 - \xi\right| \le \left|b-a\right|$$

οπότε θα έχουμε :

$$\left|x_1 - \xi\right| \le \frac{\Lambda}{2\cdot K}\cdot\left|\varepsilon_0\right|^2 \le \frac{\Lambda}{2\cdot K}\cdot\left|b-a\right|\cdot\left|\varepsilon_0\right| = \lambda\cdot\left|\varepsilon_0\right| \le \lambda\cdot\rho < \rho$$

όπου $\lambda = \frac{\Lambda}{2\cdot K}\cdot\left|b-a\right|$ και $\lambda < 1$, οπότε και το $x_1 \in I$. Επαγωγικά μπορεί να αποδειχθεί, ότι αν $x_{n-1} \in I$ και το $x_n \in I$.

II. $\left|\varepsilon_1\right| = \left|x_1 - \xi\right| \le \lambda\cdot\left|x_0 - \xi\right| = \lambda\cdot\left|\varepsilon_0\right|$

$\left|\varepsilon_2\right| = \left|x_2 - \xi\right| \le \lambda\cdot\left|x_1 - \xi\right| \le \lambda^2\cdot\left|\varepsilon_0\right|$

…

$\left|\varepsilon_n\right| = \left|x_n - \xi\right| \le \lambda\cdot\left|x_{n-1} - \xi\right| \le \lambda^n\cdot\left|\varepsilon_0\right| \to 0$, αφού $\lambda^n \to 0$

οπότε

$$\lim_{n\to\infty}\left|\varepsilon_n\right| = \lim_{n\to\infty}\left|x_n - \xi\right| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$$

III. Αν υπάρχει κι άλλη ρίζα $\overline{\xi} \ne \xi, \overline{\xi} \in I$ τότε θα έχουμε :

$$\overline{\xi} = \overline{\xi} - \frac{f(\overline{\xi})}{f^{'}(\overline{\xi})} \Rightarrow f(\overline{\xi}) = 0,$$

επομένως $\overline{\xi} = \xi$.

IV. $\left|\varepsilon_{n+1}\right| = \left|x_{n+1} - \xi\right| = \left|g(x_n) - g(\xi)\right| = \left|\frac{1}{2}\cdot(x_n - \xi)^2 \cdot g''(\overline{\xi_n})\right| \approx \frac{1}{2}\cdot\left|\varepsilon_n\right|^2 \cdot \left|g''(\xi)\right|$

με $\overline{\xi_n} \in [\,min(x_n,\xi), max(x_n,\xi)\,]$, αφού $x_n \to \xi$ και $\overline{\xi_n} \to \xi$,

οπότε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\varepsilon_{n+1}\right|}{\left|\varepsilon_n\right|^2} \approx \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left|g''(\xi)\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}\right|$$

επομένως, αν $\left|f''(\xi)\right| \neq 0$, η σύγκλιση είναι τετραγωνική.

Παράδειγμα 4.14

- Αν η εξίσωση $x^2 - 4 = 0$ έχει ρίζα το $\xi = 2$ στο διάστημα $I = \left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $\left|x - \xi\right| \le \rho, \forall x \in I$ τότε η ακολουθία $x_0, x_1, ..., x_n \in I$ συγκλίνει στη ρίζα $\xi = 2$ και η σύγκλιση είναι Τετραγωνική (Τάξη Σύγκλισης = 2).

<u>Απάντηση</u>

Θα έχουμε : $x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2-4}{2\cdot x} = \frac{2\cdot x^2 - x^2 + 4}{2\cdot x} = \frac{x^2+4}{2\cdot x} = \frac{1}{2}\cdot\left(x + \frac{4}{x}\right) \equiv g(x)$

$g'(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)$ και $g'(\xi) = g'(2) = \frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{4}{2^2}\right) = 0$

$g''(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4\cdot 2\cdot x}{x^4}\right) = \frac{4}{x^3}$ και $g''(\xi) = g''(2) = \frac{4}{2^3} = \frac{1}{2} \neq 0$

Αν δείξουμε ότι ισχύουν όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος 4.6 ($\left|f'(\xi)\right| = 0$ και $\left|f''(\xi)\right| \neq 0$), τότε η μέθοδος συγκλίνει και η σύγκλιση είναι τετραγωνική. Έχουμε όμως:

$f'(x) = 2\cdot x$ και $f''(x) = 2$

$f'\left(\frac{3}{2}\right) = 2\cdot\frac{3}{2} = 3$

$f'\left(\frac{5}{2}\right) = 2\cdot\frac{5}{2} = 5$

$f'(\xi) = f'(2) = 2\cdot 2 = 4$

οπότε

$\left|f'(x)\right| \ge 3 = K\ ,\ \ \forall x \in I$

Επίσης :

$f''(x) = 2$ και $\left|f''(x)\right| \le 2 = \Lambda$, $\forall x \in I$ οπότε

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\left|f''(x)\right|}{\left|f'(x)\right|} \le \frac{1}{2}\cdot\frac{\Lambda}{K} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3} < 1 \text{ και } \left|b-a\right| = \left|\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\right| = 1$$

Άρα υπάρχει $\lambda = \frac{\Lambda}{2\cdot K}\cdot\left|b-a\right| = \frac{1}{3} < 1$, οπότε η ακολουθία $x_0, x_1, ..., x_n \in I$ συγκλίνει στη ρίζα $\xi = 2$ και η σύγκλιση είναι Τετραγωνική (Τάξη Σύγκλισης = 2).

$\frac{\left|\varepsilon_{n+1}\right|}{\left|\varepsilon_n\right|^2} \approx \frac{1}{2}\cdot\left|\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}\right|$, επομένως, αφού $\left|f''(\xi)\right| = 2 \ne 0$, η σύγκλιση είναι τετραγωνική.

Για $x_0 = \frac{3}{2}$ θα έχουμε :

$$x_1 = g(x_0) = \frac{1}{2}\cdot\left(x_0 + \frac{4}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{8}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{25}{6} = \frac{25}{12} = 2.083333 \in I,$$

$$\left|\varepsilon_1\right| = \left|x_1 - \xi\right| = \left|2.083333-2\right| = 0.083333 > 0.05 = \tfrac{1}{2}\cdot 10^{-1}$$

$$x_2 = g(x_1) = \frac{1}{2}\cdot\left(x_1 + \frac{4}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{25}{12}+\frac{4}{\frac{25}{12}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{25}{12}+\frac{48}{25}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1201}{300} = \frac{1201}{600} = 2.001666 \in I$$

$$\left|\varepsilon_2\right| = \left|x_2 - \xi\right| = \left|2.001666-2\right| = 0.001666 < 0.005 = \tfrac{1}{2}\cdot 10^{-2}$$

4.6.5 Σύγκλιση της Μεθόδου Newton-Raphson σε Πολλαπλή Ρίζα

Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει πολλαπλή ρίζα στο $I = (a,b)$, η σύγκλιση της μεθόδου Newton-Raphson είναι γραμμική, όπως αποδεικνύεται με το επόμενο θεώρημα :

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.7: Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει πολλαπλή ρίζα (πολλαπλότητας k) το ξ στο διάστημα $I = (a,b)$ τότε η σύγκλιση είναι Γραμμική (Τάξη Σύγκλισης =1)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Η συνάρτηση $f(x) = 0$ θα δίνεται απ' τη σχέση :

$f(x) = (x-\xi)^k \cdot h(x) = 0$, με $h(\xi) \ne 0$

οπότε

$$f'(x)=k\cdot(x-\xi)^{k-1}\cdot h(x)+(x-\xi)^{k}\cdot h'(x)=(x-\xi)^{k-1}\cdot(k\cdot h(x)+(x-\xi)\cdot h'(x))$$

$$f''(x)=$$
$$=(k-1)\cdot(x-\xi)^{k-2}\cdot(k\cdot h(x)+(x-\xi)\cdot h'(x))+(x-\xi)^{k-1}\cdot((k+1)\cdot h'(x)+(x-\xi)\cdot h''(x))$$
$$=(x-\xi)^{k-2}\cdot(k\cdot(k-1)\cdot h(x)+(k-1)\cdot(k+1)\cdot(x-\xi)\cdot h'(x)+(x-\xi)^{2}\cdot h''(x))$$

Αλλά

$$g'(x)=\frac{f(x)\cdot f''(x)}{(f'(x))^{2}}$$
$$=\frac{(x-\xi)^{k}\cdot h(x)\cdot(x-\xi)^{k-2}\cdot(k\cdot(k-1)\cdot h(x)+(k-1)\cdot(k+1)\cdot(x-\xi)\cdot h'(x)+(x-\xi)^{2}\cdot h''(x))}{((x-\xi)^{k-1}\cdot(k\cdot h(x)+(x-\xi)\cdot h'(x))^{2}}$$
$$=\frac{h(x)\cdot(k\cdot(k-1)\cdot h(x)+(k-1)\cdot(k+1)\cdot(x-\xi)\cdot h'(x)+(x-\xi)^{2}\cdot h''(x))}{((k\cdot h(x)+(x-\xi)\cdot h'(x))^{2}}$$

και

$$g'(\xi)=\frac{h(\xi)\cdot(k\cdot(k-1)\cdot h(\xi)+(k-1)\cdot(k+1)\cdot(\xi-\xi)\cdot h'(x)+(\xi-\xi)^{2}\cdot h''(\xi))}{((k\cdot h(\xi)+(\xi-\xi)\cdot h'(x))^{2}}$$
$$=\frac{h(\xi)\cdot(k\cdot(k-1)\cdot h(\xi))}{(k\cdot h(\xi))^{2}}=\frac{k-1}{k}<1$$

οπότε η σύγκλιση είναι γραμμική.

Παράδειγμα 4.15

- Αν η εξίσωση $(x-2)^{3}=0$ έχει πολλαπλή ρίζα το $\xi=2$ στο διάστημα $I=\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$, τότε η σύγκλιση είναι Γραμμική.

<u>Απάντηση</u>

$$f'(x)=3\cdot(x-2)^{2}$$
$$f''(x)=6\cdot(x-2)$$
$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{(x-2)^{3}}{3\cdot(x-2)^{2}}=x-\frac{(x-2)}{3}=\frac{3\cdot x-x+2}{3}=\frac{2\cdot x+2}{3}=\frac{2}{3}(x+1)$$
και
$$g'(x)=\frac{2}{3}<1$$

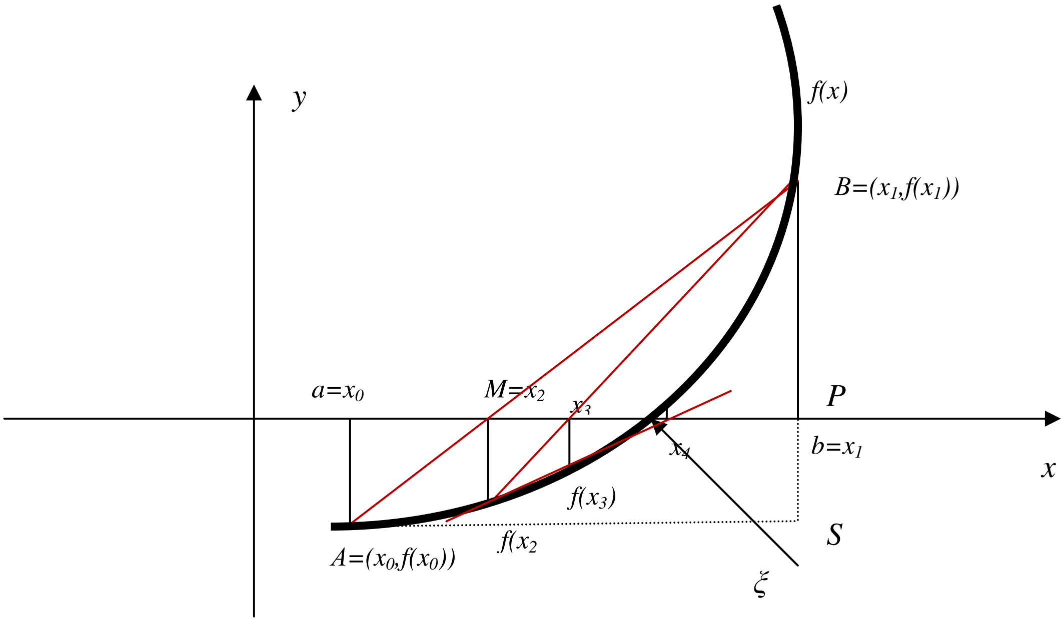
επομένως η σύγκλιση είναι Γραμμική.

4.7 Μέθοδος της Χορδής

Όταν ο υπολογισμός της παραγώγου της συνάρτησης $f(x)=0$ είναι δύσκολος, μία σχετικά γρήγορη μέθοδος προσδιορισμού της ρίζας μίας εξίσωσης είναι η **Μέθοδος της Χορδής**, στην οποία προσεγγίζουμε τη ρίζα με τη χορδή που ορίζεται απ' τις τιμές που παίρνει η συνάρτηση στις δύο προηγούμενες προσεγγίσεις, γι' αυτό και η μέθοδος απαιτεί να ξεκινήσουμε με 2 αρχικές τιμές, π.χ. τα άκρα ενός διαστήματος που περιέχει τη ρίζα.

4.7.1 Γεωμετρική Ερμηνεία της Μεθόδου της Χορδής

Η Γεωμετρική Ερμηνεία της μεθόδου φαίνεται στο Σχήμα 4.6 :



Σχήμα 4.6 : Γεωμετρική Ερμηνεία της μεθόδου της Χορδής

- Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.6, σαν πρώτη προσέγγιση της ζητούμενης ρίζας παίρνουμε την τομή του άξονα *x* (τετμημένη x_2) με τη χορδή που ορίζεται απ' τα σημεία $(x_0, f(x_0))$ και $(x_1, f(x_1))$. Στο σημείο αυτό της τομής φέρνουμε την κάθετο στον άξονα των *x*, η οποία συναντά την καμπύλη στο σημείο $(x_2, f(x_2))$. Φέρνουμε τη χορδή που ορίζεται απ' τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ και συνεχίζουμε την παραπάνω διαδικασία, μέχρις ότου η τετμημένη x_n να προσεγγίσει τη ρίζα ξ με την ακρίβεια που θέλουμε. Είναι φανερό ότι απ' τα όμοια τρίγωνα *MBP* και *ASB* θα έχουμε:

$$\frac{MP}{AS} = \frac{BP}{BS}$$

ή

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)} \Rightarrow x_1 - x_2 = \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \cdot f(x_1) \Rightarrow$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \cdot f(x_1)$$

και επαγωγικά :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_{n-1} - x_n}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} \cdot f(x_n), \quad n = 0,1,2,...$$

Παρατήρηση

- Στην παραπάνω σχέση καταλήγουμε αν χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση ευθείας για τη χορδή AB :

$$y - f(x_1) = (x - x_1) \cdot \lambda_{\chi o\rho\delta\acute{\eta}\varsigma} = (x - x_1) \cdot \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Για $x = x_2$ $(y = 0)$, η προηγούμενη σχέση γίνεται :

$$y - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \Rightarrow -f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \Rightarrow$$

$$x_2 - x_1 = -f(x_1) \cdot \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \cdot f(x_1)$$

4.7.2 Αλγόριθμος της Μεθόδου της Χορδής

Αν θελήσουμε να υλοποιήσουμε την παραπάνω μέθοδο στον Η/Υ, χρησιμοποιούμε τον παρακάτω αλγόριθμο :

Αλγόριθμος της Μεθόδου της Χορδής

<u>Αρχή</u>
<u>Βρίσκουμε</u> διάστημα (a,b) τέτοιο ώστε να ισχύει $f(a) \cdot f(b) < 0$
<u>Θέτουμε</u> $x = a$
<u>Θέτουμε</u> $oldx_1 = b$
<u>Θέτουμε</u> $oldx_0 = a$
<u>Βρίσκουμε</u> την πρώτη προσέγγιση $x = oldx_1 - \dfrac{oldx_1 - oldx_0}{f(oldx_1) - f(oldx_0)} \cdot f(oldx_1)$

Για Όσο $|f(x)| > 10^{-6}$

{

Θέτουμε $oldx_0 = oldx_1$ (Κρατάμε την προηγούμενη τιμή του x)

Θέτουμε $oldx_1 = x$ (Κρατάμε την τελευταία τιμή του x)

Βρίσκουμε τη νέα προσέγγιση $x = oldx_1 - \dfrac{oldx_1 - oldx_0}{f(oldx_1) - f(oldx_0)} \cdot f(oldx_1)$

}

Τέλος

❖ Για τη σύγκλιση της μεθόδου, διατυπώνουμε το επόμενο θεώρημα :

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.8: Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζα το ξ και $I = (a,b) = (x_0, x_1)$ διάστημα για το οποίο ισχύει $\xi \in I$, τότε εφαρμόζοντας τη μέθοδο της Χορδής για την ακολουθία $x_2, x_3, ..., x_n$ θα έχουμε :

I. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$

II. Η σύγκλιση είναι περίπου Τετραγωνική (Τάξη Σύγκλισης = 1.618)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

I. $\varepsilon_0 = x_0 - \xi,\ \varepsilon_1 = x_1 - \xi$

Αν πάρουμε τους 3 πρώτους όρους του αναπτύγματος του Taylor και αναπτύξουμε την εξίσωση $f(x) = 0$ ως προς x_0, x_1 θα έχουμε :

$$|\varepsilon_2| = |x_2 - \xi| = \left| x_1 - \frac{x_0 - x_1}{f(x_0) - f(x_1)} \cdot f(x_1) - \xi \right| = \left| (x_1 - \xi) - \frac{(\varepsilon_0 - \xi) - (\varepsilon_1 - \xi)}{f(x_0) - f(x_1)} \cdot f(x_1) \right|$$

$$= \left| \varepsilon_1 - \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) \cdot (f(\xi) + \varepsilon_1 \cdot f'(\xi) + \frac{(\varepsilon_1)^2}{2} \cdot f''(\overline{\xi_1}))}{(f(\xi) + \varepsilon_0 \cdot f'(\xi) + \frac{(\varepsilon_0)^2}{2} \cdot f''(\overline{\xi_0})) - (f(\xi) + \varepsilon_1 \cdot f'(\xi) + \frac{(\varepsilon_1)^2}{2} f''(\overline{\xi_1}))} \right|$$

$$\approx \left| \varepsilon_1 - \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) \cdot (\varepsilon_1 \cdot f'(\xi) + \frac{(\varepsilon_1)^2}{2} \cdot f''(\overline{\xi}))}{(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) \cdot f'(\xi) + \frac{(\varepsilon_0)^2 - (\varepsilon_1)^2}{2} \cdot f''(\overline{\xi})} \right| = \left| \varepsilon_n - \frac{(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_1) \cdot \varepsilon_1 \cdot (f'(\xi) + \frac{\varepsilon_1}{2} \cdot f''(\overline{\xi}))}{(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) \cdot (f'(\xi) + \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{2} \cdot f''(\overline{\xi}))} \right|$$

$$= \left| \varepsilon_1 \cdot \left(1 - \frac{f'(\xi) + \frac{\varepsilon_1}{2} \cdot f''(\overline{\xi})}{f'(\xi) + \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{2} \cdot f''(\overline{\xi})} \right) \right| = \left| \varepsilon_1 \cdot \left(\frac{f'(\xi) + \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{2} \cdot f''(\overline{\xi}) - f'(\xi) - \frac{\varepsilon_1}{2} \cdot f''(\overline{\xi})}{f'(\xi) + \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{2} \cdot f''(\overline{\xi})} \right) \right|$$

$$=\left|\varepsilon_1\cdot\left(\frac{\frac{\varepsilon_0}{2}\cdot f''(\bar{\xi})}{f'(\xi)+\frac{\varepsilon_0+\varepsilon_1}{2}\cdot f''(\bar{\xi})}\right)\right|\approx\left|\frac{1}{2}\varepsilon_1\cdot\varepsilon_0\cdot\frac{f''(\bar{\xi})}{f'(\xi)}\right|=\frac{1}{2}|\varepsilon_1|\cdot|\varepsilon_0|\cdot\left|\frac{f''(\bar{\xi})}{f'(\xi)}\right|$$

όπου $\overline{\xi_0}\in(min(x_0,\xi),max(x_0,\xi))$, $\overline{\xi_1}\in(min(x_1,\xi),max(x_1,\xi))$ και $\bar{\xi}=max(\overline{\xi_1},\overline{\xi_0})$.

Η συνάρτηση $f''(x)$ όμως είναι συνεχής και φραγμένη στο I, άρα θα υπάρχει Λ, τέτοιο ώστε να ισχύει $|f''(x)|\le\Lambda$, $\forall x\in I$. Η συνάρτηση $f'(x)$ επίσης είναι συνεχής και φραγμένη στο I, άρα θα υπάρχει K, τέτοιο ώστε να ισχύει $|f'(x)|\ge K$, $\forall x\in I$, δηλαδή

$$\frac{1}{|f'(x)|}\le\frac{1}{K}\text{ και }\frac{|f''(x)|}{|f'(x)|}\le\frac{\Lambda}{K}\text{ και }\frac{1}{2}\cdot\frac{|f''(x)|}{|f'(x)|}\le\frac{\Lambda}{2\cdot K}$$

οπότε και $\frac{1}{2}\cdot\frac{|f''(\bar{\xi})|}{|f'(\xi)|}\le\frac{\Lambda}{2\cdot K}$, οπότε η αρχική σχέση γίνεται :

$$|\varepsilon_2|=|x_2-\xi|=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{f''(\bar{\xi})}{f'(\xi)}\right|\cdot|\varepsilon_0|\cdot|\varepsilon_1|\le\frac{\Lambda}{2\cdot K}\cdot|\varepsilon_0|\cdot|\varepsilon_1|$$

Θα ισχύει όμως :

$$|\varepsilon_1|=|x_1-\xi|\le|b-a|$$

οπότε θα έχουμε :

$$|\varepsilon_2|=|x_2-\xi|\le\frac{\Lambda}{2\cdot K}\cdot|\varepsilon_0|\cdot|\varepsilon_1|\le\frac{\Lambda}{2\cdot K}\cdot|b-a|\cdot|\varepsilon_0|=\lambda\cdot|\varepsilon_0|$$

όπου $\lambda=\frac{\Lambda}{2\cdot K}\cdot|b-a|$ και $\lambda<1$, οπότε θα έχουμε :

$$|\varepsilon_2|=|x_2-\xi|\le\lambda\cdot|\varepsilon_0|$$
$$|\varepsilon_3|=|x_3-\xi|\le\lambda^2\cdot|\varepsilon_0|$$
$$\ldots$$
$|\varepsilon_n|=|x_n-\xi|\le\lambda^{n-1}\cdot|\varepsilon_0|\to 0$, αφού $\lambda^{n-1}\to 0$

οπότε

$$\lim_{n\to\infty}|\varepsilon_n|=\lim_{n\to\infty}|x_n-\xi|=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=\xi$$

II. $\left|\varepsilon_{n+1}\right| = \left|x_{n+1} - \xi\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\varepsilon_{n-1}\right|\cdot\left|\varepsilon_n\right|\cdot\left|\frac{f''(\bar{\xi})}{f'(\xi)}\right| \approx \frac{1}{2}\cdot\left|\varepsilon_n\right|^2\cdot\left|\frac{f''(\bar{\xi})}{f'(\xi)}\right|$

οπότε

$\frac{\left|\varepsilon_{n+1}\right|}{\left|\varepsilon_n\right|^2} \approx \frac{1}{2}\cdot\left|\frac{f''(\bar{\xi})}{f'(\xi)}\right|$ και αφού $\left|f''(\bar{\xi})\right| \approx \left|f''(\xi)\right| \neq 0$, η σύγκλιση είναι περίπου τετραγωνική.

