Μαθηματικά ΙΙΙ

Διακριτά Μαθηματικά

Ευσταθιος Αντωνιου

6 Δεκεμβρίου 2019

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής &
Ηλεκτρονικών Συστημάτων
Διεθνές Πανεπιστήμιο της Ελλάδας

Περιεχόμενα

1 Στοιχεία Θεωρίας Συνόλων

1.1 Βασικές Έννοιες

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγουμε κάποιες βασικές έννοιες γύρω από τα σύνολα. Η θεωρία συνόλων είναι ένας από τους θεμελιώδεις κλάδους των μαθηματικών. Στο παρόν ασχολούμαστε με τη λεγόμενη «απλοϊκή» θεωρία συνόλων. Η αυστηρή μελέτη της θεωρίας συνόλων απαιτεί αξιωματική θεμελίωση η οποία ξεφεύγει από τους σκοπούς του παρόντος κειμένου.

Ένας απλός ορισμός της έννοιας του συνόλου δόθηκε από τον Cantor και είναι ο παρακάτω:

Ορισμός (Cantor)**.** Σύνολο A ονομάζουμε κάθε συλλογή διακριτών αντικειμένων της αντίληψης ή της σκέψης μας, τα οποία ονομάζουμε «στοιχεία» του συνόλου.

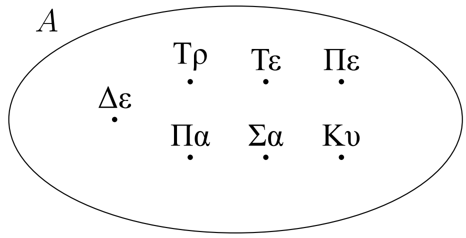
- Όταν ένα αντικείμενο x είναι στοιχείο του A γράφουμε $x \in A$. Στην αντίθετη περίπτωση γράφουμε $x \notin A$.

Ένα σύνολο μπορεί να περιγραφεί με διάφορους τρόπους:

- Περιγράφοντας ένα σύνολο μέσω της έκτασης του, δηλαδή αναγράφοντας τα στοιχεία του. Για παράδειγμα το σύνολο των ημερών της εβδομάδας, μπορεί να περιγραφεί ως

$$A = \{\text{Δευτέρα, Τρίτη, Τετάρτη, Πεμπτη, Παρασκευή, Σάββατο, Κυριακή}\}$$

- Χρησιμοποιώντας διαγράμματα Venn. Για παράδειγμα,



- Ένας τρίτος τρόπος είναι να χρησιμοποιηθεί ο συμβολισμός **κατασκευής συνόλου**. Σε αυτή την περίπτωση περιγράφουμε τα στοιχεία ενός συνόλου μέσω κάποιας χαρακτηριστικής ιδιότητας τους. Για παράδειγμα, το σύνολο των φοιτητών του τμήματος πληροφορικής θα μπορούσε να περιγραφεί ακολούθως:

$$A = \{x \mid x \text{ φοιτητής τμήματος Πληροφορικής}\}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο τρίτος τρόπος κατασκευής συνόλων, αν και είναι ένας από τους ποιο αποτελεσματικούς τρόπους περιγραφής συνόλων, μπορεί να οδηγήσει σε λογικά παράδοξα. Ένα από τα πιο γνωστά παράδοξα αυτής της κατηγορίας είναι το παρακάτω.

Παράδειγμα 1.1 (Παράδοξο Russell)**.** Έστω το σύνολο

$$A = \{x \mid x \notin x\}$$

Το A είναι ένα σύνολο που περιέχει ως στοιχεία του όλα τα σύνολα, τα οποία έχουν την ιδιότητα να μην περιέχουν ως στοιχείο τους τον εαυτό τους. Το παράδοξο προκύπτει αν αναρωτηθούμε κατά πόσο το ίδιο το A είναι στοιχείο του εαυτού του ή όχι.