όπου $\overline{\xi_n} \in \left(min(x_n,\xi), max(x_n,\xi)\right)$, $\overline{\xi_{n-1}} \in \left(min(x_{n-1},\xi), max(x_{n-1},\xi)\right)$ και $\bar{\xi} = max\left(\overline{\xi_n}, \overline{\xi_{n-1}}\right)$.

Πιο αναλυτικά:

$$\left|\varepsilon_{n+1}\right| = \left|x_{n+1} - \xi\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\varepsilon_{n-1}\right|\cdot\left|\varepsilon_n\right|\cdot\left|\frac{f''(\bar{\xi})}{f'(\xi)}\right| = C\cdot\left|\varepsilon_{n-1}\right|\cdot\left|\varepsilon_n\right|$$

Έστω p η Τάξη σύγκλισης και K η σταθερά σφάλματος, οπότε θα έχουμε :

$$\frac{\left|\varepsilon_{n+1}\right|}{\left|\varepsilon_n\right|^p} = k \text{ και } \frac{\left|\varepsilon_n\right|}{\left|\varepsilon_{n-1}\right|^p} = k \Rightarrow \left|\varepsilon_{n-1}\right|^p = \left|\varepsilon_n\right|\cdot k^{-1} \Rightarrow \left|\varepsilon_{n-1}\right| = \left|\varepsilon_n\right|^{\frac{1}{p}}\cdot k^{-\frac{1}{p}}$$

οπότε :

$$\left|\varepsilon_{n+1}\right| = C\cdot\left|\varepsilon_{n-1}\right|\cdot\left|\varepsilon_n\right| = C\cdot\left|\varepsilon_n\right|\cdot\left|\varepsilon_n\right|^{1/p}\cdot k^{-1/p} = C\cdot\left|\varepsilon_n\right|^{1+1/p}\cdot k^{1-1/p} = k\cdot\left|\varepsilon_n\right|^p$$

οπότε :

$$k = C\cdot k^{-1/p} \Rightarrow C = k^{1-\frac{1}{p}}$$

και

$$p = 1 + \frac{1}{p} = \frac{p+1}{p} \Rightarrow p^2 = p+1 \Rightarrow p^2 - p - 1 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} = \pm 1.618$$

και τελικά η Τάξη σύγκλισης (αν πάρουμε τη θετική τιμή του p) θα είναι : $p = 1.618$.

Παράδειγμα 4.16

- Αν η εξίσωση $x^2 - 4 = 0$ έχει ρίζα το $\xi = 2$ στο διάστημα $I = \left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$ και $f(x), f'(x), f''(x)$ συνεχείς και φραγμένες στο I,

1. Να δειχθεί ότι η Μέθοδος της Χορδής συγκλίνει στο διάστημα $I = \left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$

2. Να βρεθούν οι προσεγγίσεις $x_2, x_3, ..., x_n$, με τη Μέθοδο της Χορδής που θα χρειαστούν, ώστε να βρεθεί η προσέγγιση x_n της ρίζας $\xi = 1$ με ακρίβεια ενός δ.ψ.

Απάντηση

1. $f'(x) = 2 \cdot x$, $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$, $f'\left(\frac{5}{2}\right) = 2 \cdot \frac{5}{2} = 5$

$f''(x) = 2$

Η συνάρτηση $f''(x)$ είναι συνεχής και φραγμένη στο *I*, άρα θα υπάρχει *Λ*, τέτοιο ώστε να ισχύει $\left|f''(x)\right| \le \Lambda = 2$, $\forall x \in I$.

Η συνάρτηση $f'(x)$ επίσης είναι συνεχής και φραγμένη στο *I*, άρα θα υπάρχει *K*, τέτοιο ώστε να ισχύει $\left|f'(x)\right| \ge K = 3$, $\forall x \in I$,

οπότε $\lambda = \dfrac{\Lambda}{2 \cdot K} \cdot |b-a| = \dfrac{2}{2 \cdot 3} \cdot (2-1) = \dfrac{1}{3} < 1$.

2. $f(a_0) = a_0^2 - 4 = (3/2)^2 - 4 = 9/4 - 4 = -7/4 < 0$

$f(b_0) = b_0^2 - 4 = (5/2)^2 - 4 = 25/4 - 4 = 9/4 > 0$

$f(a_0) \cdot f(b_0) = -7/4 \cdot 9/4 < 0$, επομένως υπάρχει ρίζα στο $(a_0, b_0) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$$(x_0, x_1) = (a_0, b_0) = (3/2, 5/2),$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1) = \tfrac{5}{2} - \frac{\frac{5}{2} - \frac{3}{2}}{\frac{9}{4} - (-\frac{7}{4})} \tfrac{9}{4} = \tfrac{5}{2} - \frac{\frac{9}{4}}{\frac{16}{4}} = \tfrac{5}{2} - \tfrac{9}{16} = \tfrac{31}{16} = 1.9375$$

$$|\varepsilon_2| = |x_2 - \xi| = |1.9375 - 2| = 0.0625 > 0.05 = \tfrac{1}{2} 10^{-1},$$

$$f(x_2) = x_2^2 - 4 = (31/16)^2 - 4 = 961/256 - 4 = -63/256$$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} f(x_2)$$

$$= \tfrac{31}{16} - \frac{\frac{31}{16} - \frac{5}{2}}{-\frac{63}{256} - \frac{9}{4}} \tfrac{-63}{256} = \tfrac{31}{16} - \frac{-\frac{9}{16}}{-\frac{639}{256}} \tfrac{-63}{256} = 1.9375 + 0.0554577 = 1.9929577,$$

$$|\varepsilon_3| = |x_3 - \xi| = |1.9929577 - 2| = 0.0070423 < 0.005 = \tfrac{1}{2} 10^{-2}$$

4.7.3 Τάξη Σύγκλισης της Μεθόδου της Εσφαλμένης Θέσης

Στη μέθοδο της Εσφαλμένης Θέσης, αν ξεκινήσουμε με x_0 το σταθερό σημείο το σφάλμα ε_{n-1} θα είναι πάντα σταθερό και ίσο με ε_0, οπότε η σχέση στο II. Του Θεωρήματος 4.8 γίνεται :

$$\left|\varepsilon_{n+1}\right| = \left|x_{n+1} - \xi\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\varepsilon_{n-1}\right|\cdot\left|\varepsilon_n\right|\cdot\left|\frac{f''(\bar{\xi})}{f'(\xi)}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\varepsilon_0\right|\cdot\left|\frac{f''(\bar{\xi})}{f'(\xi)}\right|\cdot\left|\varepsilon_n\right| = C\cdot\left|\varepsilon_n\right|$$

οπότε $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|\varepsilon_{n+1}\right|}{\left|\varepsilon_n\right|} = C$, και η σύγκλιση είναι γραμμική.

4.8 Άλλες Μέθοδοι

Εκτός απ' τις παραπάνω κλασσικές μεθόδους, έχουν αναπτυχθεί και κάποιες βελτιώσεις ή συνδυασμοί των παραπάνω μεθόδων, μερικές απ' τις οποίες παρουσιάζονται ενδεικτικά παρακάτω :

Μέθοδος Modified-Newton

- Αν οι τιμές της παραγώγου $f'(x)$ είναι κοντινές στο διάστημα $I = (a_0, b_0)$, $f'(x_n) \approx f'(x_0)$, μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο η τιμή της παραγώγου $f'(x_0)$, οπότε ο τύπος της μεθόδου Newton-Raphson θα έχει την παρακάτω μορφή :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}\ ,\ \ n = 0,1,2,...$$

Μέθοδος Steffensen

- Επειδή ο υπολογισμός της παραγώγου για πολύπλοκες συναρτήσεις είναι επίπονος, η Μέθοδος Steffensen τον αποφεύγει και εγγυάται Τετραγωνική Σύγκλιση, οπότε ο τύπος της μεθόδου Newton-Raphson θα έχει την παρακάτω μορφή :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{g(x_n)}\ ,\ g(x_n) = \frac{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}{f(x_n)}\ ,\ \ n = 0,1,2,...$$

Συνδυασμός Μεθόδου Newton-Raphson και Μεθόδου Χορδής

- Στη μέθοδο αυτή το ένα σημείο χρησιμοποιείται για τη Χορδή και το άλλο για την Εφαπτομένη. Ξεκινάμε με το αρχικό διάστημα $[a_0, b_0] = [x_0, \overline{x_0}]$. Φέρνουμε τη Χορδή στα σημεία x_0, $\overline{x_0}$, η οποία τέμνει τον άξονα των x στο σημείο x_1

$$x_1 = \overline{x_0} - \frac{\overline{x_0} - x_0}{f(\overline{x_0}) - f(x_0)} f(\overline{x_0})$$

και την εφαπτομένη στο σημείο $\overline{x_0}$, η οποία τέμνει τον άξονα των x στο σημείο $\overline{x_1}$

$$\overline{x_1} = \overline{x_0} - \frac{f(\overline{x_0})}{f'(\overline{x_0})}$$

και γενικά :

$$x_{n+1} = \overline{x_n} - \frac{\overline{x_n} - x_n}{f(\overline{x_n}) - f(x_n)} f(\overline{x_n}), \ \overline{x_{n+1}} = \overline{x_n} - \frac{f(\overline{x_n})}{f'(\overline{x_n})}, \ n = 0,1,2,...$$

Άλυτες Ασκήσεις 4ου Κεφαλαίου

1. Δίνεται το Πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 1$. Να βρεθεί πόσες και ποιες ρίζες υπάρχουν στα διαστήματα $(-2,2)$, $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$, $(-2,0)$, $(-3,-2)$.

2. Αν για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3$ υπάρχει μια ρίζα $\xi = \sqrt{3} = 1.732$ στο διάστημα $(a_0, b_0) = (1,2)$ να βρεθεί

α) ο αριθμός των επαναλήψεων ***n*** με τη Μέθοδο της Διχοτόμησης που θα χρειαστούν, ώστε να βρεθεί η προσέγγιση x_n της ρίζας $\xi = \sqrt{3} = 1.732$ με ακρίβεια ενός δ.ψ., και
β) οι προσεγγίσεις $x_0, x_1, ..., x_n$.

3. Αν για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3$ υπάρχει μια ρίζα $\xi = \sqrt{3} = 1.732$ στο διάστημα $(a_0, b_0) = (1,2)$ να βρεθούν οι προσεγγίσεις $x_0, x_1, ..., x_n$, με τη Μέθοδο της Εσφαλμένης Θέσης που θα χρειαστούν, ώστε να βρεθεί η προσέγγιση x_n της ρίζας $\xi = \sqrt{3} = 1.732$ με ακρίβεια ενός δ.ψ.

4. Αν η συνάρτηση $x = 2 \cdot x - \frac{3}{x} \equiv g(x)$ αποτελεί αναδιάταξη της $f(x) = 0$
- Να βρεθεί η συνάρτηση $f(x) = 0$ και οι πραγματικές ρίζες της
- Να βρεθεί η Τάξη Σύγκλισης γι' αυτές τις ρίζες
- Αν η μέθοδος συγκλίνει στο $(a_0, b_0) = (1,2)$, για $x_0 = 1$, να βρεθούν οι προσεγγίσεις $x_1, x_2, ..., x_n$, που θα χρειαστούν, ώστε να βρεθεί η προσέγγιση x_n της θετικής ρίζας με ακρίβεια ενός δ.ψ.

5. Αν η συνάρτηση $x = \frac{1}{2} \cdot (x + \frac{3}{x}) \equiv g(x)$ αποτελεί αναδιάταξη της $f(x) = 0$
- Να βρεθεί η συνάρτηση $f(x) = 0$ και οι πραγματικές ρίζες της
- Να βρεθεί η Τάξη Σύγκλισης γι' αυτές τις ρίζες
- Αν η μέθοδος συγκλίνει στο $(a_0, b_0) = (1,2)$, για $x_0 = 1$, να βρεθούν οι προσεγγίσεις $x_1, x_2, ..., x_n$, που θα χρειαστούν, ώστε να βρεθεί η προσέγγιση x_n της θετικής ρίζας με ακρίβεια ενός δ.ψ.

6. Αν η συνάρτηση $x = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot x + \frac{3}{x}) \equiv g(x)$ αποτελεί αναδιάταξη της $f(x) = 0$
- Να βρεθεί η συνάρτηση $f(x) = 0$ και οι πραγματικές ρίζες της
- Να βρεθεί η Τάξη Σύγκλισης γι' αυτές τις ρίζες
- Αν η μέθοδος συγκλίνει στο $(a_0, b_0) = (1,2)$, για $x_0 = 1$ να βρεθούν οι προσεγγίσεις $x_1, x_2, ..., x_n$, που θα χρειαστούν, ώστε να βρεθεί η προσέγγιση x_n της θετικής ρίζας με ακρίβεια ενός δ.ψ.

7. Αν η συνάρτηση $x = \frac{3}{4} \cdot (x + \frac{1}{x}) \equiv g(x)$ αποτελεί αναδιάταξη της $f(x) = 0$
- Να βρεθεί η συνάρτηση $f(x) = 0$ και οι πραγματικές ρίζες της

- Να βρεθεί η Τάξη Σύγκλισης γι' αυτές τις ρίζες
- Αν η μέθοδος συγκλίνει στο $(a_0, b_0) = (1,2)$, για $x_0 = 1$ να βρεθούν οι προσεγγίσεις $x_1, x_2, ..., x_n$, που θα χρειαστούν, ώστε να βρεθεί η προσέγγιση x_n της θετικής ρίζας με ακρίβεια ενός δ.ψ.

8. Αν για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3$ υπάρχει μια ρίζα $\xi = \sqrt{3} = 1.732$ στο διάστημα $(a_0, b_0) = (1,2)$ με $x_0 = \frac{3}{2} \in [a_0, b_0] = [1,2]$ να βρεθούν οι προσεγγίσεις $x_1, x_2, ..., x_n$ με τη Μέθοδο Newton-Raphson που θα χρειαστούν, ώστε να βρεθεί η προσέγγιση x_n της θετικής ρίζας με ακρίβεια ενός δ.ψ.

9. Αν για τη συνάρτηση $f(x) = x \cdot (x - 2)^3$ υπάρχει μια Πολλαπλή ρίζα $\xi = 2$ στο διάστημα $(a_0, b_0) = (1,3)$

- Να βρεθεί η Τάξη Σύγκλισης γι' αυτή τη ρίζα
- Με $x_0 = \frac{3}{2} \in (a_0, b_0) = (1,3)$ να βρεθούν οι προσεγγίσεις $x_1, x_2, ..., x_n$ με τη Μέθοδο Newton-Raphson που θα χρειαστούν, ώστε να βρεθεί η προσέγγιση x_n της ρίζας $\xi = 2$ με ακρίβεια ενός δ.ψ.

10. Αν για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3$ υπάρχει μια ρίζα $\xi = \sqrt{3} = 1.732$ στο διάστημα $(a_0, b_0) = (1,2)$, να δειχθεί ότι η Μέθοδος της Χορδής συγκλίνει στο διάστημα $(a_0, b_0) = (1,2)$ και να βρεθούν οι προσεγγίσεις $x_1, x_2, ..., x_n$, με τη Μέθοδο της Χορδής που θα χρειαστούν, ώστε να βρεθεί η προσέγγιση x_n της ρίζας $\xi = \sqrt{3} = 1.732$ με ακρίβεια ενός δ.ψ.

5

Γραμμικά Συστήματα

Γενικοί Ορισμοί
Άμεσες Μέθοδοι Επίλυσης Γραμμικών Συστημάτων
Διαγώνια Συστήματα
Τριγωνικά Συστήματα
Απαλοιφή Gauss Χωρίς Οδήγηση
Απαλοιφή Gauss με Μερική Οδήγηση
Απαλοιφή Gauss με Οδήγηση κι Εξισορρόπιση
Απαλοιφή Gauss-Jordan
Μέθοδοι των Διαδοχικών Προσεγγίσεων
Μέθοδος Gauss-Seidel
Μέθοδος Jacobi
Άλλες Μέθοδοι

5.1 Ορισμοί - Μήτρες και Γραμμικά Συστήματα

Η επίλυση των γραμμικών συστημάτων εμφανίζεται σε μεγάλο πλήθος εφαρμογών. Έτσι, πριν προχωρήσουμε στα επιμέρους θέματα, θα δώσουμε μερικά ενδιαφέροντα συμπεράσματα της γραμμικής Άλγεβρας, ώστε να είναι εφικτή η εμπέδωσή τους χωρίς απαραίτητα να είναι αναγκαία η αναδρομή στη σχετική βιβλιογραφία.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.1 : Ονομάζουμε ***Διανυσματικό Χώρο*** (**Vector space**) ένα σύνολο διανυσμάτων *n*, στο οποίο έχουν οριστεί οι πράξεις της πρόσθεσης και του αριθμητικού (scalar) πολλαπλασιασμού.

<u>Παράδειγμα 5.1</u>

α) $V = R^n$ είναι το σύνολο των *n*-άδων $(x_1,x_2,...,x_n)$, $x_i \in \Re$

β) $V = C^n$ είναι το σύνολο των *n*-άδων $(y_1,y_2,...y_n)$, $y_i \in C$

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.2 : Τα *n* διανύσματα $v_1, v_2, ..., v_n$ θα λέγονται ***γραμμικώς εξαρτημένα***, εάν υπάρχει ένα σύνολο αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ με έναν τουλάχιστον εκ των $\alpha_i \neq 0$ ώστε να ισχύει $\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + ... + \alpha_n \cdot v_n = 0$

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.3 : Τα διανύσματα $v_1, v_2, ..., v_n$ θα ονομάζονται ***γραμμικά ανεξάρτητα***, αν από τη σχέση $\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + ... + \alpha_n \cdot v_n = 0$ συνεπάγεται αναγκαστικά $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.4: Ένα σύνολο διανυσμάτων $\{ v_1, v_2, ..., v_n \}$ θα είναι μια **βάση** του διανυσματικού χώρου *V*, αν $\forall v \in V$, $\ni$ μια μοναδική επιλογή αριθμών (scalars) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, ώστε $v = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + ... + \alpha_n \cdot v_n$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.5 : Ονομάζουμε *Μήτρα* ή Π*ίνακα* τάξεως *mxn* μια ορθογώνια διάταξη στοιχείων, πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών, που η γενική μορφή της είναι :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}, a_{ij} \in \Re \text{ ή } a_{ij} \in C$$

Παρατήρηση

❖ Οι μήτρες συνήθως συμβολίζονται με τα κεφαλαία γράμματα του Λατινικού αλφαβήτου και τα στοιχεία τους με μικρά, (συνήθως τα αντίστοιχα του ονόματος της μήτρας), με δύο δείκτες, όπου ο πρώτος δείκτης ορίζει τη γραμμή και ο δεύτερος τη στήλη του στοιχείου.

5.1.1 Πράξεις με Μήτρες

a) Αν $A \in \Re^{m \times n}$, $B \in \Re^{m \times n}$ τότε το *άθροισμα A+B* ορίζει στο διανυσματικό χώρο $\Re^{m \times n}$ μια νέα μήτρα *C*, της οποίας τα στοιχεία c_{ij} δίνονται απ' τη σχέση $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

b) Αν $A \in \Re^{m \times n}$ και $\lambda \in \Re$, ο αριθμητικός *πολλαπλασιασμός λ.A* ορίζει στο διανυσματικό χώρο $\Re^{m \times n}$ μια νέα μήτρα *C*, της οποίας τα στοιχεία c_{ij} ορίζονται απ' τη σχέση $c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$

c) Αν $A \in \Re^{m \times n}$, ονομάζουμε *ανάστροφη* μήτρα της *A* τη $C = A^t \in \Re^{nxm}$, της οποίας τα στοιχεία ορίζονται απ' τη σχέση $c_{ij} = a_{ji}$

d) Αν $A \in \Re^{m\times n}$, $B \in \Re^{n\times p}$ ορίζουμε ως *γινόμενο* των μητρών *A, B* τη μήτρα $C \in \Re^{m\times p}$, της οποίας τα στοιχεία ορίζονται απ' τη σχέση $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad \begin{matrix} i = 1...m \\ j = 1...p \end{matrix}$

Παρατήρηση

- Οι παρακάτω ιδιότητες μπορούν να αποδειχτούν χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία.

$$A + B = B + A \qquad (A + B) + C = A + (B + C)$$
$$A(B + C) = A \cdot B + B \cdot C \qquad A \cdot (BC) = (AB) \cdot C$$
$$(A + B)^T = A^T + B^T \qquad (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

5.1.2 *Ειδικές Μορφές Μητρών*

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.6 : Στο διανυσματικό χώρο $V = \Re^{m\times n}$ ή $V = C^{m\times n}$ ορίζουμε ως ***μηδενική μήτρα*** τη μήτρα $0 \in \Re^{mxn}$ *ή* $0 \in C^{mxn} : 0_{ij} = 0$ ώστε $0 + A = A + 0 = A, \forall A \in \Re^{m\times n}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.7 : Στο διανυσματικό χώρο $V = \Re^{n\times n}$ ορίζουμε *ως* ***ταυτοτική*** *ή* ***μοναδιαία*** *μήτρα* $I = \Re^{n\times n}$ τη μήτρα που τα στοιχεία της ορίζονται από την σχέση
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Παρατήρηση

- Το σύμβολο ονομάζεται και σύμβολο του Kronecker (Kronecker Delta Function).

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.8 : Εάν η μήτρα *A* είναι τετραγωνική τάξεως *n* και υπάρχει μια μήτρα *B*, τάξεως *n* τέτοια ώστε $A{\cdot}B = B{\cdot}A = I$, τότε η μήτρα *B* ονομάζεται ***αντίστροφη*** της *A* και γράφουμε $B = A^{-1}$

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.9 : Μια τετραγωνική μήτρα *A* ονομάζεται ***συμμετρική***, αν ισχύει $A^t = A$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.10 : Το *εσωτερικό γινόμενο* δύο διανυσμάτων $x,y \in \Re^n$ ορίζεται από τη σχέση :

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = x^t \cdot y = y^t \cdot x$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.11 : Εάν *Α* είναι μια $m \times n$ μήτρα, ο αριθμός των γραμμικώς ανεξαρτήτων στηλών της ονομάζεται *τάξη* της μήτρας *κατά στήλες* (Column Rank), ο δε αριθμός των γραμμικώς ανεξαρτήτων γραμμών της ονομάζεται *τάξη* της μήτρας *κατά γραμμές*. Αποδεικνύεται ότι οι δύο αυτοί αριθμοί συμπίπτουν και η κοινή τους τιμή ονομάζεται *τάξη της μήτρας*.

5.1.3 Γραμμικά Συστήματα Εξισώσεων

Το γραμμικό σύστημα της μορφής :

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n = b_1$$
$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n = b_2$$
....
....
$$a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + ... + a_{mn} \cdot x_n = b_m$$

θα μπορούσε να γραφεί σε μορφή πινάκων :

$$A \cdot x = B$$

όπου :

A = όπως στον ορισμό 5.5
$$x = [x_1, x_2, ..., x_n]^t$$
$$b = [b_1, b_2, ..., b_m]^t$$

5.1.4 Βασικό Θεώρημα των Γραμμικών Συστημάτων

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.1: Για $A \in \Re^{n \times n}, b \in \Re^n, x \in \Re^n\ (C^n)$ οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες :

1) A·x = b έχει μια μοναδική λύση, τη $x \in \Re^n$ *ή* $x \in C^n$ $\forall b \in \Re^n$ *ή* $b \in C^n$.
2) A·x = b έχει λύση $x \in \Re^n$ *ή* $x \in C^n$ $\forall b \in \Re^n$ *ή* $b \in C^n$.
3) $A \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0$.
4) A^{-1} *υπάρχει.*
5) Ορίζουσα (Α)≠0.
6) Τάξη της μήτρας Α : r(A) = n.

Παρατήρηση

- Η επίλυση των Γραμμικών Συστημάτων, ιδιαίτερα όταν το πλήθος των εξισώσεων είναι πολύ μεγάλο (π.χ. *n > 100*), με τις μεθόδους της κλασσικής Ανάλυσης είναι πολύ δύσκολη, ακόμη και αν διαθέτουμε τους πιο σύγχρονους Ηλεκτρονικούς Υπολογιστές. Για το σκοπό αυτό, η Αριθμητική Ανάλυση έχει αναπτύξει μεθόδους για την εύκολη σχετικά επίλυσή τους, οι οποίες διαιρούνται σε δύο μεγάλες κατηγορίες : τις Άμεσες και τις Έμμεσες (Διαδοχικών προσεγγίσεων).

5.2 Άμεσες Μέθοδοι

- Εάν $A \in \Re^{nxn}, b \in \Re^{n}, x \in \Re^{n}$, $det(A) \neq 0$, το γραμμικό σύστημα προς επίλυση είναι το $A \cdot x = b$. Επειδή $det(A) \neq 0, \exists A^{-1} \in \Re^{nxn}$ και το αρχικό σύστημα γράφεται :

$$A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot b$$

ή

$$x = A^{-1} \cdot b$$

και η λύση $x = A^{-1} \cdot b$ σύμφωνα με το Θεώρημα *5.1* είναι μοναδική. Στην πράξη τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά. Ο υπολογισμός του αντίστροφου πίνακα και όταν ακόμη πραγματοποιηθεί, είναι αμφίβολης ακρίβειας, λόγω των σφαλμάτων στρογγυλοποίησης που υπεισέρχονται. Ιδιαίτερα οξύ γίνεται το πρόβλημα, όταν η τιμή της ορίζουσας της μήτρας Α των συντελεστών των αγνώστων είναι κοντά στο 0. Στην τελευταία αυτή περίπτωση, μια ελάχιστη μεταβολή ενός εκ των συντελεστών μπορεί να επιφέρει τεράστια μεταβολή στη μονοσήμαντα ορισμένη λύση του γραμμικού συστήματος. Ένα τέτοιο σύστημα ονομάζεται *Ασταθές*.

Παράδειγμα 6.1

- Να λυθούν τα γραμμικά συστήματα:

$$\begin{aligned} &2 \cdot x + 6 \cdot y = 8 \\ &2 \cdot x + 6.00001 \cdot y = 8.00001 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} &2 \cdot x + 6 \cdot y = 8 \\ &2 \cdot x + 5.99999 \cdot y = 8.000002 \end{aligned}$$

  - Οι λύσεις των δύο συστημάτων δίνονται απ' τους τύπους :

$\{ \begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \end{matrix}$ για το πρώτο και $\{ \begin{matrix} x = 10 \\ y = -2 \end{matrix}$ για το δεύτερο.

5.2.1 *Διαγώνια Συστήματα*

- Εάν $A \in \Re^{nxn}, b \in \Re^{n}, x \in \Re^{n}$, το γραμμικό Σύστημα προς επίλυση θα έχει τη μορφή :

$$\begin{aligned} &a_{11} \cdot x_1 = b_1 \\ &a_{22} \cdot x_2 = b_2 \\ &.............. \\ &a_{ii} \cdot x_i = b_i \\ &............. \\ &a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{aligned} \qquad \text{ή} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ ... \\ b_n \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση

- Παρατηρούμε ότι, όλες οι εξισώσεις του συστήματος έχουν ένα μόνο άγνωστο, οπότε και επιλύονται άμεσα.

❖ Ο Αλγόριθμος της επίλυσης του συστήματος που δίνει το κάθε x_i είναι :

Αλγόριθμος Επίλυσης Διαγωνίου Συστήματος

<u>Αρχή</u>
Για $i = 1,2,...,n$

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, a_{ii} \neq 0$$

<u>Τέλος</u>

Παράδειγμα 5.2

Να επιλυθεί το Γραμμικό Σύστημα :

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Η λύση του Συστήματος θα είναι :

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{1}{5}, \quad x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} = \frac{2}{6}, \quad x_3 = \frac{b_3}{a_{33}} = \frac{3}{7}, \quad x_4 = \frac{b_4}{a_{44}} = \frac{4}{8}$$

5.2.2 Κάτω Τριγωνικά Συστήματα

- Αν $A \in \Re^{nxn}, b \in \Re^n, x \in \Re^n$, το γραμμικό Σύστημα προς επίλυση θα έχει τη μορφή :

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \qquad\qquad &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \ldots + a_{ii} \cdot x_i &= b_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \ldots + a_{nn} \cdot x_n &= b_n \end{aligned}$$

ή

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση

❖ Η πρώτη εξίσωση του συστήματος έχει ένα μόνο άγνωστο και επιλύεται. Τη λύση της εξίσωσης αυτής τοποθετούμε στη δεύτερη εξίσωση του συστήματος, την οποία επιλύουμε κ.ο.κ.. Ο Αλγόριθμος της επίλυσης του συστήματος που δίνει το κάθε x_i είναι :

Αλγόριθμος Επίλυσης Κάτω Τριγωνικού Συστήματος

<u>Αρχή</u>

$x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}}$

Για $i = 2,...,n$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \cdot (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j), a_{ii} \neq 0$$

<u>Τέλος</u>

Παράδειγμα 5.3

Να επιλυθεί το Γραμμικό Σύστημα :

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Η λύση του Συστήματος θα είναι :

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{5}{5} = 1 ,$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21} \cdot x_1}{a_{22}} = \frac{7-1}{6} = 1 ,$$

$$x_3 = \frac{b_3 - (a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2)}{a_{33}} = \frac{9-(2+3)}{4} = 1 ,$$

$$x_4 = \frac{b_4 - (a_{41} \cdot x_1 + a_{42} \cdot x_2 + a_{43} \cdot x_3)}{a_{44}} = \frac{9-(1+2+3)}{3} = 1$$

5.2.3 Άνω Τριγωνικά Συστήματα

- Αν $A \in \Re^{nxn}, b \in \Re^n, x \in \Re^n$, το γραμμικό Σύστημα προς επίλυση θα έχει τη μορφή :

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{22} \cdot x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{ii} \cdot x_i + \dots + a_{in} \cdot x_n &= b_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{nn} \cdot x_n &= b_n \end{aligned}$$

ή

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση

- Η τελευταία εξίσωση του συστήματος έχει ένα μόνο άγνωστο και επιλύεται. Τη λύση της εξίσωσης αυτής τοποθετούμε στην πρό-τελευταία εξίσωση του συστήματος, την οποία επιλύουμε κ.ο.κ.. Ο Αλγόριθμος της επίλυσης του συστήματος που δίνει το κάθε x_i είναι :

Αλγόριθμος Επίλυσης Άνω Τριγωνικού Συστήματος

<u>Αρχή</u>

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

Για $i = n-1,...,1$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \cdot (b_i - \sum_{j=n}^{i+1} a_{ij} \cdot x_j), a_{ii} \neq 0$$

<u>Τέλος</u>

Παράδειγμα 5.4

Να επιλυθεί το Γραμμικό Σύστημα :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

<u>Απάντηση</u>

Η λύση του Συστήματος θα είναι :

$$x_4 = \frac{b_4}{a_{44}} = \frac{5}{5} = 1,$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{34} \cdot x_4}{a_{33}} = \frac{7-1}{6} = 1,$$

$$x_2 = \frac{b_2 - (a_{23} \cdot x_3 + a_{24} \cdot x_4)}{a_{22}} = \frac{9-(2+3)}{4} = 1,$$

$$x_1 = \frac{b_1 - (a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + a_{14} \cdot x_4)}{a_{11}} = \frac{9-(1+2+3)}{3} = 1$$

5.2.4 *Μέθοδος της Απαλοιφής του Gauss χωρίς οδήγηση*

- Το γραμμικό σύστημα προς επίλυση θα είναι :

$$\begin{array}{r} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\cdots+a_{1n}\cdot x_n=b_1\\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+\cdots+a_{2n}\cdot x_n=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots\\ a_{i1}\cdot x_1+a_{i2}\cdot x_2+\cdots+a_{in}\cdot x_n=b_i\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots\\ a_{n1}\cdot x_1+a_{n2}\cdot x_2+\cdots+a_{nn}\cdot x_n=b_n \end{array}, \qquad A\in\Re^{nxn}, b\in\Re^n, x\in\Re^n, det(A)\neq 0$$

και ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

Βήμα 1 : Αφήνουμε την πρώτη εξίσωση του συστήματος ως έχει (Οδηγός γραμμή).

Βήμα 2 : Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση του συστήματος διαδοχικά με τους συντελεστές :

$$l_{i1}=\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \quad i=2,\ldots,n$$

και την αφαιρούμε απ' τις υπόλοιπες *n-1* εξισώσεις του συστήματος. Ο άγνωστος x_1 απαλείφεται από όλες τις *n-1* εξισώσεις, δηλαδή μηδενίζονται οι συντελεστές της 1ης στήλης του πίνακα *A*, οπότε οι συντελεστές των *n-1* εξισώσεων θα δίνονται από τους τύπους:

$$a_{ij}^{(2)}=a_{ij}^{(1)}-l_{i1}\cdot a_{1j}^{(1)}$$
$$b_i^{(2)}=b_i^{(1)}-l_{i1}\cdot b_1^{(1)}$$

Βήμα 3 : Στο σύστημα των *n-1* εξισώσεων επαναλαμβάνουμε τα βήματα *1* και *2*, διατηρώντας την δεύτερη εξίσωση ως έχει, ενώ από τις *n-2* υπόλοιπες θα απαλειφθεί ο άγνωστος x_2 κ.ο.κ..

Βήμα 4 : Το σύστημα μετατρέπεται, μετά από *n-1* διαδοχικούς κύκλους, στο άνω τριγωνικό σύστημα :

$$\begin{array}{r} a_{11}^{(1)}\cdot x_1+a_{12}^{(1)}\cdot x_2+\cdots+a_{1n}^{(1)}\cdot x_n=b_1^{(1)}\\ a_{22}^{(2)}\cdot x_2+\cdots+a_{2n}^{(2)}\cdot x_n=b_2^{(2)}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{nn}^{(n)}\cdot x_n=b_n^{(n)} \end{array}$$

το οποίο μπορεί να επιλυθεί.

Παρατήρηση

- Αν στο *Βήμα 1* το Διαγώνιο στοιχείο της Οδηγού Γραμμής *j* είναι ίσο με μηδέν, ελέγχουμε όλες τις γραμμές *i=j+1,...,n* μέχρι να βρούμε κάποια γραμμή *j* που περιέχει μη μηδενικό στοιχείο στην αντίστοιχη στήλη, οπότε ανταλλάσσουμε τις γραμμές *i* και *j* και συνεχίζουμε με το επόμενο βήμα. Ο Αλγόριθμος της μετατροπής του αρχικού συστήματος σε Άνω Τριγωνικό και της επίλυσης του Άνω Τριγωνικού συστήματος που δίνει το κάθε x_i είναι :

Αλγόριθμος Απαλοιφής Gauss χωρίς Οδήγηση - Επίλυσης Άνω Τριγωνικού Συστήματος

Για $j = 1,\dots,n-1$
{
 Αν $a_{jj} = 0$ τότε
 {
  Για $i = j+1,\dots,n$
  {
   Βρίσκουμε το πρώτο $a_{ij} \neq 0$
   Ανταλλάσσουμε τα στοιχεία της *i* και *j* γραμμής
  }
 }
 Για $i = j+1,\dots,n$
 {
  $l_i = \dfrac{a_{ij}}{a_{jj}}$
  Για $k = j,\dots,n$
   $a_{ik} = a_{ik} - l_i \cdot a_{jk}$
  $b_i = b_i - l_i \cdot b_j$
 }
}
$x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$
Για $i = n-1,\dots,1$
 $x_i = \dfrac{1}{a_{ii}} \cdot \left(b_i - \sum_{j=n}^{i+1} a_{ij} \cdot x_j \right), a_{ii} \neq 0$

Παράδειγμα 5.5

- Να επιλυθεί το Σύστημα $A \cdot x = b$ ή $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$, (Λύση $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$)

με Απαλοιφή Gauss χωρίς Οδήγηση.

Απάντηση

Για την καλύτερη κατανόηση της Μεθόδου θα εμφανίζουμε τους Πολλαπλασιαστές (συντελεστές $l_j = \frac{a_{ji}}{a_{ii}}$) και τις αλλαγές στον επαυξημένο πίνακα Ab :

$$\begin{array}{r|cccc|c} \text{Πολλαπλασιαστές} & & \text{Πίνακας } A & & & b \\ & 1 & 2 & 2 & 2 & 7 \\ 2/1 & 2 & 4 & 5 & 2 & 13 \\ 3/1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1/1 & 1 & 4 & 2 & 1 & 8 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|cccc|c} & \text{Πίνακας } A & & & b \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & -5 & -14 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

$a_{22} = 0$, οπότε γίνεται ανταλλαγή 2ης και 3ης γραμμής

$$\begin{array}{r|cccc|c} \text{Πολλαπλασιαστές} & & \text{Πίνακας } A & & & b \\ & 1 & 2 & 2 & 2 & 7 \\ & 0 & -4 & -5 & -5 & -14 \\ & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2/4 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r|cccc|c} \text{Πολλαπλασιαστές} & & \text{Πίνακας } A & & & b \\ & 1 & 2 & 2 & 2 & 7 \\ & 0 & -4 & -5 & -5 & -14 \\ & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ -5/2 & 0 & 0 & -5/2 & -7/2 & -6 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|cccc|c} & \text{Πίνακας } A & & & b \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & -4 & -5 & -5 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -17/2 & -17/2 \end{array},$$

οπότε επιλύεται το Άνω Τριγωνικό Σύστημα

$$x_4 = \frac{b_4}{a_{44}} = \frac{-17/2}{-17/2} = 1$$

$$x_3 = \frac{(b_3 - a_{34} \cdot x_4)}{a_{33}} = \frac{(-1-(-2)\cdot 1)}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$x_2 = \frac{(b_2 - a_{23} \cdot x_3 - a_{24} \cdot x_4)}{a_{22}} = \frac{(-14-(-5)\cdot 1-(-5)\cdot 1)}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$x_1 = \frac{(b_1 - a_{12} \cdot x_2 - a_{13} \cdot x_3 - a_{14} \cdot x_4)}{a_{11}} = \frac{(7-2\cdot 1-2\cdot 1-2\cdot 1)}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

5.2.5 Μέθοδος της Απαλοιφής Gauss με Μερική Οδήγηση

Αν στο *Βήμα 1*, αντί να επιλέξουμε μη μηδενικό Διαγώνιο στοιχείο της Οδηγού Γραμμής *j*, ελέγχουμε όλες τις γραμμές *i=j,...,n* για να βρούμε τη γραμμή *i* που περιέχει το **μεγαλύτερο κατ' απόλυτη τιμή** στοιχείο στην αντίστοιχη στήλη, οπότε ανταλλάσσουμε τις γραμμές *i* και *j* και συνεχίζουμε με το επόμενο βήμα, προκύπτει η **Απαλοιφή Gauss με Μερική Οδήγηση**. Ο Αλγόριθμος της μετατροπής του αρχικού συστήματος σε Άνω Τριγωνικό και της επίλυσης του Άνω Τριγωνικού συστήματος που δίνει το κάθε x_i είναι :

Αλγόριθμος Απαλοιφής Gauss με Μερική Οδήγηση - Επίλυσης Άνω Τριγωνικού Συστήματος

Για $j = 1,...,n-1$
{
 Για $i = j, j+1,...,n$
 {
  Βρίσκουμε το μεγαλύτερο κατ' απόλυτη τιμή a_{ij}
  Ανταλλάσσουμε τα στοιχεία της *i* και *j* γραμμής
 }
 Για $i = j+1,...,n$
 {
  $l_i = \dfrac{a_{ij}}{a_{jj}}$
  Για $k = j,...,n$
   $a_{ik} = a_{ik} - l_i \cdot a_{jk}$
  $b_i = b_i - l_i \cdot b_j$
 }
}
$x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$
Για $i = n-1,...,1$
 $x_i = \dfrac{1}{a_{ii}} \cdot (b_i - \sum_{j=n}^{i+1} a_{ij} \cdot x_j), a_{ii} \neq 0$

Παράδειγμα 5.6

- Να επιλυθεί το Σύστημα $A \cdot x = b$ ή $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$,

(Λύση $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$) με Απαλοιφή Gauss με μερική Οδήγηση

Απάντηση

- Στοιχείο με τη Μέγιστη Απόλυτη τιμή στην πρώτη στήλη είναι το $\alpha_{31} = 3$ που βρίσκεται στη $3^{η}$ γραμμή, οπότε γίνεται ανταλλαγή $1^{ης}$ και $3^{ης}$ γραμμής :

Πολλαπλασιαστές Πίνακας A b Πίνακας A Πίνακας b

$$
\begin{array}{c}
\\ 2/3 \\ 1/3 \\ 1/3
\end{array}
\left|\begin{array}{cccc|c}
3 & 2 & 1 & 1 & 7 \\
2 & 4 & 5 & 2 & 13 \\
1 & 2 & 2 & 2 & 7 \\
1 & 4 & 2 & 1 & 8
\end{array}\right.
\Rightarrow
\left|\begin{array}{cccc|c}
3 & 2 & 1 & 1 & 7 \\
0 & 8/3 & 13/3 & 4/3 & 25/3 \\
0 & 4/3 & 5/3 & 5/3 & 14/3 \\
0 & 10/3 & 5/3 & 2/3 & 17/3
\end{array}\right.
$$

- Στοιχείο με τη Μέγιστη Απόλυτη τιμή στη δεύτερη στήλη είναι το $\alpha_{42} = \dfrac{10}{3}$ που βρίσκεται στην 4η γραμμή, οπότε γίνεται ανταλλαγή 2ης και 4ης γραμμής :

Πολλαπλασιαστές Πίνακας A b Πίνακας A b

$$
\begin{array}{c}
\\ \\ 4/10 = 2/5 \\ 8/10 = 4/5
\end{array}
\left|\begin{array}{cccc|c}
3 & 2 & 1 & 1 & 7 \\
0 & 10/3 & 5/3 & 2/3 & 17/3 \\
0 & 4/3 & 5/3 & 5/3 & 14/3 \\
0 & 8/3 & 13/3 & 4/3 & 25/3
\end{array}\right.
\Rightarrow
\left|\begin{array}{cccc|c}
3 & 2 & 1 & 1 & 7 \\
0 & 10/3 & 5/3 & 2/3 & 17/3 \\
0 & 0 & 1 & 7/5 & 12/5 \\
0 & 0 & 3 & 4/5 & 19/5
\end{array}\right.
$$

- Στοιχείο με τη Μέγιστη Απόλυτη τιμή στην τρίτη στήλη είναι το $\alpha_{43} = 3$ που βρίσκεται στην 4η γραμμή, οπότε γίνεται ανταλλαγή 3ης και 4ης γραμμής :

Πολλαπλασιαστές Πίνακας A b Πίνακας A b

$$
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ \frac{1}{3}
\end{array}
\left|\begin{array}{cccc|c}
3 & 2 & 1 & 1 & 7 \\
0 & 10/3 & 5/3 & 2/3 & 17/3 \\
0 & 0 & 3 & 4/5 & 19/5 \\
0 & 0 & 1 & 7/5 & 12/5
\end{array}\right.
\Rightarrow
\left|\begin{array}{cccc|c}
3 & 2 & 1 & 1 & 7 \\
0 & 10/3 & 5/3 & 2/3 & 17/3 \\
0 & 0 & 3 & 4/5 & 19/5 \\
0 & 0 & 0 & 17/15 & 17/15
\end{array}\right.
$$

οπότε επιλύεται το Άνω Τριγωνικό Σύστημα

$$x_4 = \frac{b_4}{a_{44}} = \frac{17/15}{17/15} = 1$$

$$x_3 = \frac{(b_3 - a_{34} \cdot x_4)}{a_{33}} = \frac{(19/5 - 4/5 \cdot 1)}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$x_2 = \frac{(b_2 - a_{23} \cdot x_3 - a_{24} \cdot x_4)}{a_{22}} = \frac{(17/3 - 5/3 \cdot 1 - 2/3 \cdot 1)}{10/3} = \frac{10/3}{10/3} = 1$$

$$x_1 = \frac{(b_1 - a_{12} \cdot x_2 - a_{13} \cdot x_3 - a_{14} \cdot x_4)}{a_{11}} = \frac{(7 - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1)}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

5.2.6 Μέθοδος της Απαλοιφής Gauss με Οδήγηση κι Εξισορρόπιση

Μια παραλλαγή της προηγούμενης μεθόδου αποτελεί η μέθοδος της απαλοιφής των Gauss-με Οδήγηση κι Εξισορρόπιση, στην οποία, πριν την απαλοιφή, διαιρούμε τα στοιχεία της κάθε γραμμής i με το $\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. Συνήθως, για την αποφυγή των πολλών πράξεων, γίνεται Εξισορρόπιση μόνο στα στοιχεία των αντίστοιχων στηλών, απ' τα οποία θα επιλέξουμε τα Οδηγά Στοιχεία, όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα :

Παράδειγμα 5.7

- Να επιλυθεί το Σύστημα $A \cdot x = b$ ή

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$, (Λύση $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$) με Απαλοιφή Gauss με Οδήγηση κι Εξισορρόπιση.