Αν υποθέσουμε ότι $A \notin A$, τότε το A είναι ένα σύνολο που δεν περιέχει ως στοιχείο του τον εαυτό του, άρα σύμφωνα με τον ορισμό θα έπρεπε να ανήκει στο A. Όμως, αν δεχθούμε ότι $A \in A$, τότε το A περιέχει ως στοιχείο τον εαυτό του άρα δεν ανήκει στην κατηγορία των συνόλων που περιέχονται στο A. □

Μια σειρά από προβλήματα όπως αυτό που εύστοχα ανέδειξε το παράδοξο του Russell, οδήγησαν στη θεμελίωση της Αξιωματικής Θεωρίας Συνόλων. Η κατανόηση και μελέτη της θεωρίας αυτής είναι αρκετά δύσκολη, καθώς απαιτεί μεγάλη εξοικείωση με την χρήση της τυπικής λογικής. Στο παρόν κείμενο δεν θα μας απασχολήσουν προβλήματα όπως αυτό του παραδόξου του Russell, οπότε θα αρκεστούμε στην απλοϊκή θεώρηση των συνόλων που βασίζεται στην προσέγγιση του ορισμού που δόθηκε από τον Cantor.

Ακολουθούν μερικοί βασικοί ορισμοί γύρω από τα σύνολα καθώς και μερικά χρήσιμα συμπεράσματα.

- Δύο σύνολα A, B είναι **ίσα** και γράφουμε $A = B$, αν για κάθε x ισχύει $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.
- Όταν δύο σύνολα A, B δεν είναι ίσα, γράφουμε $A \neq B$.
- Το **κενό σύνολο** ορίζεται ως $\varnothing = \{\}$.
- Ένα σύνολο A λέγεται **υποσύνολο** του B, οπότε γράφουμε $A \subseteq B$, αν για κάθε $x \in A \Rightarrow x \in B$.
- Αν $A \subseteq B$ και $A \neq B$, γράφουμε $A \subset B$ ή $A \subsetneq B$, και το A λέγεται **γνήσιο υποσύνολο** του B.
- Για κάθε σύνολο A ισχύει: $\varnothing \subseteq A$ και $A \subseteq A$.
- Αποδεικνύεται ότι $A = B$, αν και μόνο αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.

Παράδειγμα 1.2. Τα σύνολα αριθμών που χρησιμοποιήσουμε συχνά και θεωρούνται γνωστά, είναι:

- Φυσικοί αριθμοί: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

- Ακέραιοι αριθμοί: $\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots\}$
- Ρητοί αριθμοί: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$
- Πραγματικοί αριθμοί: $\mathbb{R}$
- Μιγαδικοί αριθμοί: $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$

Για τα παραπάνω σύνολα ισχύει:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

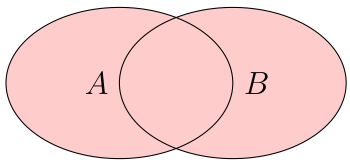
□

1.2 Πράξεις συνόλων

Δεδομένων δύο συνόλων A, B, ορίζουμε τις παρακάτω πράξεις συνόλων:

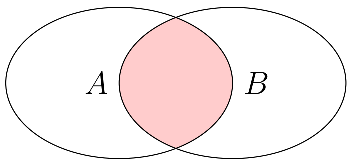
- **Ένωση** των A, B

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ή } x \in B\}$$



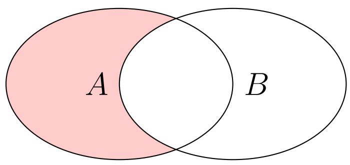
- **Τομή** των A, B

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ και } x \in B\}$$



- **Διαφορά** του A από το B

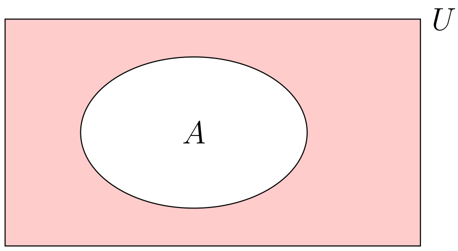
$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ και } x \notin B\}$$



Η διαφορά $A - B$ συμβολίζεται εναλλακτικά και $A \backslash B$.

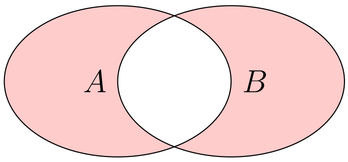
- **Συμπλήρωμα** του A ως προς το καθολικό σύνολο U:

$$A' = U - A = \{x \mid x \in U \text{ και } x \notin A\}$$



- **Συμμετρική Διαφορά** των A, B

$$A \triangle B = A \cup B - A \cap B = (A - B) \cup (B - A)$$



Οι παραπάνω πράξεις συνόλων εφαρμόζονται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 1.3. Έστω

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \text{ και } B = \{4, 5, 6, 7\}$$