<u>Απάντηση</u>

$$\begin{array}{llll} \textit{Πίνακας A} & b & \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| & |a_{i1}|' = |a_{i1}| \Big/ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \; i = 1..4 \\ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -4 & -1 \end{array} \right. & \left| \begin{array}{c} 0 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \end{array} \right. \Rightarrow & \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 10 \end{array} & \begin{array}{c} 1/4 \\ 2/5 \\ 3/6 \\ 1/10 \end{array} \end{array}$$

- Στοιχείο με τη Μέγιστη Απόλυτη τιμή στην πρώτη στήλη είναι το $a_{31}' = 3/6$ που βρίσκεται στη $3^{η}$ γραμμή, οπότε γίνεται ανταλλαγή $1^{ης}$ και $3^{ης}$ γραμμής :

$$\begin{array}{llll} \textit{Πολλαπλασιαστές} & \textit{Πίνακας A} \quad b & \textit{Πίνακας A} & \textit{Πίνακας b} \\ \begin{array}{c} \\ 2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{array} & \left| \begin{array}{cccc} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -4 & -1 \end{array} \right| \begin{array}{c} 6 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{array} \Rightarrow & \left| \begin{array}{cccc} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & -2/3 & 4/3 \\ 0 & 2/3 & -4/3 & -4/3 \\ 0 & 11/3 & -13/3 & -4/3 \end{array} \right. & \left| \begin{array}{c} 6 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \textit{Πίνακας A} & \textit{Πίνακας b} & \sum_{j=2}^{n} |a_{ij}| & |a_{i2}|' = |a_{i2}| \Big/ \sum_{j=2}^{n} |a_{ij}|, \; i = 2..4 \\ \left| \begin{array}{cccc} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & -2/3 & 4/3 \\ 0 & 2/3 & -4/3 & -4/3 \\ 0 & 11/3 & -13/3 & -4/3 \end{array} \right. & \left| \begin{array}{c} 6 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{array} \right. & \left| \begin{array}{c} \\ 7/3 \\ 10/3 \\ 28/3 \end{array} \right. & \left| \begin{array}{c} \\ 1/7 \\ 2/10 \\ 11/28 \end{array} \right. \end{array}$$

- Στοιχείο με τη Μέγιστη Απόλυτη τιμή στη δεύτερη στήλη είναι το $a_{42}{}' = \frac{11}{28}$ που βρίσκεται στην 4η γραμμή, οπότε γίνεται ανταλλαγή 2ης και 4ης γραμμής :

$$\begin{array}{c} \text{Πολλαπλασιαστές} \\ \\ \\ 2/11 \\ 1/11 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Πίνακας A} \quad\quad b \\ \left|\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 11/3 & -13/3 & -4/3 \\ 0 & 2/3 & -4/3 & -4/3 \\ 0 & 1/3 & -2/3 & 4/3 \end{array}\right| \begin{array}{c} 6 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{Πίνακας A} \quad\quad b \\ \left|\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 11/3 & -13/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & -6/11 & -12/11 \\ 0 & 0 & -3/11 & 16/11 \end{array}\right| \begin{array}{c} 6 \\ -2 \\ -18/11 \\ 13/11 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \text{Πίνακας A} & b & \sum_{j=3}^{n} |a_{ij}| & |a_{i3}|' = \dfrac{|a_{i3}|}{\sum_{j=3}^{n}|a_{ij}|}, \; i = 3..4 \\ \left|\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 11/3 & -13/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & -6/11 & -12/11 \\ 0 & 0 & -3/11 & 16/11 \end{array}\right| & \left|\begin{array}{c} 6 \\ -2 \\ -18/11 \\ 13/11 \end{array}\right. & \left|\begin{array}{c} \\ \\ 18/11 \\ 19/11 \end{array}\right. & \left|\begin{array}{c} \\ \\ 6/18 \\ 3/19 \end{array}\right. \end{array}$$

- Στοιχείο με τη Μέγιστη Απόλυτη τιμή στην τρίτη στήλη είναι το $a_{33}{}' = \frac{6}{18}$ που βρίσκεται στην 3η γραμμή, οπότε δε γίνεται ανταλλαγή :

$$\begin{array}{c} \text{Πολλαπλασιαστές} \\ \\ \\ \\ \frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Πίνακας A} \quad\quad b \\ \left|\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 11/3 & -13/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & -6/11 & -12/11 \\ 0 & 0 & -3/11 & 16/11 \end{array}\right| \begin{array}{c} 6 \\ -2 \\ -18/11 \\ 13/11 \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{Πίνακας A} \quad\quad b \\ \left|\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 11/3 & -13/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & -6/11 & -12/11 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{c} 6 \\ -2 \\ -18/11 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

οπότε επιλύεται το Άνω Τριγωνικό Σύστημα

$$x_4 = \frac{b_4}{a_{44}} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_3 = \frac{(b_3 - a_{34} \cdot x_4)}{a_{33}} = \frac{(-18/11 - (-12/11) \cdot 1)}{-6/11} = \frac{-6/11}{-6/11} = 1$$

$$x_2 = \frac{(b_2 - a_{23} \cdot x_3 - a_{24} \cdot x_4)}{a_{22}} = \frac{(-2 - (-13/3) \cdot 1 - (-4/3) \cdot 1)}{11/3} = \frac{11/3}{11/3} = 1$$

$$x_1 = \frac{(b_1 - a_{12} \cdot x_2 - a_{13} \cdot x_3 - a_{14} \cdot x_4)}{a_{11}} = \frac{(6 - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1)}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

5.2.7 Μέθοδος της Απαλοιφής Gauss-Jordan

Μια παραλλαγή της προηγούμενης μεθόδου αποτελεί η μέθοδος της απαλοιφής των Gauss-Jordan, στην οποία απαλείφουμε το x_1 από τις *n-1* (πλην της πρώτης) εξισώσεις του συστήματος τον x_2 από τις *n-1* (πλην της δεύτερης εξίσωσης) κ.ο.κ., οπότε στο τέλος της διαδικασίας αυτής, το σύστημα μετατρέπεται σε ισοδύναμο διαγώνιο, το οποίο επιλύεται εύκολα. Ο Αλγόριθμος (χωρίς οδήγηση) της μετατροπής του αρχικού συστήματος σε Διαγώνιο και της επίλυσης του Διαγωνίου συστήματος που δίνει το κάθε x_i είναι :

Αλγόριθμος Απαλοιφής Gauss Jordan - Επίλυσης Διαγωνίου Συστήματος

Για $j = 1,...,n$

{

Έλεγχος μη μηδενικού ή μεγίστου κατ' απόλυτη τιμή στοιχείου, ανταλλαγή γραμμών, αν χρειάζεται.

Για $i = 1..j-1,\ j+1,...,n$ (ή **Για** $j = 1,...,n,\ (j \neq i)$)

{

$l_i = \dfrac{a_{ij}}{a_{jj}}$

Για $k = j,...,n$

$a_{ik} = a_{ik} - l_i \cdot a_{jk}$

$b_i = b_i - l_i \cdot b_j$

}

}

Για $i = 1,...,n$

$x_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$

Παράδειγμα 5.8

- Να επιλυθεί το Σύστημα $A \cdot x = b$ ή $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$, (Λύση $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$)

με Απαλοιφή Gauss-Jordan.

Απάντηση

Για την καλύτερη κατανόηση της Μεθόδου θα εμφανίζουμε τους Πολλαπλασιαστές (συντελεστές $l_j = \dfrac{a_{ji}}{a_{ii}}$) και τις αλλαγές στον επαυξημένο πίνακα Ab :

$$\begin{array}{c|cccc|c} \text{Πολλαπλασιαστές} & & \text{Πίνακας } A & & & b \\ & 1 & 2 & 2 & 2 & 7 \\ 2/1 & 2 & 4 & 5 & 2 & 13 \\ 3/1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1/1 & 1 & 4 & 2 & 1 & 8 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|cccc|c} & \text{Πίνακας } A & & & b \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & -5 & -14 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

$a_{22} = 0$, οπότε γίνεται ανταλλαγή $2^{ης}$ και $3^{ης}$ γραμμής

$$\begin{array}{r}\textit{Πολλαπλασιαστές} \\ -2/4 \\ \\ \\ -2/4\end{array} \quad \begin{array}{c}\textit{Πίνακας A} \quad\quad b \\ \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & -4 & -5 & -5 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right.\end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r}\textit{Πολλαπλασιαστές} \\ -1/2 \\ -5 \\ \\ -5/2\end{array} \quad \begin{array}{c}\textit{Πίνακας A} \quad\quad b \\ \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -5 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5/2 & -7/2 & -6 \end{array}\right.\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c}\textit{Πίνακας A} \quad\quad b \\ \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & -4 & 0 & -15 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -17/2 & -17/2 \end{array}\right.\end{array},$$

$$\begin{array}{r}\textit{Πολλαπλασιαστές} \\ 3/17 \\ 30/17 \\ 4/17 \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{c}\textit{Πίνακας A} \quad\quad b \\ \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & -4 & 0 & -15 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -17/2 & -17/2 \end{array}\right.\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c}\textit{Πίνακας A} \quad\quad b \\ \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -17/2 & -17/2 \end{array}\right.\end{array},$$

οπότε επιλύεται το Διαγώνιο Σύστημα

$$x_4 = \frac{b_4}{a_{44}} = \frac{-17/2}{-17/2} = 1$$

$$x_3 = \frac{b_3}{a_{33}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{1}{1} = 1$$

5.3 Επαναληπτικές Μέθοδοι Επίλυσης Γραμμικών Συστημάτων

Εκτός από τις άμεσες μεθόδους επίλυσης Γραμμικών Συστημάτων υπάρχουν και οι έμμεσες ή επαναληπτικές ή προσεγγιστικές μέθοδοι, όπου η λύση του συστήματος προκύπτει από διαδοχικές προσεγγίσεις $x_0^T, x_1^T, ..., x_k^T$, όπου $x_0^T = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$ μία πρώτη προσέγγιση της ζητούμενης λύσης. Χρησιμοποιούνται, όταν έχουμε μεγάλα συστήματα ή αραιούς πίνακες (με πολλά μηδενικά στοιχεία), απαιτούν λιγότερες πράξεις και συγκλίνουν, όταν πληρούνται κάποιες προϋποθέσεις (π.χ. θα πρέπει στον πίνακα *A* να υπάρχει υπεροχή του διαγωνίου στοιχείου).

5.3.1 Μέθοδος Jacobi

Το αρχικό σύστημα προς επίλυση $A \cdot x = b, A \in \Re^{nxn}, x, b \in \Re^n, det(A) \neq 0$

ή $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{bmatrix}$$

μπορεί να γραφεί σαν $(D + L + U) \cdot x = b, \quad D,L,U \in \Re^{nxn}$ ή $D \cdot x = b - (L + U) \cdot x$ και σε μορφή πινάκων :

ή $$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & 0 & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{bmatrix}$$

ή $$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & 0 & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}$$

όπου

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$, ο πίνακας των διαγωνίων στοιχείων του πίνακα A

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$, ο πίνακας των στοιχείων του πίνακα A που βρίσκονται κάτω απ' την κύρια διαγώνιο (αυστηρά Κάτω Τριγωνικός)

$$U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & ... & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{bmatrix}$$, ο πίνακας των στοιχείων του πίνακα A που βρίσκονται πάνω απ' την κύρια διαγώνιο (αυστηρά Άνω Τριγωνικός)

Ο Επαναληπτικός τύπος θα είναι $D \cdot x^{(k+1)} = b - (L + U) \cdot x^{(k)}$ και σε μορφή πινάκων :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \dots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

Σε μορφή εξισώσεων θα έχουμε :

$$a_{11} \cdot x_1^{(k+1)} = b_1 - (a_{12} \cdot x_2^{(k)} + a_{13} \cdot x_3^{(k)} + \cdots + a_{1n} \cdot x_n^{(k)})$$
$$a_{22} \cdot x_2^{(k+1)} = b_2 - (a_{21} \cdot x_1^{(k)} + a_{23} \cdot x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n} \cdot x_n^{(k)})$$
....
$$a_{nn} \cdot x_n^{(k+1)} = b_n - (a_{n1} \cdot x_1^{(k)} + a_{n2} \cdot x_2^{(k)} + \cdots + a_{n,n-1} \cdot x_{n-1}^{(k)})$$

τις οποίες, αν λύσουμε ως προς $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \cdots + x_n^{(k+1)}$ θα έχουμε :

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \cdot (b_1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{n} a_{1j} \cdot x_j^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} \cdot (b_2 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^{n} a_{2j} \cdot x_j^{(k)})$$

....

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}} \cdot (b_n - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{n} a_{nj} \cdot x_j^{(k)})$$

και γενικά, για την i εξίσωση :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \cdot (b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(k)})$$

Αλγόριθμος Jacobi για την Επίλυση του Συστήματος

<u>Αρχή</u>

Δίνουμε τυχαίες ή μηδενικές τιμές στα διανύσματα $x^T = (x_1, x_2, ..., x_n)$ και $oldx^T = (oldx_1, oldx_2, ..., oldx_n)$

Για όσο $\| x^T - oldx^T \| > \varepsilon$ ή $\sum_{i=1}^{n} (x_i - oldx_i) > \varepsilon$ {

Κρατάμε τα προηγούμενα x_i στο $oldx_i$ $(oldx_i = x_i, i = 1,2,...,n)$

Βρίσκουμε τα νέα x_i , $x_i = \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} \cdot oldx_j \right), i = 1,2,...,n$

Εμφανίζουμε τα x_i , $i = 1,2,...,n$

}

<u>Τέλος</u>

Παράδειγμα 5.9

- Να επιλυθεί με τη Μέθοδο Jacobi το σύστημα $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$, με αρχική τιμή $x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

Απάντηση

1ος Κύκλος

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot (2 - (1 \cdot \tfrac{3}{4} - 1 \cdot \tfrac{3}{4})) = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{-3} \cdot (-2 - (0 \cdot \tfrac{3}{4} + 1 \cdot \tfrac{3}{4})) = -\frac{1}{3} \cdot -\frac{11}{4} = \frac{11}{12} = 0.9167$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{4} \cdot (4 - (1 \cdot \tfrac{3}{4} - 1 \cdot \tfrac{3}{4})) = \frac{4}{4} = 1$$

2ος Κύκλος

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot (2 - (1 \cdot \tfrac{11}{12} - 1 \cdot 1)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{12} = \frac{25}{24} = 1.04167$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{-3} \cdot (-2 - (0 \cdot 1 + 1 \cdot 1)) = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{4} \cdot (4 - (1 \cdot 1 - 1 \cdot \tfrac{11}{12})) = \frac{1}{4} \cdot \frac{47}{12} = \frac{47}{48} = 0.97917$$

3ος Κύκλος

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{2} \cdot (2 - (1 \cdot 1 - 1 \cdot \tfrac{47}{48})) = \frac{1}{2} \cdot \frac{95}{48} = \frac{95}{96} = 0.9895833$$

$$x_2^{(3)} = \frac{1}{-3} \cdot (-2 - (0 \cdot \tfrac{25}{24} + 1 \cdot \tfrac{47}{48})) = -\frac{1}{3} \cdot -\frac{143}{48} = \frac{143}{144} = 0.993$$

$$x_3^{(3)} = \frac{1}{4} \cdot (4 - (1 \cdot \tfrac{25}{24} - 1 \cdot 1)) = \frac{1}{4} \cdot \frac{95}{24} = \frac{95}{96} = 0.9895833$$

5.3.2 Μέθοδος Gauss-Seidel

Στη μέθοδο Gauss-Seidel, αντί του αρχικού συστήματος $A \cdot x = b$ επιλύουμε το σύστημα $(D + L + U) \cdot x = b$ ή $(L + D) \cdot x = b - U \cdot x$. Ο Επαναληπτικός τύπος θα είναι $(L + D) \cdot x^{(k+1)} = b - U \cdot x^{(k)}$ και σε μορφή πινάκων :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \dots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

Σε μορφή εξισώσεων θα έχουμε :

$$a_{11} \cdot x_1^{(k+1)} = b_1 - (a_{12} \cdot x_2^{(k)} + a_{13} \cdot x_3^{(k)} + \cdots + a_{1n} \cdot x_n^{(k)})$$
$$a_{21} \cdot x_1^{(k+1)} + a_{22} \cdot x_2^{(k+1)} = b_2 - (a_{23} \cdot x_3^{(k)} + a_{24} \cdot x_4^{(k)} + \cdots + a_{2n} \cdot x_n^{(k)})$$
……………………………………………………………………………………
$$a_{n1} \cdot x_1^{(k+1)} + a_{n2} \cdot x_2^{(k+1)} + \cdots + a_{n,n-1} \cdot x_{n-1}^{(k+1)} + a_{nn} \cdot x_n^{(k+1)} = b_n$$

τις οποίες, αν λύσουμε ως προς $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \cdots + x_n^{(k+1)}$ θα έχουμε :

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \cdot (b_1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{n} a_{1j} \cdot x_j^{(k)})$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} \cdot (b_2 - \sum_{j=1}^{1} a_{2j} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=3}^{n} a_{2j} \cdot x_j^{(k)})$$
………………………………………………
$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}} \cdot (b_n - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{n} a_{nj} \cdot x_j^{(k+1)})$$

και γενικά, για την i εξίσωση :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \cdot (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(k)})$$

Αλγόριθμος Gauss-Seidel για την Επίλυση του Συστήματος

<u>Αρχή</u>

Δίνουμε τυχαίες ή μηδενικές τιμές στα διανύσματα $x^T = (x_1 , x_2 ,..., x_n)$ και $oldx^T = (oldx_1 , oldx_2 ,..., oldx_n)$

Για όσο $\left\| x^T - oldx^T \right\| > \varepsilon$ ή $\sum_{i=1}^{n} (x_i - oldx_i) > \varepsilon$

{

Κρατάμε τα προηγούμενα x_i στο $oldx_i$ $(oldx_i = x_i , i = 1,2,...,n)$

Βρίσκουμε τα νέα x_i , $x_i = \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \right), i = 1,2,...,n$

Εμφανίζουμε τα x_i , $i = 1,2,...,n$

}

<u>Τέλος</u>

Παράδειγμα 5.10

- Να επιλυθεί με τη Μέθοδο Gauss-Seidel το σύστημα $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$, με αρχική τιμή $x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

<u>Απάντηση</u>

1^{ος} Κύκλος

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot (2 - (1 \cdot \tfrac{3}{4} - 1 \cdot \tfrac{3}{4})) = \frac{2}{2} = 1$$
$$x_2^{(1)} = \frac{1}{-3} \cdot (-2 - (0 \cdot 1 + 1 \cdot \tfrac{3}{4})) = -\frac{1}{3} \cdot -\frac{11}{4} = \frac{11}{12} = 0.9167$$
$$x_3^{(1)} = \frac{1}{4} \cdot (4 - (1 \cdot 1 - 1 \cdot \tfrac{11}{12})) = \frac{1}{4} \cdot \frac{47}{12} = \frac{47}{48} = 0.979167$$

2^{ος} Κύκλος

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot (2 - (1 \cdot \tfrac{11}{12} - 1 \cdot \tfrac{47}{48})) = \frac{1}{2} \cdot \frac{93}{48} = \frac{93}{96} = 0.96875$$
$$x_2^{(2)} = \frac{1}{-3} \cdot (-2 - (0 \cdot \tfrac{93}{96} + 1 \cdot \tfrac{47}{48})) = \frac{1}{-3} \cdot \frac{-143}{48} = \frac{143}{144} = 0.993$$
$$x_3^{(2)} = \frac{1}{4} \cdot (4 - (1 \cdot \tfrac{93}{96} - 1 \cdot \tfrac{143}{144})) = 0.9939375$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.2 : Αν υπάρχει υπεροχή του Διαγωνίου στοιχείου κατά γραμμές ή κατά στήλες, δηλαδή ισχύει $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$ ή $|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|$ τότε η ακολουθία των διαδοχικών προσεγγίσεων που παράγεται από τη Μέθοδο Jacobi και Gauss-Seidel για την επίλυση του συστήματος $A \cdot x = b$, $A \in \Re^{nxn}$, $x,b \in \Re^{n}$ $det(A) \neq 0$ συγκλίνει στη λύση x του συστήματος.

Αλγόριθμος Ελέγχου Υπεροχής Κατά Γραμμές

<u>Αρχή</u>
Yperoxh = true
i = 1
Για όσο $(i \le n)$ και $(Yperoxh = true)$
 {
 sum =0
 Για $j = 1,2,...,n$
 $sum = sum + |a_{ij}|$
 $sum = sum - |a_{ii}|$
 Αν $(|a_{ii}| \le sum)$ ***τότε***
 Yperoxh = false
 Διαφορετικά
 i = i + 1
 }
Αν $(Yperoxh = true)$ ***τότε***
 ΥΠΑΡΧΕΙ ΥΠΕΡΟΧΗ ΚΑΤΑ ΓΡΑΜΜΕΣ
Διαφορετικά
 ΕΛΕΓΧΟΥΜΕ ΑΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΥΠΕΡΟΧΗ ΚΑΤΑ ΣΤΗΛΕΣ
<u>Τέλος</u>

Αλγόριθμος Ελέγχου Υπεροχής Κατά Στήλες

<u>Αρχή</u>
Yperoxh = true
j = 1
Για όσο $(j \le n)$ και $(Yperoxh = true)$
 {
 sum =0
 Για $i = 1,2,...,n$
 $sum = sum + |a_{ij}|$
 $sum = sum - |a_{jj}|$
 Αν $(|a_{jj}| \le sum)$ ***τότε***
 Yperoxh = false
 Διαφορετικά
 j = j + 1
 }
Αν $(Yperoxh = true)$ ***τότε***
 ΥΠΑΡΧΕΙ ΥΠΕΡΟΧΗ ΚΑΤΑ ΣΤΗΛΕΣ
Διαφορετικά
 ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΕ ΛΥΝΕΤΑΙ
<u>Τέλος</u>

Παράδειγμα 5.11

- Να ελεγχθεί αν υπάρχει Υπεροχή κατά Γραμμές ή κατά Στήλες στον πίνακα $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Απάντηση

$$|a_{11}| = 2 = |a_{12}| + |a_{13}| = |1| + |-1| = 1 + 1 = 2$$

οπότε δεν υπάρχει Υπεροχή κατά Γραμμές.

$$|a_{11}| = 2 > |a_{21}| + |a_{31}| = |0| + |1| = 1$$
$$|a_{22}| = |-2| = 2 = |a_{12}| + |a_{32}| = |1| + |-1| = 1 + 1 = 2$$

οπότε δεν υπάρχει Υπεροχή ούτε κατά Στήλες.

Παράδειγμα 5.12

- Να ελεγχθεί αν υπάρχει Υπεροχή κατά Γραμμές ή κατά Στήλες στον πίνακα $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

Απάντηση

$$|a_{11}| = 2 = |a_{12}| + |a_{13}| = |1| + |-1| = 1 + 1 = 2$$

οπότε δεν υπάρχει Υπεροχή κατά Γραμμές.

$$|a_{11}| = 2 > |a_{21}| + |a_{31}| = |0| + |1| = 1$$
$$|a_{22}| = |-3| = 3 > |a_{12}| + |a_{32}| = |1| + |-1| = 1 + 1 = 2$$
$$|a_{33}| = |4| = 4 > |a_{13}| + |a_{23}| = |-1| + |1| = 1 + 1 = 2$$

οπότε υπάρχει Υπεροχή κατά Στήλες.

5.4 Άλλες Μέθοδοι

Εκτός απ' τις μεθόδους που παρουσιάστηκαν παραπάνω, έχουν αναπτυχθεί και κάποιες βελτιώσεις ή διαφορετικές μέθοδοι άμεσες και επαναληπτικές των παραπάνω μεθόδων, μερικές απ' τις οποίες παρουσιάζονται ενδεικτικά παρακάτω :

Μέθοδος Gauss-Seidel για Αόριστα και Υπερ-ορισμένα Συστήματα ή Συστήματα χωρίς Διαγώνια Υπεροχή

- Αν στο αρχικό μας σύστημα $A \cdot x = b$ δεν υπάρχει Υπεροχή του Διαγωνίου Στοιχείου ή αν το σύστημά μας είναι Αόριστο (περισσότεροι άγνωστοι, λιγότερες εξισώσεις) ή Υπερ-ορισμένο (περισσότερες εξισώσεις, λιγότεροι άγνωστοι) πολλαπλασιάζουμε το σύστημα από αριστερά με τον ανάστροφο πίνακα A^T, οπότε προκύπτει το σύστημα των κανονικών εξισώσεων $A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot b$, ή $C \cdot x = d$, με $C = A^T \cdot A$ ένας συμμετρικός πίνακας και $d = A^T \cdot b$, οπότε επιλύεται το σύστημα $C \cdot x = d$ και το κάθε x_i στην $k+1$ επανάληψη δίνεται απ' τη σχέση :

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{c_{ii}} \cdot \left(d_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij} \cdot x_j^{(k)} \right)$$

Μέθοδος Jacobi για Αόριστα και Υπερ-ορισμένα Συστήματα ή Συστήματα χωρίς Διαγώνια Υπεροχή

- Αν στο αρχικό μας σύστημα $A \cdot x = b$ δεν υπάρχει Υπεροχή του Διαγωνίου Στοιχείου ή αν το σύστημά μας είναι Αόριστο (περισσότεροι άγνωστοι, λιγότερες εξισώσεις) ή Υπερ-ορισμένο (περισσότερες εξισώσεις, λιγότεροι άγνωστοι) πολλαπλασιάζουμε το σύστημα από αριστερά με τον ανάστροφο πίνακα A^T, οπότε προκύπτει το σύστημα των κανονικών εξισώσεων $A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot b$, ή $C \cdot x = d$, με $C = A^T \cdot A$ ένας συμμετρικός πίνακας και $d = A^T \cdot b$, οπότε επιλύεται το σύστημα $C \cdot x = d$ και το κάθε x_i στην $k+1$ επανάληψη δίνεται απ' τη σχέση :

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{c_{ii}} \cdot \left(d_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} c_{ij} \cdot x_j^{(k)} \right)$$

Μέθοδος Successive Over-relaxation (SOR)

- Η μέθοδος SOR αποτελεί τη γενίκευση της μεθόδου Gauss-Seidel και το κάθε x_i στην $k+1$ επανάληψη δίνεται απ' τη σχέση :

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega) \cdot x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \cdot \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(k)} \right) \text{ με } 0 < \omega < 2, \text{ ενώ για } \omega = 1$$

  παίρνουμε τη μέθοδο Gauss-Seidel.

Μέθοδος Jacobi Over-relaxation (JOR)

- Η μέθοδος JOR αποτελεί τη γενίκευση της μεθόδου Jacobi και το κάθε x_i στην $k+1$ επανάληψη δίνεται απ’ τη σχέση :

  $x_i^{(k+1)} = (1-\omega)\cdot x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\cdot(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}\cdot x_j^{(k)})$ με $0<\omega<2$, ενώ για $\omega=1$ παίρνουμε τη μέθοδο Jacobi.

Μέθοδος Richardson

- Αν η αρχική εξίσωση $A\cdot x=b$ γραφεί σαν $x=x+\omega\cdot(b-A\cdot x)$ προκύπτει η μέθοδος Richardson και το κάθε x_i στην $k+1$ επανάληψη δίνεται απ’ τη σχέση :

  $x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega\cdot(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot x_j^{(k)})$ με $0<\omega<2$.

Μέθοδος Richardson-Gauss-Seidel

- Αν στον προηγούμενο τύπο χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Gauss-Seidel προκύπτει η μέθοδος Richardson- Gauss-Seidel και το κάθε x_i στην $k+1$ επανάληψη δίνεται απ’ τη σχέση :

  $x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega\cdot(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}\cdot x_j^{(k)})$ με $0<\omega<2$.

Μέθοδος Khaletsky

- Αν η αρχική εξίσωση $A\cdot x=b$ γραφεί σαν $B\cdot C\cdot x=b$, όπου B ένας πλήρης Κάτω Τριγωνικός Πίνακας που περιέχει στοιχεία στη διαγώνιο και C ένας Άνω Τριγωνικός Πίνακας που περιέχει μονάδες στη διαγώνιο και στοιχεία πάνω απ’ την κύρια διαγώνιο και αντικαταστήσουμε το $C\cdot x=y$, αντί του αρχικού συστήματος μπορούμε να επιλύσουμε δύο Τριγωνικά Συστήματα, τα $C\cdot x=y$ και $B\cdot y=b$.

Μέθοδος Τετραγωνικής Ρίζας

- Αν ο πίνακας Α είναι συμμετρικός ($A^T=A$) μπορεί να γραφεί σαν το γινόμενο δύο ανάστροφων τριγωνικών πινάκων $C^T\cdot C=A$, οπότε η αρχική εξίσωση $A\cdot x=b$ μπορεί να γραφεί σαν $B\cdot C\cdot x=b$, όπου C^T είναι ένας πλήρης Κάτω Τριγωνικός Πίνακας και C ένας πλήρης Άνω Τριγωνικός Πίνακας. Αν αντικαταστήσουμε το $C\cdot x=y$, αντί του αρχικού συστήματος μπορούμε να επιλύσουμε δύο Τριγωνικά Συστήματα, τα $C\cdot x=y$ και $C^T\cdot y=b$.

Άλυτες Ασκήσεις 5ου Κεφαλαίου

1. Να επιλυθεί το Διαγώνιο Σύστημα $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$**,** Λύση $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. Να επιλυθεί το Κάτω Τριγωνικό Σύστημα $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -7 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$**,** Λύση $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. Να επιλυθεί το Άνω Τριγωνικό Σύστημα $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & 7 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$, Λύση $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. Να επιλυθεί το Σύστημα $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -5 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$, (Λύση $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$) με

Απαλοιφή Gauss χωρίς Οδήγηση

5. Να επιλυθεί το Σύστημα $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -5 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$**,** (Λύση $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$) με

Απαλοιφή Gauss με μερική Οδήγηση

6. Να επιλυθεί το Σύστημα $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -5 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$**,** (Λύση $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$) με

Απαλοιφή Gauss με μερική Οδήγηση και Εξισορρόπηση

7. Να επιλυθεί το Σύστημα $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -5 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$, (Λύση $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$) με Απαλοιφή Gauss - Jordan

8. Να ελεγχθεί αν ο Πίνακας $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 6 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ έχει Διαγώνια Υπεροχή Κατά Γραμμές ή Στήλες

9. Να ελεγχθεί αν ο Πίνακας $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 6 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ έχει Διαγώνια Υπεροχή Κατά Γραμμές ή Στήλες.

10. Να επιλυθεί το Σύστημα $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, (Λύση $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$) με τη Μέθοδο Gauss – Seidel. Να βρεθούν μέχρι και οι τιμές των $x^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} \end{bmatrix}$.
Αρχικές Τιμές $x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & 3/4 & 3/4 \end{bmatrix}$

11. Να επιλυθεί το Σύστημα $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, (Λύση $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$) με τη Μέθοδο Jacobi. Να βρεθούν μέχρι και οι τιμές των $x^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} \end{bmatrix}$.

Αρχικές Τιμές $x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & 3/4 & 3/4 \end{bmatrix}$.

6 Ανιούσες Διαφορές

Γενικοί Ορισμοί
Σχέσεις Μεταξύ των 3 Τύπων Διαφορών
Μετάδοση Σφαλμάτων σε Πίνακες Διαφορών
Γραμμικοί Τελεστές Διαφορών

6.1 Γενικοί Ορισμοί

Ένα από τα κύρια αντικείμενα της Αριθμητικής Ανάλυσης είναι η προσέγγιση συναρτήσεων με άλλες απλούστερες, όπως τα πολυώνυμα. Σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της αντίστοιχης θεωρίας παίζουν οι λεγόμενες ανιούσες διαφορές.

Έστω ότι δίνονται οι τιμές μιας συναρτήσεως $f(x)$ για ορισμένες τιμές τις ανεξάρτητης μεταβλητής x γραμμένες σε μια στήλη. Από τις τιμές αυτές της συναρτήσεως κατασκευάζουμε τον πίνακα διαφορών ως εξής. Γράφουμε σε μια νέα στήλη προς τα δεξιά των προηγούμενων τις διαφορές που προκύπτουν, αν κάθε τιμή της συναρτήσεως του πίνακα την αφαιρέσουμε από την επόμενη τιμή της. Οι διαφορές αυτές, που γράφονται στη νέα στήλη μεταξύ των τιμών της συναρτήσεως από τις οποίες προήρθαν, καλούνται πρώτες διαφορές ή διαφορές πρώτης τάξης. Με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζουμε τώρα μια νέα στήλη προς τα δεξιά της στήλης των πρώτων διαφορών, όπου γράφουμε τις διαφορές που βρίσκουμε με τον ίδιο τρόπο από τις πρώτες διαφορές, όπως πριν βρήκαμε τις πρώτες διαφορές από τις τιμές τις συναρτήσεως. Οι νέες διαφορές καλούνται δεύτερες διαφορές ή διαφορές δεύτερης τάξης κ.ο.κ.. Γενικά, ένας πίνακας διαφορών που κατασκευάζεται με βάση $n+1$ τιμές της συναρτήσεως $f(x)$ εξαντλείται στη στήλη των διαφορών n τάξης.

❖ Απ' τον τρόπο που δημιουργείται ο πίνακας διαφορών, φαίνεται ότι οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής δεν τον επηρεάζουν και μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο σαν σημεία αναφοράς.

Παράδειγμα 6.1

- Να κατασκευαστεί ο πίνακας των προς τα εμπρός διαφορών για τις παρακάτω τιμές :

x	-3	-1	0	1	3
$f(x)$	-1	2	3	0	2

<u>Απάντηση</u>

- Ο πίνακας των προς τα εμπρός διαφορών θα έχει τη μορφή :

x	$f(x)$	*1ες διαφορές*	*2ες διαφορές*	*3ες διαφορές*	*4ες διαφορές*
-3	-1				
		2			
-1	1		0		
		2		-5	
0	3		-5		15
		-3		10	
1	0		5		
		2			
3	2				

❖ Ανάλογα με τον τρόπο που χρησιμοποιούμε για να συμβολίσουμε τις διαφορές του πίνακα διαφορών μπορούμε να διακρίνουμε τρεις τύπους διαφορών.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.1 : Οι πρώτες **προς τα εμπρός διαφορές** ορίζονται από τη σχέση:

$$\Delta f_n = \Delta f(x_n) = f(x_{n+1}) - f(x_n) = f_{n+1} - f_n$$

Οι δεύτερες προς τα εμπρός διαφορές ορίζονται από τη σχέση :

$$\Delta^2 f_n = \Delta(\Delta f_n) = \Delta f_{n+1} - \Delta f_n = (f_{n+2} - f_{n+1}) - (f_{n+1} - f_n) = f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n$$

Επαγωγικά, οι προς τα εμπρός διαφορές k τάξης ορίζονται σε σχέση με τις προς τα εμπρός διαφορές $k - 1$ τάξης ως εξής :

$$\Delta^k f_n = \Delta(\Delta^{k-1} f_n) = \Delta^{k-1} f_{n+1} - \Delta^{k-1} f_n$$

❖ Όταν χρησιμοποιείται ο συμβολισμός των προς τα εμπρός διαφορών, τότε ο πίνακας των διαφορών έχει την ακόλουθη μορφή :

x_{n-2}	f_{n-2}				
		Δf_{n-2}			
x_{n-1}	f_{n-1}		$\Delta^2 f_{n-2}$		
		Δf_{n-1}		$\Delta^3 f_{n-2}$	
x_n	f_n		$\Delta^2 f_{n-1}$		$\Delta^4 f_{n-2}$
		Δf_n		$\Delta^3 f_{n-1}$	
x_{n+1}	f_{n+1}		$\Delta^2 f_n$		
		Δf_{n+1}			
x_{n+2}	f_{n+2}				

❖ Οι ίδιοι δείκτες εμφανίζονται κατά μήκος διαγώνιων με φορά από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.2 : Οι πρώτες **προς τα πίσω διαφορές** ορίζονται από τη σχέση:

$$\nabla f_n = f(x_n) - f(x_{n-1}) = f_n - f_{n-1}$$

Οι δεύτερες προς τα πίσω διαφορές ορίζονται από τη σχέση :

$$\nabla^2 f_n = \nabla(\nabla f_n) = \nabla f_n - \nabla f_{n-1} = (f_n - f_{n-1}) - (f_{n-1} - f_{n-2}) = f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}$$

Επαγωγικά, οι προς τα πίσω διαφορές k τάξης ορίζονται σε σχέση με τις προς τα πίσω διαφορές k - 1 τάξης ως εξής :

$$\nabla^k f_n = \nabla(\nabla^{k-1} f_n) = \nabla^{k-1} f_n - \nabla^{k-1} f_{n-1}$$

- Ο πίνακας των προς τα πίσω διαφορών έχει τη μορφή :

x_{n-2}	f_{n-2}				
		∇f_{n-1}			
x_{n-1}	f_{n-1}		$\nabla^2 f_n$		
		∇f_n		$\nabla^3 f_{n+1}$	
x_n	f_n		$\nabla^2 f_{n+1}$		$\nabla^4 f_{n+2}$
		∇f_{n+1}		$\nabla^3 f_{n+2}$	
x_{n+1}	f_{n+1}		$\nabla^2 f_{n+2}$		
		∇f_{n+2}			
x_{n+2}	f_{n+2}				

- Οι ίδιοι δείκτες εμφανίζονται κατά μήκος διαγώνιων με φορά από τα κάτω αριστερά προς τα πάνω δεξιά.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.3 : Οι πρώτες **κεντρικές διαφορές** ορίζονται από τη σχέση:

$$\delta f_{n+1/2} = f(x_{n+1}) - f(x_n) = f_{n+1} - f_n$$

Οι δεύτερες **κεντρικές** διαφορές ορίζονται από τη σχέση :

$$\delta^2 f_n = \delta(\delta f_n) = \delta f_{n+1/2} - \delta f_{n-1/2} = (f_{n+1} - f_n) - (f_n - f_{n-1}) = f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}$$

Επαγωγικά, οι **κεντρικές** διαφορές περιττής και άρτιας τάξης ορίζονται σε σχέση με τις **κεντρικές** διαφορές της προηγούμενης τάξης ως εξής :

$$\delta^{2k-1} f_{n+1/2} = \delta(\delta^{2k-2} f_{n+1/2}) = \delta^{2k-2} f_{n+1} - \delta^{2k-2} f_n$$
$$\delta^{2k} f_n = \delta(\delta^{2k-1} f_n) = \delta^{2k-1} f_{n+1/2} - \delta^{2k-1} f_{n-1/2}$$

- Οι κεντρικές διαφορές περιττής τάξης αναφέρονται (με τον συμβολισμό τους) σε εικονικές τιμές της συναρτήσεως οι οποίες αντιστοιχούν σε τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής που είναι ημι-αθροίσματα διαδοχικών τιμών αυτής στον πίνακα, ενώ αντίθετα οι κεντρικές τιμές άρτιας τάξης αναφέρονται σε τιμές της συναρτήσεως του πίνακα.

- Όταν χρησιμοποιείται ο συμβολισμός των κεντρικών διαφορών, τότε ο πίνακας των διαφορών έχει την παρακάτω μορφή :

$$
\begin{array}{cccccc}
x_{n-2} & f_{n-2} & & & & \\
 & & \delta_{n-3/2} & & & \\
x_{n-1} & f_{n-1} & & \delta^{2}_{n-1} & & \\
\hline
 & & \delta_{n-1/2} & & \delta^{3}_{n-1/2} & \\
\hline
x_{n} & f_{n} & & \delta^{2}_{n} & & \delta^{4}_{n} \\
\hline
 & & \delta_{n+1/2} & & \delta^{3}_{n+1/2} & \\
\hline
x_{n+1} & f_{n+1} & & \delta^{2}_{n+1} & & \\
\hline
 & & \delta_{n+3/2} & & & \\
x_{n+2} & f_{n+2} & & & &
\end{array}
$$

- Οι ίδιοι δείκτες εμφανίζονται κατά μήκος της ίδιας οριζόντιας γραμμής.

6.2. Σχέσεις Μεταξύ των Τριών Τύπων Διαφορών

Οι πίνακες των διαφορών που χρησιμοποιούν τις προς τα εμπρός, τις προς τα πίσω και τις κεντρικές διαφορές συμπίπτουν απόλυτα. Περιέχουν δηλαδή τις ίδιες τιμές στις ίδιες θέσεις. Το μόνο που αλλάζει από τον έναν πίνακα στον άλλο είναι ο συμβολισμός που χρησιμοποιείται. Ο πίνακας διαφορών, ο οποίος περιέχει όλες τις διαφορές της $1^{ης}$ και $2^{ης}$ τάξης θα είναι :

$$
\begin{array}{cccc}
x_{n-2} & f_{n-2} & & \\
 & & \Delta f_{n-2} = \nabla f_{n-1} = \delta f_{n-\frac{3}{2}} & \\
x_{n-1} & f_{n-1} & & \Delta^2 f_{n-2} = \nabla^2 f_{n} = \delta^2 f_{n-1} \\
 & & \Delta f_{n-1} = \nabla f_{n} = \delta f_{n-\frac{1}{2}} & \\
x_{n} & f_{n} & & \Delta^2 f_{n-1} = \nabla^2 f_{n+1} = \delta^2 f_{n} \\
 & & \Delta f_{n} = \nabla f_{n+1} = \delta f_{n+\frac{1}{2}} & \\
x_{n+1} & f_{n+1} & & \Delta^2 f_{n} = \nabla^2 f_{n+2} = \delta^2 f_{n+1} \\
 & & \Delta f_{n+1} = \nabla f_{n+2} = \delta f_{n+\frac{3}{2}} & \\
x_{n+2} & f_{n+2} & &
\end{array}
$$

Όπως φαίνεται στον πίνακα, η τιμή της διαφοράς Δf_n $(= f_{n+1} - f_n)$ αν χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο των προς τα εμπρός διαφορών, ταυτίζεται με την τιμή ∇f_{n+1} $(= f_{n+1} - f_n)$ αν χρησιμοποιήσουμε τις προς τα πίσω διαφορές και με την τιμή $\delta f_{n+1/2}$ $(= f_{n+1} - f_n)$, αν χρησιμοποιήσουμε τις κεντρικές διαφορές.

Αντίστοιχα, η τιμή της διαφοράς $\Delta^2 f_n = \Delta f_{n+1} - \Delta f_n = (f_{n+2} - f_{n+1}) - (f_{n+1} - f_n)$ $= f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n$, αν χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο των προς τα εμπρός διαφορών, ταυτίζεται με την τιμή $\nabla^2 f_{n+2} = \nabla f_{n+2} - \nabla f_{n+1} = (f_{n+2} - f_{n+1}) - (f_{n+1} - f_n) = f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n$, αν χρησιμοποιήσουμε τις προς τα πίσω διαφορές και με την τιμή $\delta^2 f_{n+1}$ ($= \delta f_{n+3/2} - \delta f_{n+1/2} = (f_{n+2} - f_{n+1}) - (f_{n+1} - f_n) = f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n$), αν χρησιμοποιήσουμε τις κεντρικές διαφορές.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.4 : Η σχέση που συνδέει τα 3 είδη των διαφορών *k* τάξης είναι :

$$\Delta^k f_n = \nabla^k f_{n+k} = \delta^k f_{n+k/2}$$

Παρατήρηση

- Στις πιο πολλές περιπτώσεις, οι τιμές της συνάρτησης $f(x)$ δίνονται για ισαπέχουσες τιμές της μεταβλητής x, δηλαδή η διαφορά μιας τιμής της μεταβλητής x από την επόμενή της που είναι το βήμα της πινακοποίησης θα θεωρείται σταθερό και ίσο με $h > 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.1: Για τις διαφορές n τάξης ενός πολυωνύμου βαθμού n ισχύει :

$$\Delta^n P(x) = p_0 \cdot n! \cdot h^n = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω το πολυώνυμο βαθμού *n* :

$$P(x) = p_0 \cdot x^n + p_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} \cdot x + p_n \quad (p_0 \neq 0).$$

Σχηματίζουμε τις διαφορές πρώτης τάξης σε ένα οποιοδήποτε σημείο *x* του πίνακα. Επειδή τελικά οι τρεις τύποι διαφορών, όπως είδαμε πριν, συμπίπτουν, παίρνουμε για ευκολία προς τα εμπρός διαφορές. Έτσι χρησιμοποιώντας και το ανάπτυγμα του διώνυμου του Newton θα έχουμε :

$$\begin{aligned}
&\Delta P(x) = P(x+h) - P(x) \\
&= p_0 \cdot (x+h)^n + p_1 \cdot (x+h)^{n-1} + \ldots + p_{n-1} \cdot (x+h) + p_n - (p_0 \cdot x^n + p_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} \cdot x + p_n) \\
&= p_0 \cdot (x^n + n \cdot h \cdot x^{n-1} + \ldots) + p_1 \cdot (x^{n-1} + (n-1) \cdot h \cdot x^{n-2} + \ldots) + p_{n-1} \cdot (x+h) + p_n \\
&- (p_0 \cdot x^n + p_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} \cdot x + p_n) \\
&= p_0 \cdot n \cdot h \cdot x^{n-1} + \text{όροι βαθμού} < n-1
\end{aligned}$$

δηλαδή οι διαφορές πρώτης τάξης ενός πολυωνύμου βαθμού n που έχει συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου p_0, όταν το βήμα της πινακοποίησης είναι h, αποτελούν πολυώνυμο βαθμού $n-1$ που έχει συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου $a_0 \cdot n \cdot h$. Αντίστοιχα για τις διαφορές δεύτερης τάξης θα ισχύει :

$$\Delta^2 P(x) = \Delta(\,\Delta P(\,x\,)) = \Delta(\,p_0 \cdot n \cdot h \cdot x^{n-1} + όροιβαθμού < n - 1)$$
$$= p_0 \cdot n \cdot h \cdot (n-1) \cdot h \cdot x^{n-2} + όροιβαθμού < n - 2.$$

Για τις διαφορές τρίτης τάξης θα ισχύει :

$$\Delta^3 P(\,x\,) = p_0 \cdot n \cdot h \cdot (n-1) \cdot h \cdot (n-2) \cdot h \cdot x^{n-3} + όροιβαθμού < n - 3.$$

Και επαγωγικά για τις διαφορές *n* τάξης θα ισχύει :

$$\Delta^n P(\,x\,) = p_0 \cdot n \cdot h \cdot (\,n-1\,) \cdot h \cdot (\,n-2\,) \cdot h \cdots 2 \cdot h \cdot 1 \cdot h \cdot x^{n-n} \;=\; p_0 \cdot n! \cdot h^n = \text{σταθερό.}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 5.1: Οι διαφορές $n+1$ τάξης ενός πολυωνύμου βαθμού n είναι ίσες με μηδέν

Παράδειγμα 6.2

- Να κατασκευαστεί ο πίνακας των προς τα εμπρός διαφορών για τις τιμές της συναρτήσεως $P(\,x\,) = x^2$ στα σημεία $x = 2(\,0.2\,)3.$:

<u>Απάντηση</u>

- Ο πίνακας των προς τα εμπρός διαφορών θα έχει τη μορφή :

x	$P(\,x\,) = x^2$	*Διαφορές* $1^{ης}$ *Τάξης*	*Διαφορές* $2^{ης}$ *Τάξης*	*Διαφορές* $3^{ης}$ *Τάξης*
2.0	*4.00*			
		0.84		
2.2	*4.84*		*0.08*	
		0.92		*0*
2.4	*5.76*		*0.08*	
		1.00		*0*
2.6	*6.76*		*0.08*	
		1.08		*0*
2.8	*7.84*		*0.08*	
		1.16		
3.0	*9.00*			

❖ Όπως φαίνεται στο παράδειγμα, αφού η συνάρτηση είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού $(\,n = 2\,)$ οι διαφορές δεύτερης τάξης θα είναι σταθερές και ίσες με $p_0 \cdot n! \cdot h^2 = 1 \cdot 2! \cdot (\,0.2\,)^2 = 2 \cdot 0.04 = 0.08$, ενώ οι διαφορές τρίτης και ανώτερης τάξης θα είναι ίσες με μηδέν.

6.3. Μετάδοση Σφαλμάτων σε Πίνακα Διαφορών

Αν υπάρχουν κάποια σφάλματα σε μια ή περισσότερες τιμές μιας συναρτήσεως, αυτό έχει σαν συνέπεια, κατά την κατασκευή του πίνακα διαφορών της συναρτήσεως, να μεταδίδεται στις διαφορές ανώτερης τάξης και να αλλοιώνει σε μεγάλο βαθμό την τιμή τους, όπως φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί :

Παράδειγμα 6.3

- Να κατασκευαστεί ο πίνακας των προς τα εμπρός διαφορών για την αλληλουχία τιμών της συνάρτησης $f(x) = (0,0,0,1,0,0,0)$:

<u>Απάντηση</u>

- Ο πίνακας των προς τα εμπρός διαφορών θα έχει τη μορφή :

$f(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6	Δ^7	Δ^8
0								
	0							
0		0						
	0		0					
0		0		1				
	0		1		-5			
0		1		-4		15		
	1		-3		10		-35	
1		-2		6		-20		70
	-1		3		-10		35	
0		1		-4		15		
	0		-1		5			
0		0		1				
	0		0					
0		0						
	0							
0								

6.3.1. Μετάδοση Σφάλματος που Υπάρχει σε μια Από τις Τιμές της Συνάρτησης

Έστω ότι οι τιμές μιας συνάρτησης δίνονται πινακοποιημένες για διάφορες τιμές του x και σε μια από τις τιμές αυτές, έστω σε εκείνη που αντιστοιχεί στο x_n, υπάρχει σφάλμα ίσον με ε. Τότε είναι εύκολο να δούμε ότι ο πίνακας διαφορών της συναρτήσεως θα έχει την ακόλουθη μορφή :

x	$f(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
x_{n-4}	f_{n-4}				
		Δf_{n-4}			
x_{n-3}	f_{n-3}		$\Delta^2 f_{n-4}$		
		Δf_{n-3}		$\Delta^3 f_{n-4}$	
x_{n-2}	f_{n-2}		$\Delta^2 f_{n-3}$		$\Delta^4 f_{n-4}+\varepsilon$
		Δf_{n-2}		$\Delta^3 f_{n-3}+\varepsilon$	
x_{n-1}	f_{n-1}		$\Delta^2 f_{n-2}+\varepsilon$		$\Delta^4 f_{n-3}-4\cdot\varepsilon$
		$\Delta f_{n-1}+\varepsilon$		$\Delta^3 f_{n-2}-3\cdot\varepsilon$	
x_n	$f_n+\varepsilon$		$\Delta^2 f_{n-1}-2\cdot\varepsilon$		$\Delta^4 f_{n-2}+6\cdot\varepsilon$
		$\Delta f_n-\varepsilon$		$\Delta^3 f_{n-1}+3\cdot\varepsilon$	
x_{n+1}	f_{n+1}		$\Delta^2 f_n+\varepsilon$		$\Delta^4 f_{n-1}-4\cdot\varepsilon$
		Δf_{n+1}		$\Delta^3 f_n-\varepsilon$	
x_{n+2}	f_{n+2}		$\Delta^2 f_{n+1}$		$\Delta^4 f_n+\varepsilon$
		Δf_{n+2}		$\Delta^3 f_{n+1}$	
x_{n+3}	f_{n+3}		$\Delta^2 f_{n+2}$		
		Δf_{n+3}			
x_{n+4}	f_{n+4}				

Το σφάλμα ε που μεταδίδεται μέχρι και τις τέταρτες διαφορές είναι ίσο με γινόμενο του αρχικού σφάλματος ε επί τους αντίστοιχους διωνυμικούς συντελεστές *(1, -2,-1)* για τις δεύτερες διαφορές, *(1, -3, 3, -1)* για τις τρίτες διαφορές, *(1, -4, 6, -4, 1)* για τις τέταρτες διαφορές.

Παράδειγμα 6.4

- Να κατασκευαστεί πίνακας διαφορών για την εύρεση του σφάλματος που υπάρχει σε μια από τις τιμές της συνάρτησης *f(x)*, που δίνεται από τον παρακάτω πίνακα τιμών, όταν είναι γνωστό ότι αυτή είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού και να διορθωθεί η αντίστοιχη τιμή της.

x	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
f(x)	*-28*	*-9*	*-2*	*-1*	*1*	*7*	*26*	*63*	*124*

<u>Απάντηση</u>

- Ο πίνακας των προς τα εμπρός διαφορών θα έχει τη μορφή :

x	$f(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
1	*-28*				
		19			
2	*-9*		*-12*		
		7		*6*	
3	*-2*		*-6*		*1*
		1		*7*	
4	*-1*		*1*		*-4*
		2		*3*	
5	*1*		*4*		*6*
		6		*9*	
6	*7*		*13*		*-4*
		19		*5*	
7	*26*		*18*		*1*
		37		*6*	
8	*63*		*24*		
		61			
9	*124*				

Στον παραπάνω πίνακα θα έπρεπε οι τέταρτες διαφορές $\Delta^4 f(x)$ να ήταν ίσες με μηδέν, αφού η $f(x)$ είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού και είναι πινακοποιημένη σε σημεία που ισαπέχουν. Επομένως οι τέταρτες διαφορές που δεν είναι ίσες με μηδέν θα πρέπει να είναι ίσες με τα γινόμενα του σφάλματος ε επί τους αντίστοιχους διωνυμικούς συντελεστές *(1, -4, 6, -4, 1)*. Η τιμή *1* που εμφανίζεται στο κάτω μέρος του Πίνακα Διαφορών $4^{ης}$ τάξης είναι η τιμή της διαφοράς $\Delta^4 f(5)+\varepsilon=0+\varepsilon=1$, επειδή στην τιμή $f(5)$ υπάρχει σφάλμα ίσον με $\varepsilon = 1$. Άρα η αντίστοιχη διορθωμένη τιμή της συνάρτησης θα είναι $f(5) = 1 - \varepsilon = 1 - 1 = 0$.

6.3.2. Σφάλματα Στρογγυλοποίησης των Τιμών της Συνάρτησης

Υποθέτουμε ότι οι τιμές της συνάρτησης είναι πινακοποιημένες και έχουν στρογγυλευτεί σε k δ.ψ. Αυτό σημαίνει πως αν $\varepsilon_n^{(o)}$ παριστάνει το σφάλμα στρογγυλοποίησης που αντιστοιχεί στην οποιαδήποτε ακριβή τιμή της συνάρτησης $f(x_n) = f_n$, με αντίστοιχη προσεγγιστική τιμή $f(x_n^*) = f_n^*$, θα έχουμε

$$\left|\varepsilon_n^{(o)}\right| = \left|f_n^* - f_n\right| \le \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}$$

Αν $\varepsilon_n^{(1)}$ είναι το σφάλμα που αντιστοιχεί στην οποιαδήποτε ακριβή τιμή της πρώτης διαφοράς $\Delta f(x_n) = \Delta f_n$, με αντίστοιχη προσεγγιστική τιμή $\Delta f(x_n)^* = \Delta f_n^*$, θα έχουμε:

$$\varepsilon_n^{(1)} = \Delta f_n^* - \Delta f_n = (f_{n+1}^* - f_n^*) - (f_{n+1} - f_n) = (f_{n+1}^* - f_{n+1}) - (f_n^* - f_n) = \varepsilon_{n+1}^{(0)} - \varepsilon_n^{(0)}$$

οπότε :

$$\left|\varepsilon_n^{(1)}\right| = \left|\varepsilon_{n+1}^{(0)} - \varepsilon_n^{(0)}\right| \le \left|\varepsilon_{n+1}^{(0)}\right| + \left|\varepsilon_n^{(0)}\right| \le 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-k} = 2^0 \cdot 10^{-k}$$

Αν $\varepsilon_n^{(2)}$ είναι το σφάλμα που αντιστοιχεί στην οποιαδήποτε ακριβή τιμή της δεύτερης διαφοράς $\Delta^2 f(x_n) = \Delta^2 f_n$, με αντίστοιχη προσεγγιστική τιμή $\Delta^2 f(x_n)^* = \Delta^2 f_n^*$, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\varepsilon_n^{(2)} &= \Delta^2 f_n^* - \Delta^2 f_n = \Delta(\Delta f_n^*) - \Delta(\Delta f_n) = \Delta(f_{n+1}^* - f_n^*) - \Delta(f_{n+1} - f_n) = \Delta f_{n+1}^* - \Delta f_n^* - \Delta f_{n+1} + \Delta f_n \\ &= f_{n+2}^* - f_{n+1}^* - f_{n+1}^* + f_n^* - f_{n+2} + f_{n+1} + f_{n+1} - f_n = (f_{n+2}^* - f_{n+2}) - 2 \cdot (f_{n+1}^* - f_{n+1}) + (f_n^* - f_n) \\ &= \varepsilon_{n+2}^{(0)} - 2 \cdot \varepsilon_{n+1}^{(0)} + \varepsilon_n^{(0)}\end{aligned}$$

οπότε :

$$\left|\varepsilon_n^{(2)}\right| = \left|\varepsilon_{n+2}^{(0)} - 2 \cdot \varepsilon_{n+1}^{(0)} + \varepsilon_n^{(0)}\right| \le \left|\varepsilon_{n+1}^{(0)}\right| + 2 \cdot \left|\varepsilon_{n+1}^{(0)}\right| + \left|\varepsilon_n^{(0)}\right| \le 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-k} = 2^1 \cdot 10^{-k}$$

Επαγωγικά μπορεί να αποδειχτεί ότι αν $\varepsilon_n^{(m)}$ είναι το σφάλμα που αντιστοιχεί στην οποιαδήποτε ακριβή τιμή της διαφοράς *m* τάξης $\Delta^m f_n$, με αντίστοιχη προσεγγιστική τιμή $\Delta^m f_n^*$, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\varepsilon_n^{(m)} &= \Delta^m f_n^* - \Delta^m f_n = \Delta(\Delta^{m-1} f_n^*) - \Delta(\Delta^{m-1} f_n) = (\Delta^{m-1} f_{n+1}^* - \Delta^{m-1} f_n^*) - (\Delta^{m-1} f_{n+1} - \Delta^{m-1} f_n) \\ &= (\Delta^{m-1} f_{n+1}^* - \Delta^{m-1} f_{n+1}) - (\Delta^{m-1} f_n^* - \Delta^{m-1} f_n) = \varepsilon_{n+1}^{(m-1)} - \varepsilon_n^{(m-1)}\end{aligned}$$

οπότε :

$$\left|\varepsilon_n^{(m)}\right| = \left|\varepsilon_{n+1}^{(m-1)} - \varepsilon_n^{(m-1)}\right| \le \left|\varepsilon_{n+1}^{(m-1)}\right| + \left|\varepsilon_n^{(m-1)}\right| \le 2 \cdot 2^{m-2} \cdot 10^{-k} = 2^{m-1} \cdot 10^{-k}$$

Παράδειγμα 6.5

- Να κατασκευαστεί ο πίνακας των προς τα εμπρός διαφορών για τις τιμές της συνάρτησης $P(x) = x^2$ στα σημεία $x = 2(0.2)3$ στρογγυλευμένες σε ένα δ.ψ. Να βρεθεί ένα φράγμα για το απόλυτο σφάλμα στις τρίτες διαφορές της συνάρτησης που προέρχεται από τα σφάλματα στρογγυλοποίησης στις τιμές της :

<u>Απάντηση</u>

- Ο πίνακας των προς τα εμπρός διαφορών θα έχει τη μορφή :

x	$P(x) \approx x^2$	Διαφορές $1^{ης}$ Τάξης	Διαφορές $2^{ης}$ Τάξης	Διαφορές $3^{ης}$ Τάξης
2.0	4.0			
		0.8		
2.2	4.8		0.2	
		1.0		-0.2
2.4	5.8		0.0	
		1.0		0.0
2.6	6.8		0.0	
		1.0		0.2
2.8	7.8		0.2	
		1.2		
3.0	9.0			

Τα σφάλματα στρογγυλοποίησης που υπάρχουν στις πινακοποιημένες τιμές της συνάρτησης θα ικανοποιούν τη σχέση $|\varepsilon_n^{(0)}| \le \frac{1}{2} \cdot 10^{-k} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-1}$. Επομένως για τα σφάλματα στις τρίτες διαφορές ($m = 3$) της συνάρτησης θα ισχύει :

$$|\varepsilon_n^{(3)}| \le 2^{m-1} \cdot 10^{-k} = 2^{3-1} \cdot 10^{-1} = 0.25$$

Επομένως ένα απόλυτο φράγμα για τα σφάλματα αυτά είναι ο αριθμός 0.25.

Η συνάρτηση $f(x) = P(x) = x^2$ είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού επομένως θα έπρεπε οι δεύτερες διαφορές $\Delta^2 f_n$ να ήταν σταθερές και οι τρίτες $\Delta^3 f_n$ ίσες με μηδέν. Επειδή όμως υπάρχουν τα σφάλματα στρογγυλοποίησης στις τιμές τις συναρτήσεως οι τρίτες διαφορές θα είναι ίσες με:

$$\Delta^3 f_n^* = \Delta^3 f_n + \varepsilon_n^{(3)} = 0 + \varepsilon_n^{(3)} = \varepsilon_n^{(3)}.$$

δηλαδή οι τρίτες διαφορές αποτελούν σφάλματα και μόνο που προέρχονται από τα σφάλματα στρογγυλοποίησης στις τιμές της συνάρτησης. Επομένως θα πρέπει αυτά να φράζονται απόλυτα από τον αριθμό 0.25. Πραγματικά ισχύει:

$$|-0.2|, |0.2| \le 0.25$$

*6.4. Γραμμικοί Τελεστές Διαφορών

Χρησιμοποιήσαμε τα σύμβολα Δ, ∇ και δ για να συμβολίσουμε αντίστοιχα τις προς τα εμπρός, τις προς τα πίσω και τις κεντρικές διαφορές. Σύμβολα του τύπου αυτού στα μαθηματικά καλούνται τελεστές. Η τυπική ανάλυση των τελεστών, χρησιμοποιώντας τους κανόνες της άλγεβρας και της ανάλυσης, αποτελούν συχνά ένα κομψό μέσο για την ανεύρεση προσεγγιστικών τύπων. Οι συνήθεις τελεστές που περιλαμβάνουν και τους παραπάνω τελεστές, οι οποίοι καλούνται τελεστές διαφορών είναι :

$Ef(x) = f(x+h)$ ……………………………Τελεστής Μετατόπισης

$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ ……………………Τελεστής προς τα Εμπρός Διαφορών

$Df(x) = f'(x)$ ………………………………Διαφορικός Τελεστής

$\delta f(x) = f(x+\frac{1}{2}h) - f(x-\frac{1}{2}h)$ ……………..Τελεστής Κεντρικών Διαφορών

$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$ ……………………Τελεστής προς τα Πίσω Διαφορών

$\mu f(x) = \frac{1}{2}\left[f(x+\frac{1}{2}h) + f(x-\frac{1}{2}h) \right]$ ……….Μέσος Τελεστής

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.4 : Ένας τελεστής λέμε ότι είναι *γραμμικός* όταν :

$$T(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha \cdot Tf + \beta \cdot Tg$$

για αυθαίρετες σταθερές α, β, και αυθαίρετες συναρτήσεις f, g.

Παράδειγμα 6.6

- Να εφαρμοστεί ο παραπάνω ορισμός στον τελεστή Δ.

Απάντηση

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)) &= (\alpha \cdot f(x+h) + \beta \cdot g(x+h)) - (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)) \\ &= \alpha \cdot (f(x+h) - f(x)) + \beta \cdot (g(x+h) - g(x)) \\ &= \alpha \cdot \Delta f(x) + \beta \cdot \Delta g(x)\end{aligned}$$

- ❖ Οι παραπάνω έξι τελεστές είναι όλοι τους γραμμικοί.
- ❖ Η πράξη του πολλαπλασιασμού με μια σταθερά α, είναι επίσης ένας γραμμικός τελεστής.
- ❖ Εάν T, T_1, T_2 είναι τελεστές, τότε το άθροισμά τους, το γινόμενο κ.τ.λ. ορίζεται όπως παρακάτω:

$$(T_1 + T_2)f = T_1 f + T_2 f$$
$$(T_1 - T_2)f = T_1 f - T_2 f$$
$$(T_1 \cdot T_2)f = T_1 \cdot (T_2 f)$$
$$(\alpha \cdot T)f = \alpha \cdot (Tf)$$
$$T^n f = T \cdot T \cdots Tf \quad (n \text{ φορές})$$

❖ Οι παραπάνω τελεστές αντιμετατίθενται στη πράξη του πολλαπλασιασμού, δηλαδή αν T_1, T_2 είναι τελεστές, ισχύει $T_1 \cdot T_2 = T_2 \cdot T_1$.

Παράδειγμα 6.7

- Να αποδειχθεί ότι οι τελεστές *Δ* και *E* αντιμετατίθενται στη πράξη του πολλαπλασιασμού.

<u>Απάντηση</u>

$$\Delta \cdot Ef(x) = \Delta(Ef(x)) = \Delta f(x+h) = f(x+2h) - f(x+h)$$

και

$$E \cdot \Delta f(x) = E(f(x+h) - f(x)) = f(x+2h) - f(x+h)$$

άρα

$$\Delta \cdot E = E \cdot \Delta$$

Παρατηρήσεις

❖ Δύο τελεστές είναι ίσοι, $T_1 = T_2$, εάν $T_1 f = T_2 f$, για κάθε f.

❖ Μπορεί να αποδειχθεί ότι τα ακόλουθα ισχύουν για όλους τους γραμμικούς τελεστές:

$$(T_1 + T_2)f = (T_2 + T_1)f$$
$$(T_1 + (T_2 + T_3))f = ((T_1 + T_2)) + T_3)f$$
$$(T_1 \cdot (T_2 + T_3))f = (T_1 \cdot T_2 + T_1 \cdot T_3)f$$
$$(T_1 \cdot (T_2 \cdot T_3))f = ((T_1 \cdot T_2) \cdot T_3)f$$

❖ Ο τελεστής *I* θα λέμε ότι είναι ο μοναδιαίος ή ταυτοτικός τελεστής όταν για κάθε συνάρτηση *f(x)* και σε κάθε σημείο x αυτής ισχύει η σχέση $If(x) = f(x)$.

❖ Ο τελεστής T^{-1} θα λέμε ότι είναι ο δεξιός αντίστροφος του τελεστή T όταν ισχύει η σχέση $T \cdot T^{-1} = 1$. Αν ισχύει και η σχέση $T^{-1} \cdot T = 1$, δηλαδή ο τελεστής T^{-1} είναι συγχρόνως και αριστερός αντίστροφος του T, τότε θα λέμε απλά ότι ο T^{-1} είναι αντίστροφος του *T*. και θα ισχύει η σχέση $T \cdot T^{-1} = T^{-1} \cdot T = 1$.

- Είναι δυνατό να αποδειχθεί ότι από τους πέντε πρώτους γραμμικούς τελεστές Δ, ∇, δ, E και D μόνο ο E έχει αντίστροφο. Οι άλλοι τέσσερις έχουν μόνο δεξιό αντίστροφο. Γι' αυτόν τον δεξιό αντίστροφο T^{-1} ισχύει :

$$T^{-1} \cdot Tf(x) = f(x) + c$$

- Οι πέντε τελεστές Δ, ∇, δ, E και D υπακούν σχεδόν σε όλους τους νόμους της Άλγεβρας, με μόνη εξαίρεση την ιδιότητα του αντιστρόφου για τους Δ, ∇, δ και D και ότι προκύπτει από αυτήν. Επομένως μπορούμε σχεδόν πάντοτε να κάνουμε πράξεις μεταξύ τους με τον ίδιο τρόπο που κάνουμε πράξεις μεταξύ πραγματικών αριθμών. Ο αντίστοιχος λογισμός καλείται λογισμός των τελεστών και οι αντίστοιχες χρησιμοποιούμενες μέθοδοι καλούνται συμβολικές μέθοδοι.

Παράδειγμα 6.8

- Χρησιμοποιώντας το λογισμό των τελεστών να εκφραστούν οι τέσσερις τελεστές Δ, ∇, δ και D σαν συναρτήσεις του τελεστή E.

<u>Απάντηση</u>

- Για τον τελεστή Δ έχουμε:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = Ef(x) - f(x) = (E-1)f(x)$$

άρα $\Delta = E - 1$.

- Για τον τελεστή ∇ έχουμε:

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h) = f(x) - E^{-1} f(x) = (1 - E^{-1})f(x)$$

άρα $\nabla = 1 - E^{-1}$

- Για τον τελεστή δ έχουμε:

$$\delta f(x) = f(x + \frac{h}{2}) - f(x - \frac{h}{2}) = E^{1/2} f(x) - E^{-1/2} f(x) = (E^{1/2} - E^{-1/2}) f(x)$$

άρα $\delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$.

- Για να βρούμε τώρα τον τελεστή D σαν συνάρτηση του τελεστή E εργαζόμαστε κάπως αντίστροφα. Βρίσκουμε τον τελεστή E σαν συνάρτηση του τελεστή D που όπως θα δούμε προκύπτει ευκολότερα. Αν αναπτύξουμε τη συνάρτηση $f(x+h)$ σε συγκλίνουσα σειρά Taylor γύρω από το σημείο x παίρνουμε :

$$Ef(x) = f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{2!} \cdot f''(x) + \frac{h^3}{3!} \cdot f'''(x) + \ldots$$
$$= f(x) + \frac{h \cdot D}{1!} f(x) + \frac{h^2}{2!} \cdot D^2 f(x) + \frac{h^3}{3!} \cdot D^3 f(x) + \ldots$$

$$= \left(1 + \frac{h \cdot D}{1!} + \frac{(h \cdot D)^2}{2!} + \frac{(h \cdot D)^3}{3!} + \ldots + \right) f(x)$$
$$= e^{h \cdot D} f(x)$$

δηλαδή $E = e^{h \cdot D}$.

Λογαριθμίζοντας έχουμε :

$$D = \frac{1}{h} log\, E .$$

Παρατήρηση

- Όπως εργαστήκαμε στο παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου για να εκφράσουμε τους τελεστές *Δ*, ∇, *δ* και *D* σαν συναρτήσεις του τελεστή *E*, ανάλογα μπορούμε α εργαστούμε και να εκφράσουμε οποιοδήποτε από τους πέντε τελεστές σαν συνάρτηση οποιοδήποτε άλλου. Οι αντίστοιχες εκφράσεις που μπορούν να προκύψουν δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

	Δ	∇	δ	E	D
Δ		$(1-\nabla)^{-1} - 1$	$\frac{1}{2}\delta^2 + \delta\sqrt{1+\frac{\delta^2}{4}}$	$E - 1$	$e^{h \cdot D} - 1$
∇	$1 - (1+\Delta)^{-1}$		$-\frac{1}{2}\delta^2 + \delta\sqrt{1+\frac{\delta^2}{4}}$	$1 - E^{-1}$	$1 - e^{-h \cdot D}$
Δ	$\Delta(1+\Delta)^{-1/2}$	$\nabla(1-\nabla)^{-1/2}$		$E^{1/2} - E^{-1/2}$	$2 \cdot sinh\left(\frac{h \cdot D}{2}\right)$
E	$\Delta + 1$	$(1-\nabla)^{-1}$	$1 + \frac{1}{2}\delta^2 + \delta\sqrt{1+\frac{\delta^2}{4}}$		$e^{h \cdot D}$
D	$\frac{1}{h} log(1+\Delta)$	$-\frac{1}{h} log(1-\nabla)$	$\frac{2}{h} sinh^{-1}\frac{\delta}{2}$	$\frac{1}{h} log\, E$	

Παρατήρηση

- Για να αποδείξουμε μια ισότητα μεταξύ δυο τελεστών, ο απλούστερος ίσως από τους πολλούς τρόπους εργασίας, είναι να εκφράζουμε τα δυο μέλη της ισότητας σαν συναρτήσεις του τελεστή Ε και να αποδεικνύομε ότι οι δυο εκφράσεις συμπίπτουν.

Παράδειγμα 6.9

- Να αποδειχθεί ότι :

$$\Delta - \nabla = \Delta \cdot \nabla$$

<u>Απάντηση</u>

Επειδή $\Delta = E^{-1}$ και $\nabla = 1 - E^{-1}$ έχουμε :

$$\Delta - \nabla = E - 1 - (1 - E^{-1}) = E - 2 + E^{-1}$$
$$\Delta \cdot \nabla = (E - 1)(1 - E^{-1}) = E - 1 - 1 + E^{-1} = E - 2 + E^{-1}$$

άρα

$\Delta - \nabla = \Delta \cdot \nabla$.

Παρατήρηση

- Όταν χρησιμοποιούμε εκφράσεις της μορφής *log(1+Δ)* *ή* $(1 - \nabla)^{-1}$ ή $\sinh^{-1}\dfrac{\delta}{2}$ κ.λ.π, εννοούμε τις σειρές του τελεστή που συνδέονται με τις αντίστοιχες συναρτήσεις. Π.χ. όταν γράφουμε και χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό *log(1+Δ)* εννοούμε τη σειρά $\Delta - \dfrac{\Delta^2}{2} - \dfrac{\Delta^3}{3} - \ldots$.

Άλυτες Ασκήσεις 6^ου^ Κεφαλαίου

1. Να κατασκευαστεί ο πίνακας των προς τα εμπρός διαφορών για τις τιμές της συναρτήσεως $P(x) = x^3$ στα σημεία $x = 2(0.2)3$.
2. Να κατασκευαστεί πίνακας διαφορών για την εύρεση του σφάλματος που υπάρχει σε μια από τις τιμές της συνάρτησης *f(x)*, που δίνεται από τον παρακάτω πίνακα τιμών, όταν είναι γνωστό ότι αυτή είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού και να διορθωθεί η αντίστοιχη τιμή της.

x	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
f(x)	*0*	*4*	*18*	*48*	*101*	*1260*	*2352*	*4160*	*6480*

3. Να κατασκευαστεί ο πίνακας των προς τα εμπρός διαφορών για τις τιμές της συνάρτησης $P(x) = x^2 - 2$ στα σημεία $x = 2(0.2)3$ στρογγυλευμένες σε ένα δ.ψ. Να βρεθεί ένα φράγμα για το απόλυτο σφάλμα στις τρίτες διαφορές της συνάρτησης που προέρχεται από τα σφάλματα στρογγυλοποίησης στις τιμές της.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 \cdot x^4 - 1$. Να κατασκευαστεί πίνακας διαφορών για τις τιμές της $f(x_i) = x_0 + i \cdot h, x_0 = 0, h = 1, i = -1,0,1,2,3,4$. Με τη βοήθεια του πίνακα να βρεθούν οι τιμές για τις εκφράσεις $\delta f_{3/2}$, $\nabla^2 f_3$, $\Delta^3 f_1$.
5. Να δειχθεί ότι $\Delta^3(\alpha^x) = (\alpha^h - 1)^3 \cdot \alpha^x$, όπου *h* το βήμα της πινακοποίησης και *α* σταθερά.
6. Αν είναι γνωστό ότι το βήμα πινακοποίησης *h* για τη συνάρτηση x^3 είναι ίσο με *1*, να απλοποιηθεί η έκφραση $\nabla \Delta^2 x^3$.
7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3$, πινακοποιημένη στα σημεία $x_i = i, i = -3,-2,...,5$. Αν στην τιμή f_1 εισχωρήσει ένα σφάλμα $\varepsilon = -0.2$, να βρεθούν τα σφάλματα, που θα εισχωρήσουν στις τιμές Δf_0, $\nabla^2 f_1$. (Απ. -0.2, -0.2).
8. Αν οι παρακάτω τιμές αποτελούν τις τιμές ενός πολυωνύμου δευτέρου βαθμού σε σημεία, που ισαπέχουν, να βρεθεί το απομονωμένο σφάλμα που υπάρχει σε μια από αυτές και να διορθωθεί η τιμή αυτή.

x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
f(x)	*12*	*10*	*24*	*28*	*40*	*62*	*90*	*124*

9. Στις τιμές f_0 και f_1 του πίνακα τιμών μιας συναρτήσεως f υπάρχουν σφάλματα $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = 0.001$. Να βρεθεί το σφάλμα, που θα υπάρχει στην τιμή $\Delta^2 f_0$ του πίνακα διαφορών της υπόψη συναρτήσεως.

7 Παρεμβολή

Γενικά
Τύπος Παρεμβολής των προς τα Εμπρός Διαφορών των Newton-Gregory
Τύπος Παρεμβολής των προς τα Πίσω Διαφορών των Newton-Gregory
Πλήθος Όρων που Χρησιμοποιούνται στους Τύπους Παρεμβολής
Παρεμβολή Lagrange
Μετάδοση Σφαλμάτων σε Πίνακες Διαφορών
Διόρθωση στους Τύπους Παρεμβολής

7.1 Γενικά

Η παρεμβολή είναι ένα από τα σπουδαιότερα θέματα της Α.Α., γιατί αποτελεί τη βάση της πολυωνυμικής προσέγγισης μιας συνάρτησης από ένα πολυώνυμο. Όταν μας δίνονται πινακοποιημένες οι τιμές μιας συνάρτησης *f(x)* για κάποιες τιμές της μεταβλητής *x*, μπορούμε με τη βοήθεια των μεθόδων της παρεμβολής να βρούμε ένα πολυώνυμο – προσέγγιση της συνάρτησης *f(x)* ή την τιμή της συνάρτησης για κάποια τιμή του *x* που δεν υπάρχει στον πίνακα. Ανάλογα με το αν οι πινακοποιημένες οι τιμές της συνάρτησης *f(x)* που δίνονται είναι ισαπέχουσες ή όχι, προκύπτουν οι παρακάτω τύποι παρεμβολής :

7.2. Τύπος Παρεμβολής των προς τα Εμπρός Διαφορών των Newton – Gregory

Έστω *x* η τιμή της μεταβλητής για την οποία ζητάμε την αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης *f(x)*. Καλούμε με x_o μια από τις πινακοποιημένες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής, συνήθως την αμέσως μικρότερη τιμή από τη *x*, που περιέχεται στον πίνακα και με θ το λόγο $\theta = \frac{x - x_o}{h}$, οπότε το *x* θα δίνεται απ' τη σχέση $x = x_o + \theta \cdot h$.

Είναι φανερό ότι στην περίπτωση, που το x_o είναι η αμέσως μικρότερη τιμή του *x* στον πίνακα θα έχουμε $0 < \theta < 1$. Χρησιμοποιώντας τους τελεστές του προηγούμενου κεφαλαίου το *f(x)* γίνεται :

$$f(x) = f(x_0 + \theta \cdot h) = E^\theta f(x_0) = (1 + \Delta)^\theta f_0 = \left(1 + \binom{\theta}{1}\Delta + \binom{\theta}{2}\Delta^2 + \ldots + \binom{\theta}{n}\Delta^n + \ldots \right) f_o$$

$$= f_o + \binom{\theta}{1}\Delta f_o + \binom{\theta}{2}\Delta^2 f_o + \ldots + \binom{\theta}{n}\Delta^n f_o + \ldots$$

Ο τύπος που βρέθηκε ονομάζεται τύπος των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory.

Παρατηρήσεις

- Ο παραπάνω τύπος γράφεται συνήθως ως

$$f(x) = f_o + \binom{\theta}{1}\Delta f_o + \binom{\theta}{2}\Delta^2 f_o + \ldots + \binom{\theta}{n}\Delta^n f_o + R_{n+1}(x)$$

  όπου ο όρος $R_{n+1}(x)$ καλείται διόρθωση ή ακόμη και ως

$$f(x) \approx f_o + \binom{\theta}{1}\Delta f_o + \binom{\theta}{2}\Delta^2 f_o + \ldots + \binom{\theta}{n}\Delta^n f_o \,.$$

- Το άθροισμα του δεύτερου μέλους του τύπου των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory αποτελείται από ένα πεπερασμένο πλήθος όρων όταν η $f(x)$ είναι πολυώνυμο. Δηλαδή, για πολυώνυμο n βαθμού θα ισχύει $R_{n+1}(x) = 0$.

- Η παρεμβολή, για $0 < \theta < 1$, εφαρμόζεται καλύτερα στην αρχή ενός πίνακα, γιατί τότε είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν περισσότεροι όροι στο δεύτερο μέλος του τύπου. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να χρησιμοποιηθούν περισσότερες τιμές της συνάρτησης $f(x)$ και επομένως περισσότερες πληροφορίες για τη συμπεριφορά της.

- Η παρεμβολή μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τιμές του $\theta < 0$ *ή* $\theta > 1$. Στις περιπτώσεις όμως αυτές οι άλλοι τύποι παρεμβολής δίνουν καλύτερα αποτελέσματα.

Παράδειγμα 7.1

- Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών της συνάρτησης $f(x) = e^x$:

x	3.50	3.55	3.60
$f(x)$	33.115	34.813	36.598

  Χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory να βρεθεί πολυώνυμο παρεμβολής πρώτου βαθμού της $f(x)$ και να βρεθεί το $f(3.52)$.

Απάντηση

Κατασκευάζουμε τον πίνακα διαφορών της συναρτήσεως μέχρι τη στήλη των πρώτων διαφορών.

x	$f(x)$	Δ
3.50	33.115	
		1.698
3.55	34.813	
		1.785
3.60	36.598	

Χρησιμοποιώντας τώρα τον τύπο των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory με x_o έστω ίσο με *3.50*, οπότε $\theta = \dfrac{x - x_o}{h} = \dfrac{x - 3.5}{0.05} = 20 \cdot (x - 3.5)$, θα έχουμε

$$f(x) = f_o + \binom{\theta}{1} \cdot \Delta f_o = 33.115 + \binom{20 \cdot (x - 3.5)}{1} \cdot 1.698 = 33.96 \cdot x - 85.745$$
$$f(3.52) = 33.96 \cdot x - 85.745 = 33.96 \cdot 3.52 - 85.745 = 33.7892$$

❖ Η παρεμβολή με πολυώνυμο α' βαθμού λέγεται **γραμμική**.

Παράδειγμα 7.2

- Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών της συνάρτησης *f(x)* :

x	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*
f(x)	*2*	*1*	*0*	*-1*	*-2*

Χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory να βρεθεί η *f(x)* με την προϋπόθεση ότι αυτή είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού και να βρεθεί το *f(1.5)*.

<u>Απάντηση</u>

Κατασκευάζουμε τον πίνακα διαφορών της συναρτήσεως μέχρι τη στήλη των πρώτων διαφορών (οι δεύτερες διαφορές θα είναι μηδέν).

x	*f(x)*	*Δ*
-1	*0*	
		1
0	*1*	
		1
1	*2*	
		1
2	*3*	
		1
3	*4*	

Χρησιμοποιώντας τώρα τον τύπο των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory με x_o έστω ίσο με *-1*, οπότε $\theta = \dfrac{x - x_o}{h} = \dfrac{x - (-1)}{1} = x + 1$, θα έχουμε

$$f(x) = f_o + \binom{\theta}{1} \cdot \Delta f_o = 0 + \binom{x + 1}{1} \cdot 1 = 0 + \frac{(x + 1)!}{1! \cdot (x + 1 - 1)!} \cdot 1 = x + 1$$

Για $x = 1.5$ θα έχουμε $\theta = \dfrac{x - x_o}{h} = \dfrac{1.5 - (-1)}{1} = 2.5$ και

$$f(1.5) = f_o + \binom{2.5}{1} \cdot \Delta f_o = 0 + 2.5 \cdot 1 = 2.5$$

Παράδειγμα 7.3

- Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών της συνάρτησης *f(x)* :

x	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*
f(x)	*2*	*1*	*2*	*5*	*10*

Χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory να βρεθεί η *f(x)* με την προϋπόθεση ότι αυτή είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού.

Απάντηση

Κατασκευάζουμε τον πίνακα διαφορών της συναρτήσεως μέχρι τη στήλη των δεύτερων διαφορών (οι τρίτες διαφορές θα είναι μηδέν).

x	*f(x)*	Δ	Δ^2
-1	*2*		
		-1	
0	*1*		*2*
		1	
1	*2*		*2*
		3	
2	*5*		*2*
		5	
3	*10*		

Χρησιμοποιώντας τώρα τον τύπο των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory με x_o έστω ίσο με *-1*, οπότε $\theta = \frac{x - x_o}{h} = \frac{x - (-1)}{1} = x + 1$, θα έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= f_o + \binom{\theta}{1} \cdot \Delta f_o + \binom{\theta}{2} \cdot \Delta^2 f_o = 2 + \binom{x+1}{1} \cdot (-1) + \binom{x+1}{2} \cdot 2 \\ &= 2 + \frac{(x+1)!}{1! \cdot (x+1-1)!} \cdot (-1) + \frac{(x+1)!}{2! \cdot (x+1-2)!} \cdot 2 = 2 - (x+1) + \frac{x \cdot (x+1)}{2} \cdot 2 \\ &= 2 - x - 1 + x^2 + x = x^2 + 1 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 7.4

- Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών της συνάρτησης *f(x)* :

x	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*
f(x)	*0*	*1*	*2*	*9*	*28*

Χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory να βρεθεί η $f(x)$ με την προϋπόθεση ότι αυτή είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού.

<u>Απάντηση</u>

Κατασκευάζουμε τον πίνακα διαφορών της συναρτήσεως μέχρι τη στήλη των τρίτων διαφορών (οι τέταρτες διαφορές θα είναι μηδέν).

x	$f(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3
-1	0			
		1		
0	1		0	
		1		6
1	2		6	
		7		6
2	9		12	
		19		
3	28			

Χρησιμοποιώντας τώρα τον τύπο των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory με x_o έστω ίσο με -1, οπότε $\theta = \dfrac{x - x_o}{h} = \dfrac{x-(-1)}{1} = x + 1$, θα έχουμε

$$f(x) = f_o + \binom{\theta}{1}\cdot \Delta f_o + \binom{\theta}{2}\cdot \Delta^2 f_o + \binom{\theta}{3}\cdot \Delta^3 f_o = 0 + \binom{x+1}{1}\cdot 1 + \binom{x+1}{2}\cdot 0 + \binom{x+1}{3}\cdot 6$$

$$= 0 + (x+1) + \frac{(x+1)\cdot x\cdot (x-1)}{6}\cdot 6 = x + 1 + x^3 - x = x^3 + 1$$

Παράδειγμα 7.5

- Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών της συνάρτησης $f(x)$:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	2	9	28

Χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory να βρεθεί η $f(1.5)$ με προσέγγιση τριών δ.ψ.

<u>Απάντηση</u>

Χρησιμοποιούμε τον πίνακα διαφορών του Παραδείγματος 6.4 και έστω x_o η πρώτη τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής. Έτσι έχουμε $x_o = 0$ *και* $\theta = \dfrac{x - x_o}{h} = \dfrac{1.5-(-1)}{1} = 2.5$. Για την εύρεση του η $f(1.5)$ θα χρησιμοποιηθεί ο τύπος του Παραδείγματος 7.4, οπότε αντικαθιστώντας θα έχουμε :

$$f(1.5) = f_o + \binom{\theta}{1}\cdot \Delta f_o + \binom{\theta}{2}\cdot \Delta^2 f_o + \binom{\theta}{3}\cdot \Delta^3 f_o = 0 + \binom{2.5}{1}\cdot 1 + \binom{2.5}{2}\cdot 0 + \binom{2.5}{3}\cdot 6$$

$$= 0 + \frac{2.5}{1}\cdot 1 + \frac{2.5\cdot(2.5-1)}{2}\cdot 0 + \frac{2.5\cdot(2.5-1)\cdot(2.5-2)}{6}\cdot 6 = 0 + 2.5 + 0 + 1.875 = 4.375$$

Παράδειγμα 7.6

- Να υπολογισθεί το άθροισμα $S_n = \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory.

Απάντηση

$$\Delta S_n = S_{n+1} - S_n = \sum_{i=1}^{n+1} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i^2 = \left(1^2 + 2^2 + \ldots + (n+1)^2\right) - \left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right) = (n+1)^2$$

$$\Delta^2 S_n = \Delta(\Delta S_n) = \Delta((n+1)^2) = (n+2)^2 - (n+1)^2 = (n^2 + 4\cdot n + 4) - (n^2 + 2\cdot n + 1) = 2\cdot n + 3$$

$$\Delta^3 S_n = \Delta(\Delta^2 S_n) = \Delta(2\cdot n + 3) = 2\cdot(n+1) + 3 - 2\cdot n - 3 = 2$$

Αφού οι τρίτες διαφορές είναι σταθερές, το πολυώνυμο παρεμβολής θα είναι τρίτου βαθμού. Κατασκευάζουμε τον πίνακα διαφορών για τις 4 πρώτες τιμές :

$$S_1 = \sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1,$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{2} i^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

$$S_3 = \sum_{i=1}^{3} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$$

$$S_4 = \sum_{i=1}^{3} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

x_i	S_i	Δ	Δ^2	Δ^3
1	1			
		4		
2	5		5	
		9		2
3	14		7	
		16		
4	30			

Χρησιμοποιώντας τον τύπο των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory με x_o ίσο με 1, οπότε $\theta = \frac{n - x_o}{h} = \frac{n - 1}{1} = n - 1$, θα έχουμε

$$S_n = f_o + \binom{\theta}{1}\cdot \Delta f_o + \binom{\theta}{2}\cdot \Delta^2 f_o + \binom{\theta}{3}\cdot \Delta^3 f_o = 1 + \binom{n-1}{1}\cdot 4 + \binom{n-1}{2}\cdot 5 + \binom{n-1}{3}\cdot 2$$

$$= 1 + (n-1)\cdot 4 + \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}\cdot 5 + \frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{6}\cdot 2$$

$$= \frac{2\cdot n^3 + 3\cdot n^2 + n}{6} = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6}$$

7.3. Τύπος Παρεμβολής των προς τα Πίσω Διαφορών των Newton – Gregory

Αρχίζουμε καλώντας με x_o, συνήθως, την αμέσως μεγαλύτερη της x τιμή στον πίνακα. Έτσι έχουμε ότι :

$\theta = \dfrac{x_o - x}{h}$ με $0 < \theta < 1$.

χρησιμοποιώντας τους κατάλληλους τελεστές μπορούμε να πάρουμε διαδοχικά

$$f(x) = f(x_o - \theta\cdot h) = E^{-\theta} f(x_o) = \left((1-\nabla)^{-1}\right)^{-\theta} f_o = (1-\nabla)^{\theta} f_o =$$

$$= \left(1 - \binom{\theta}{1}\nabla + \binom{\theta}{2}\nabla^2 - \ldots\right) f_o = f_o - \binom{\theta}{1}\nabla f_o + \binom{\theta}{2}\nabla^2 f_o - \ldots$$

Ο τύπος που βρέθηκε και που είναι ο τύπος παρεμβολής των προς τα πίσω διαφορών των Newton – Gregory μπορεί να γραφτεί και ως

$$f(x) = f_o - \binom{\theta}{1}\nabla f_o + \binom{\theta}{2}\nabla^2 f_o - \ldots + (-1)^n \binom{\theta}{n}\nabla^n f_o + R_{n+1}(x)$$

Παρατηρήσεις

- Ισχύουν οι ίδιες παρατηρήσεις όπως στην περίπτωση του τύπου που χρησιμοποιεί τις προς τα εμπρός διαφορές. Η μόνη διαφορά είναι ότι η παρούσα παρεμβολή εφαρμόζεται καλύτερα στο τέλος ενός πίνακα.

Παράδειγμα 7.7

- Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών της συνάρτησης $f(x) = e^x$:

x	3.50	3.55	3.60
$f(x)$	33.115	34.813	36.598

Χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής των προς τα πίσω διαφορών των Newton – Gregory να βρεθεί πολυώνυμο παρεμβολής πρώτου βαθμού της $f(x)$ και να βρεθεί το $f(3.52)$.

Απάντηση

Κατασκευάζουμε τον πίνακα διαφορών της συναρτήσεως μέχρι τη στήλη των πρώτων διαφορών.

x	$f(x)$	∇
3.50	33.115	
		1.698
3.55	34.813	
		1.785
3.60	36.598	

Χρησιμοποιώντας τώρα τον τύπο των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory με x_o έστω ίσο με 3.55, οπότε $\theta = \dfrac{x - x_o}{h} = \dfrac{x - 3.55}{0.05} = 20 \cdot (x - 3.55)$, θα έχουμε

$$f(x) = f_o + \binom{\theta}{1} \cdot \nabla f_o = 34.813 + \binom{20 \cdot (x - 3.55)}{1} \cdot 1.698 = 33.96 \cdot x - 85.745$$

$$f(3.52) = 33.96 \cdot x - 87.443 = 33.96 \cdot 3.52 - 85.745 = 33.7942$$

Παράδειγμα 7.8

- Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών της συνάρτησης $f(x)$:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2	1	0	-1	-2

Χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής των προς τα πίσω διαφορών των Newton – Gregory να βρεθεί η $f(x)$ με την προϋπόθεση ότι αυτή είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού.

Απάντηση

Κατασκευάζουμε τον πίνακα διαφορών της συναρτήσεως μέχρι τη στήλη των πρώτων διαφορών (οι δεύτερες διαφορές θα είναι μηδέν).

x	$f(x)$	∇
-1	0	
		1
0	1	
		1
1	2	
		1
2	3	
		1
3	4	

Χρησιμοποιώντας τον τύπο των προς τα πίσω διαφορών των Newton – Gregory με x_o ίσο με *3*, οπότε $\theta = \frac{x_0 \text{ - } x}{h} = \frac{3 \text{ - } x}{1} = 3 - x$, θα έχουμε

$$f(x) = f_o - \binom{\theta}{1} \cdot \nabla f_o = 4 - \binom{3-x}{1} \cdot 1 = 4 + (x-3) = x+1$$

Παράδειγμα 7.9

- Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών της συνάρτησης *f(x)* :

x	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*
f(x)	*2*	*1*	*2*	*5*	*10*

Χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής των προς τα πίσω διαφορών των Newton – Gregory να βρεθεί η *f(x)* με την προϋπόθεση ότι αυτή είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού.

<u>Απάντηση</u>

Κατασκευάζουμε τον πίνακα διαφορών της συναρτήσεως μέχρι τη στήλη των δεύτερων διαφορών (οι τρίτες διαφορές θα είναι μηδέν).

x	*f(x)*	∇	∇^2
-1	*2*		
		-1	
0	*1*		*2*
		1	
1	*2*		*2*
		3	
2	*5*		*2*
		5	
3	*10*		

Χρησιμοποιώντας τον τύπο των προς τα πίσω διαφορών των Newton – Gregory με x_o ίσο με *3*, οπότε $\theta = \frac{x_0 \text{ - } x}{h} = \frac{3 \text{ - } x}{1} = 3 - x$, θα έχουμε

$$f(x) = f_o - \binom{\theta}{1} \cdot \nabla f_o + \binom{\theta}{2} \cdot \nabla^2 f_o = 10 - \binom{3-x}{1} \cdot 5 + \binom{3-x}{2} \cdot 2$$

$$= 10 - 5 \cdot (3-x) + \frac{(3-x) \cdot (2-x)}{2} \cdot 2$$

$$= 10 + 5 \cdot x - 15 + x^2 - 5 \cdot x + 6 = x^2 + 1$$

Παράδειγμα 7.10

- Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών της συνάρτησης *f(x)* :

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	2	9	28

Χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής των προς τα πίσω διαφορών των Newton – Gregory να βρεθεί η *f(x)* με την προϋπόθεση ότι αυτή είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού.

<u>Απάντηση</u>

Κατασκευάζουμε τον πίνακα διαφορών της συναρτήσεως μέχρι τη στήλη των τρίτων διαφορών (οι τέταρτες διαφορές θα είναι μηδέν).

x	$f(x)$	∇	∇^2	∇^3
-1	0			
		1		
0	1		0	
		1		6
1	2		6	
		7		6
2	9		12	
		19		
3	28			

Χρησιμοποιώντας τον τύπο των προς τα πίσω διαφορών των Newton – Gregory με x_o έστω ίσο με 3, οπότε $\theta = \dfrac{x_0 \text{ - } x}{h} = \dfrac{3 \text{ - } x}{1} = 3 - x$, θα έχουμε

$$f(x) = f_o - \binom{\theta}{1} \cdot \nabla f_o + \binom{\theta}{2} \cdot \nabla^2 f_o - \binom{\theta}{3} \cdot \nabla^3 f_o = 28 - \binom{3-x}{1} \cdot 19 + \binom{3-x}{2} \cdot 12 - \binom{3-x}{3} \cdot 6$$

$$= 28 - (3-x) \cdot 19 + \frac{(3-x)\cdot(2-x)}{2} \cdot 12 - \frac{(3-x)\cdot(2-x)\cdot(1-x)}{6} \cdot 6 = x^3 + 1$$

Παράδειγμα 7.11

- Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών της συνάρτησης *f(x)* :

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	2	9	28

Χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory να βρεθεί η *f(1.5)* με προσέγγιση τριών δ.ψ.

Απάντηση

Χρησιμοποιούμε τον πίνακα διαφορών του Παραδείγματος 7.10 και έστω x_o η πρώτη τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής. Έτσι έχουμε $x_o = 2$ και $\theta = \frac{x_o - x}{h} = \frac{2-1.5}{1} = 0.5$. Ο τύπος που θα χρησιμοποιηθεί είναι ο ακόλουθος

$$f(x) = f_o - \binom{\theta}{1}\cdot\nabla f_o + \binom{\theta}{2}\cdot\nabla^2 f_o - \binom{\theta}{3}\cdot\nabla^3 f_o$$

οπότε αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$\begin{aligned} f(1.5) &= f_o - \binom{\theta}{1}\cdot\nabla f_o + \binom{\theta}{2}\cdot\nabla^2 f_o - \binom{\theta}{3}\cdot\nabla^3 f_o = 9 - \binom{0.5}{1}\cdot 7 + \binom{0.5}{2}\cdot 6 + \binom{0.5}{3}\cdot 6 \\ &= 9 - 0.5\cdot 7 + \frac{0.5\cdot(0.5-1)}{2}\cdot 6 - \frac{0.5\cdot(0.5-1)\cdot(0.5-2)}{6}\cdot 6 = 9 - 3.5 - 0.75 - 0.375 = 4.375 \end{aligned}$$

7.4. Πλήθος Όρων που Χρησιμοποιούνται στους Τύπους Παρεμβολής

Κατά την εφαρμογή ενός οποιουδήποτε από τους δύο τύπους παρεμβολής που παρουσιάσαμε χρησιμοποιούμε ένα πεπερασμένο πλήθος όρων, μέχρι τον πρώτο όρο του τύπου παρεμβολής, που η απόλυτη τιμή του είναι απόλυτη ή ίση από μισή μονάδα της τελευταίας δεκαδικής τάξης του πίνακα διαφορών. Μπορούμε επομένως να βρούμε μέγιστες τιμές για τις οποίες, αν οι αντίστοιχες διαφορές παίρνουν απόλυτες τιμές μικρότερες ή ίσες από αυτές, τότε ο αντίστοιχος όρος του τύπου παρεμβολής θα έχει απόλυτη τιμή μικρότερη ή ίση από μισή μονάδα της τελευταίας δεκαδικής τάξης του πίνακα διαφορών. Έτσι μπορεί να καθοριστεί προκαταβολικά το μέγιστο πλήθος των όρων που θα χρησιμοποιηθούν στον τύπο παρεμβολής. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του τύπου παρεμβολής των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory με $0 < \theta < 1$, αν θέλουμε να βρούμε την τιμή του $f(x)$ με ακρίβεια k δεκαδικών ψηφίων, για το δεύτερο όρο θα έχουμε :

$$\left|\binom{\theta}{2}\Delta^2 f_o\right| \le \frac{1}{2}\cdot 10^{-k},\ 0 < \theta < 1.$$

Η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\left|\frac{\theta(\theta-1)}{2}\cdot\Delta^2 f_o\right| \le \frac{1}{2}\cdot 10^{-k} \Rightarrow max\left(\left|\theta(\theta-1)\right|\cdot\left|\Delta^2 f_o\right|\right) = 10^{-k},\ 0 < \theta < 1.$$

Αλλά

$$max\left(\left|\theta(\theta-1)\right|\right) = \frac{1}{4}, \theta = \frac{1}{2},\ \ 0 < \theta < 1$$

οπότε

$$\frac{1}{4}\cdot max\left(\left|\Delta^2 f_o\right|\right)=10^{-k} \Rightarrow max\left(\left|\Delta^2 f_o\right|\right)=4\cdot 10^{-k}$$

Άρα η μέγιστη απόλυτη τιμή που μπορεί να πάρει η δεύτερη διαφορά $\Delta^2 f_o$ είναι τέσσερις μονάδες τις τελευταίας δεκαδικής τάξης του πίνακα διαφορών.

Με μεθόδους παραπλήσιες μπορούν να βρεθούν μέγιστες απόλυτες τιμές για τις διαφορές οποιασδήποτε τάξης, σε μονάδες της τελευταίας δεκαδικής τάξης του πίνακα διαφορών, για τις οποίες τιμές ο αντίστοιχος όρος του τύπου παρεμβολής (συνεπώς και όλοι οι επόμενοί του) παραλείπεται στην πράξη. Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται οι πρώτες στη σειρά από τις τιμές αυτές για $0 < \theta < 1$, που αφορούν τους δυο τύπους παρεμβολής που έχουν βρεθεί.

	Δ^2/∇^2	Δ^3/∇^3	Δ^4/∇^4	Δ^5/∇^5	Δ^6/∇^6
Newton – Gregory (και οι δυο)	$4\cdot 10^{-k}$	$8\cdot 10^{-k}$	$12\cdot 10^{-k}$	$16\cdot 10^{-k}$	$21\cdot 10^{-k}$

Παράδειγμα 7.12

- Δίνεται ο πίνακας τιμών της συνάρτησης $f(x)=x^3$, $x=1(0.1)1.5$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory να βρεθεί το πλήθος όρων που θα χρησιμοποιηθούν για την εύρεση της τιμής $f(1.15)$ με ακρίβεια 3 δ.ψ..

<u>Απάντηση</u>

Ο πίνακας διαφορών θα είναι :

x	*f(x)*	*Δ*	*Δ²*	*Δ³*
1	*1.000*			
		0.331		
1.1	*1.331*		*0.066*	
		0.397		*0.006*
1.2	*1.728*		*0.072*	
		0.469		*0.006*
1.3	*2.197*		*0.078*	
		0.547		*0.006*
1.4	*2.744*		*0.084*	
		0.631		
1.5	*3.375*			

Χρησιμοποιώντας τον τύπο των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory με x_o ίσο με 1.1, οπότε $\theta=\frac{x - x_o}{h}=\frac{1.15 - 1.1}{0.1}=0.5$, θα έχουμε

$$\Delta^2 f_o = \Delta^2 f(1.1) = 0.066 > max\left(\left|\Delta^2 f_0\right|\right)=4\cdot 10^{-3} = 0.004$$

$$\Delta^3 f_o = \Delta^3 f(1.1) = 0.006 < max\left(\left|\Delta^3 f_0\right|\right) = 8 \cdot 10^{-3} = 0.008$$

Άρα μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι διαφορές μέχρι το πολύ δευτέρου βαθμού, οπότε θα έχουμε :

$$f(1.15)^* = f_o + \binom{\theta}{1} \cdot \Delta f_o + \binom{\theta}{2} \cdot \Delta^2 f_o = 1.331 + \binom{0.5}{1} \cdot 0.397 + \binom{0.5}{2} \cdot 0.072$$

$$= 1.331 + 0.5 \cdot 0.397 + \frac{(0.5) \cdot (0.5 - 1)}{2} \cdot 0.072 = 1.5205$$

Αν αντικαταστήσουμε στην $f(x) = x^3$ το 1.15 θα έχουμε :

$$f(1.15) = (1.15)^3 = 1.520875$$

και

$$|\varepsilon| = \left|f(1.15)^* - f(1.15)\right| = |1.5205 - 1.520875| = 0.000375 \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-k} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} = 0.0005$$

7.5. Τύπος Παρεμβολής του Lagrange

Οι τύποι παρεμβολής των Newton – Gregory χρησιμοποιούν διαφορές προερχόμενες από τις τιμές της συνάρτησης $f(x)$ για ισαπέχουσες τιμές της μεταβλητής x και δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν στις περιπτώσεις που οι τιμές της συνάρτησης δεν ισαπέχουν, οπότε πρέπει να βρούμε τύπους παρεμβολής για τη γενική περίπτωση, που οι τιμές της συνάρτησης δεν ισαπέχουν. Θεωρούμε, λοιπόν, ότι η συνάρτηση $f(x)$ δίνεται από τις τιμές της σε $n + 1$ σημεία $x_i,\ i = 0(1)n$, τα οποία, γενικά, δεν ισαπέχουν. Υποθέτουμε ακόμη ότι η συνάρτηση που δόθηκε, προσεγγίζεται από ένα πολυώνυμο $P_n(x)$ βαθμού το πολύ n, τέτοιο ώστε οι τιμές του πολυωνύμου $P_n(x)$ να συμπίπτουν με τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης $f(x)$ στα $n+1$ σημεία $x_i,\ i = 0(1)n$ και ικανοποιεί τις σχέσεις :

$$P_n(x_i) = f_i \quad | \ x_i,\ i = 0(1)n$$

Τα σημεία $x_i,\ i = 0(1)n$ καλούνται σημεία παρεμβολής, το δε πολυώνυμο $P_n(x)$ πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange. Η μορφή του πολυωνύμου $P_n(x)$ θα μπορούσε να είναι :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) \cdot f_i$$

με $L_i(x),\ \ i = 0(1)n$ πολυώνυμα βαθμού n, που καλούνται συντελεστές Lagrange, και ικανοποιούν τις σχέσεις :

$L_i(x_i) = 1$ και $L_i(x_j) = 0 \quad | i, j = 0(1)n,\ j \neq i$.

Για παράδειγμα το $P_n(x_0)$ θα είναι :

$$P_n(x_0)=\sum_{i=0}^{n} L_i(x_0)\cdot f_i = L_0(x_0)\cdot f_0 + L_1(x_0)\cdot f_1 + \ldots + L_n(x_0)\cdot f_n = f_0$$

Αφού $L_1(x_0),\ldots,L_n(x_0)=0$ και $L_0(x_0)=1$

Όπως φαίνεται απ' την επιλογή των συντελεστών Lagrange, το $L_i(x)$ μηδενίζεται για κάθε τιμή του $x=x_j,\ j=0(1)n,\ j\neq i$, άρα διαιρείται με κάθε $(x-x_j),\ j=0(1)n,\ j\neq i$ και κατ' επέκταση και με το γινόμενό τους, οπότε θα έχει την ακόλουθη μορφή :

$$L_i(x)\equiv A\cdot(x-x_o)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$$

όπου A σταθερά. Για την εύρεση της τιμής της σταθεράς A χρησιμοποιούμε τη σχέση $L_i(x_i)=1$, η οποία γίνεται :

$$L_i(x_i)=1=A\cdot(x_i-x_o)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)$$

οπότε

$$A=\frac{1}{(x_i-x_o)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω τιμή του A στην $L_i(x)$ βρίσκουμε ότι

$$L_i(x)=\frac{(x-x_o)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_o)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}=\frac{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x-x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)} \quad |\, i=0(1)n$$

Αν αντικαταστήσουμε το $L_i(x)$ στη σχέση $P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}L_i(x)\cdot f_i$, ο τύπος παρεμβολής του Lagrange γίνεται :

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x-x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)}\cdot f_i$$

και

$$f(x)=P_n(x)+R_{n+1}(x)$$

ή προσεγγιστικά

$$f(x)\approx P_n(x)$$

όπου $R_{n+1}(x)$ η διόρθωση που θα βρεθεί αναλυτικά.

Για συγκεκριμένες τιμές του *n* μπορούμε να βρούμε και συγκεκριμένες μορφές του τύπου παρεμβολής του Lagrange. Έτσι για $n = 1$ (**γραμμική** παρεμβολή) θα έχουμε :

$$f(x) \approx P_1(x) = \frac{x-x_1}{x_o-x_1}\cdot f_o + \frac{x-x_o}{x_1-x_0}\cdot f_1$$

Για $n = 2$ (**τετραγωνική** παρεμβολή) έχουμε

$$f(x) \approx P_2(x) = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_o-x_1)\cdot(x_o-x_2)}\cdot f_o + \frac{(x-x_o)\cdot(x-x_2)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)}\cdot f_1 + \frac{(x-x_o)\cdot(x-x_1)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)}\cdot f_2$$

Παρατηρήσεις:

- Κάθε άλλο πολυώνυμο, βαθμού το πολύ *n*, που θα ικανοποιεί τις σχέσεις $P_n(x_i) = f_i \mid x_i,\ i = 0(1)n$ θα ταυτίζεται με το πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange, γιατί τα δυο πολυώνυμα θα είναι βαθμού το πολύ *n* και θα παίρνουν τις ίδιες τιμές f_i για τις $n+1$ διαφορετικές τιμές της μεταβλητής $x = x_i \mid i = 0(1)n$. Αν, λοιπόν, χρησιμοποιηθούν τα ίδια ακριβώς $n+1$ σημεία παρεμβολής που ισαπέχουν, τότε οι αντίστοιχοι τύποι παρεμβολής των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory, των προς τα πίσω διαφορών των Newton – Gregory και του πολυωνύμου παρεμβολής του Lagrange συμπίπτουν, οπότε και η διόρθωση $R_{n+1}(x)$, που θα βρεθεί στην επόμενη παράγραφο αναλυτικά, για την περίπτωση πολυωνύμου παρεμβολής του Lagrange ισχύει και για όλους τους μέχρι τώρα τύπους παρεμβολής που έχουν βρεθεί.

Παράδειγμα 7.13

- Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών της συνάρτησης *f(x)* :

x	*-1*	*0*	*1*	*2*
f(x)	*0*	*1*	*2*	*9*

Χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής Lagrange να βρεθεί η *f(1.5)* με προσέγγιση τριών δ.ψ.

<u>Απάντηση</u>

Θα έχουμε $x_o = -1, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2\ ,\ x = 1.5$ και

$$f(x) = P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} L_i(x)\cdot f_i$$

Αλλά

$$L_o(1.5)\cdot f_o = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdot(x_0-x_3)}\cdot 0 = 0$$

$$L_1(1.5)\cdot f_1 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)}\cdot 1 = \frac{(2.5)\cdot(0.5)\cdot(-0.5)}{(1)\cdot(-1)\cdot(-2)}\cdot 1 = -0.3125$$

$$L_2(1.5)\cdot f_2 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_3)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)}\cdot 2 = \frac{(2.5)\cdot(1.5)\cdot(-0.5)}{(2)\cdot(1)\cdot(-1)}\cdot 2 = 1.875$$

$$L_3(1.5)\cdot f_3 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_3-x_0)\cdot(x_3-x_1)\cdot(x_3-x_2)}\cdot 9 = \frac{(2.5)\cdot(1.5)\cdot(0.5)}{(3)\cdot(2)\cdot(1)}\cdot 9 = 2.8125$$

οπότε

$$f(1.5) = 4.375$$

Παράδειγμα 7.14

- Χρησιμοποιώντας κατάλληλο τύπο παρεμβολής να βρεθεί πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, το πολύ, που να ταυτίζεται στα σημεία $x = -1, 0, 2$ με τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + 1$.

<u>Απάντηση</u>

Από τους τύπους παρεμβολής μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο τον τύπο παρεμβολής του Lagrange, αφού τα σημεία παρεμβολής δεν ισαπέχουν. Αν $x_o = -1, x_1 = 0, x_2 = 2$, θα έχουμε $f_o = 0, f_1 = 1, f_2 = 9$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής του Lagrange βρίσκουμε

$$f(x) \approx P_2(x) = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_o-x_1)\cdot(x_o-x_2)}\cdot f_o + \frac{(x-x_o)\cdot(x-x_2)}{(x_1-x_o)\cdot(x_1-x_2)}\cdot f_1 + \frac{(x-x_o)\cdot(x-x_1)}{(x_2-x_o)\cdot(x_2-x_1)}\cdot f_2 =$$

$$= \frac{(x-0)\cdot(x-2)}{(-1-0)\cdot(-1-2)}\cdot 0 + \frac{(x-(-1))\cdot(x-2)}{(0-(-1))\cdot(0-2)}\cdot 1 + \frac{(x-(-1))\cdot(x-0)}{(2-(-1))\cdot(2-0)}\cdot 9 =$$

$$= -\frac{(x+1)\cdot(x-2)}{2} + \frac{(x+1)\cdot x}{6}\cdot 9 = x^2 + x + 1$$

που είναι το ζητούμενο πολυώνυμο.

7.6. Διόρθωση στους Τύπους Παρεμβολής

Η διόρθωση $R_{n+1}(x)$ στον τύπο παρεμβολής του Lagrange μπορεί να δοθεί από τη διαφορά

$$R_{n+1}(x) = f(x) - P_n(x)$$

Είναι όμως δυνατό κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, που αφορούν τη συνάρτηση *f(x),* να βρεθεί μια άλλη έκφραση που, μερικές φορές, μπορεί να είναι πιο χρήσιμη. Για το σκοπό αυτό διατυπώνουμε χωρίς απόδειξη το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν I είναι το μικρότερο διάστημα που περιέχει όλα τα σημεία παρεμβολής x_i | i = 0(1)n και το τυχόν σημείο x (δηλαδή $I = [min(x,x_o,\dots,x_n), max(x,x_o,\dots x_n)]$) και η συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη μέχρι το n+1 βαθμό με παραγώγους συνεχείς, τότε η διόρθωση $R_{n+1}(x)$ του τύπου παρεμβολής του Lagrange δίνεται από την έκφραση

$$R_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\cdot\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

όπου $\xi \in I$.

Παράδειγμα 7.15

- Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών της συνάρτησης *f(x)* :

x	*1*	*2*	*3*
f(x)	*1*	*8*	*27*

Να βρεθεί ένα απόλυτο φράγμα για το σφάλμα αποκοπής, κατά την εύρεση της τιμής του πολυωνύμου παρεμβολής του Lagrange, που ορίζεται από τα σημεία $x_o = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$ και προσεγγίζει τη συνάρτηση $f(x) = x^3$ στο σημείο $x = 1.5$

<u>Απάντηση</u>

Θα έχουμε $f(x) = x^3$, $f^{'}(x) = 3\cdot x^2$, $f^{''}(x) = 6\cdot x$ και $f^{'''}(x) = 6$

οπότε

$$\left|R_{n+1}(1.5)\right| = \left|R_3(1.5)\right| = \left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\cdot\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right| = \left|(x - x_i)\cdot(x - x_i)\cdot(x - x_i)\cdot\frac{f^{'''}(\xi)}{(2+1)!}\right|$$

$$= \left|(1.5-1)\cdot(1.5-2)\cdot(1.5-3)\cdot\frac{6}{6}\right| = 0.375$$

Το Πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange θα είναι :

$$P_2(1.5) = \sum_{i=0}^{2} L_i(1.5)\cdot f_i$$

Αλλά

$$L_o(1.5)\cdot f_o = \frac{(x - x_1)\cdot(x - x_2)}{(x_0 - x_1)\cdot(x_0 - x_2)}\cdot f_o = \frac{(1.5-2)\cdot(1.5-3)}{(1-2)\cdot(1-3)}\cdot 1 = 0.375$$

$$L_1(1.5)\cdot f_1 = \frac{(x - x_0)\cdot(x - x_2)}{(x_1 - x_0)\cdot(x_1 - x_2)}\cdot f_1 = \frac{(1.5-1)\cdot(1.5-3)}{(2-1)\cdot(2-3)}\cdot 8 = 6$$

$$L_2(1.5)\cdot f_2 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)}\cdot f_2 = \frac{(1.5-1)\cdot(1.5-2)}{(3-1)\cdot(3-2)}\cdot 27 = -3.375$$

οπότε

$$P_2(1.5) = 0.375 + 6 - 3.375 = 3$$

και

$$f(1.5) = P_2(1.5) + R_3(1.5) = 3 + 0.375 = 3.375$$

που είναι ίσο με το $f(1.5) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} = 3.375$

Άλυτες Ασκήσεις 7^{ου} Κεφαλαίου

1. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών της συνάρτησης *f(x)* :

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	1	0	-1	-2

Χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory να βρεθεί η *f(x)* με την προϋπόθεση ότι αυτή είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού και να βρεθεί το *f(1.5)*.

2. Να χρησιμοποιηθεί ο πίνακας τιμών της Άσκησης 1 για να βρεθεί η *f(x)* με την προϋπόθεση ότι αυτή είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού και να βρεθεί το *f(1.5)*.

3. Να χρησιμοποιηθεί ο πίνακας τιμών της Άσκησης 1 για να βρεθεί η *f(x)* με την προϋπόθεση ότι αυτή είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού και να βρεθεί το *f(1.5)*.

4. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών της συνάρτησης *f(x)* :

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	1	0	-1	-2

Χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής των προς τα πίσω διαφορών των Newton – Gregory να βρεθεί το *f(1.5)* με προσέγγιση 3 δ.ψ

5. Να υπολογισθεί το άθροισμα $S_n = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + ... + n$ χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory.

6. Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής των σημείων *(-2, -5α), (0, α)* και *(1,4α)*, όπου *α* σταθερά.

7. Χρησιμοποιώντας κατάλληλο τύπο παρεμβολής, να βρεθεί πολυώνυμο το πολύ τρίτου βαθμού, που να παίρνει, τα σημεία $x = 0, 1, 3, 5$ τις τιμές $y = 3, 6, 18, 38$ αντίστοιχα.

8. Να αποδειχθεί αναλυτικά ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση των τριών *σημείων* $x_i = x_o + ih \mid i = 0(1)2$, ο τύπος παρεμβολής του Lagrange συμπίπτει με τον τύπο παρεμβολής των προς τα εμπρός διαφορών των Newton – Gregory.

9. Χρησιμοποιώντας κατάλληλο τύπο παρεμβολής να βρεθεί πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, το πολύ, που να ταυτίζεται στα σημεία $x = -1, 0, 2$ με τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 1$.

10. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών της συνάρτησης *f(x)* :

x	1	2	3
$f(x)$	0	6	24

Να βρεθεί ένα απόλυτο φράγμα για το σφάλμα αποκοπής, κατά την εύρεση της τιμής του πολυωνύμου παρεμβολής του Lagrange, που ορίζεται από τα σημεία $x_o = 1, x_1 = 2$, $x_2 = 3$ και προσεγγίζει τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - x$ στο σημείο $x = 1.5$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Atkinson Kendall E., "*An Introduction to Numerical Analysis*", New York: Willey, 1989.

[2] Dahlquist Germund –Bjorck Ake, "*Numerical Methods*", Translated by Ned Anderson, NJ: Prentice Hall, 1982.

[3] Demidovitch B.P. – Maron I. A., "*Computational Mathematics*", Translated by G. Yankofski: Mir Publishers, Moskcow, 1976.

[4] Fausett Laurene V., "*Applied Numerical Analysis Using Matlab*", Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1999.

[5] Gill P., Murray W., Wright M., "*Numerical Linear Algebra and Optimization, Volume I*", USA: Addison-Wesley, 1991.

[6] Kress Rainer, "*Numerical Analysis*", New York, Hong Kong: Springer, 1988.

[7] Scheid, Francis, "*Θεωρία και Προβλήματα στην Αριθμητική Ανάλυση*", Μετάφραση Αγάς Κωνσταντίνος: Εκδόσεις Τζιόλα, 2004.

[8] Schwartz H.R., "*Numerical Analysis : a Comprehensive Introduction*", New York: Willey, 1989.

[9] Ακρίβης Γεώργιος, Δουγαλής Βασίλης, "*Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*": Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1997.

[10] Κυτάγιας Δημήτρης, Βρυζίδης Λάζαρος, "*Αριθμητική Ανάλυση/Αλγοριθμική Προσέγγιση*": Εκδόσεις Ίων, 1991.

[11] Χατζηδήμος Απόστολος, "*Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*": Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ιωαννίνων, 1977.

[12] Χατζηδήμος Απόστολος, "*Αριθμητική Ανάλυση Ι και ΙΙ*": Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ιωαννίνων, 1979.