Τότε

- $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $A \cap B = \{4, 5\}$
- $A - B = \{0, 1, 2, 3\}$ και $B - A = \{6, 7\}$
- $A' = \{6, 7, 8, 9, \ldots\}$ (συμπλήρωμα ως προς $\mathbb{N}$)
- $A \triangle B = \{0, 1, 2, 3\} \cup \{6, 7\} = \{0, 1, 2, 3, 6, 7\}$

□

Επιπλέον, πολύ χρήσιμες είναι οι έννοιες του καρτεσιανού γινομένου και του δυναμοσυνόλου που ορίζονται παρακάτω:

Ορισμός 1.4. Έστω δύο σύνολα A, B. Το **καρτεσιανό γινόμενο** των A, B είναι το σύνολο που περιέχει ως στοιχεία του όλα τα διατεταγμένα ζεύγη, των οποίων το πρώτο στοιχείο είναι στοιχείο του συνόλου A και το δεύτερο στοιχείο του συνόλου B. Δηλαδή,

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ και } y \in B\}.$$

Παράδειγμα 1.5. Έστω $A = \{a, b\}$ και $B = \{1, 2, 3\}$. Το καρτεσιανό γινόμενο των A, B είναι

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

□

Ορισμός 1.6. Το σύνολο των υποσυνόλων ενός συνόλου A ονομάζεται **δυναμοσύνολο** του A και συμβολίζεται $\mathcal{P}(A)$. Δηλαδή:

$$\mathcal{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$

Παράδειγμα 1.7. Έστω $A = \{a, b, c\}$, οπότε

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\}$$

□

1.3 Πληθάριθμοι

Εμπειρικά, ο πληθάριθμος ενός συνόλου A, που συμβολίζεται με $|A|$, εκφράζει το πλήθος τον στοιχείων του. Ο εμπειρικός αυτός ορισμός δεν έχει νόημα όταν αναφερόμαστε σε σύνολα που περιέχουν άπειρο πλήθος στοιχείων. Για να εισάγουμε την έννοια του πληθάριθμου με ακριβή τρόπο, ορίζουμε αρχικά ένα τρόπο σύγκρισης των πληθαρίθμων μεταξύ διαφορετικών συνόλων.

Ορισμός 1.8. Λέμε ότι $|A| \leq |B|$, αν υπάρχει απεικόνιση $f : A \mapsto B$ που είναι «ένα προς ένα»[1]. Επιπλέον,

- Αν υπάρχει κάποια $f : A \mapsto B$ που είναι «ένα προς ένα» και «επί»[2] του B, τότε λέμε ότι $|A| = |B|$.
- Αν ισχύει $|A| \leq |B|$, αλλά δεν ισχύει $|A| = |B|$, τότε λέμε ότι $|A| < |B|$.

Ιδιαίτερο ρόλο στη θεωρία των πληθαρίθμων παίζει η σύγκριση του πληθάριθμου ενός δεδομένο συνόλου, με αυτόν του συνόλου των φυσικών αριθμών. Συγκεκριμένα,

[1]Μια απεικόνιση $f : A \mapsto B$ λέγεται «ένα προς ένα», αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

[2]Μια απεικόνιση $f : A \mapsto B$ λέγεται «επί», αν για κάθε $y \in B$ υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$.

Ορισμός 1.9. Ένα σύνολο A λέγεται **αριθμήσιμο** αν $|A| \leq |\mathbb{N}|$, διαφορετικά λέγεται **μη αριθμήσιμο**. Ειδικότερα,

- Αν $|A| \geq |\mathbb{N}|$, τότε το A λέγεται **άπειρο**.
- Αν $|A| = |\mathbb{N}|$, τότε το A λέγεται **άπειρο** και **αριθμήσιμο** ή **απειραριθμήσιμο**.
- Αν $|A| < |\mathbb{N}|$, τότε το A λέγεται **πεπερασμένο** (και **αριθμήσιμο**).

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να ορίσουμε πλέον τον πληθάριθμο ενός δεδομένου συνόλου:

Ορισμός 1.10. Ο **πληθάριθμος** $|A|$ του A, ορίζεται ως εξής:

- Αν το A είναι πεπερασμένο, τότε $|A| =$ πλήθος των στοιχείων του A.
- Αν το A είναι απειραριθμήσιμο, τότε $|A| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Το σύμβολο $\aleph_0$ διαβάζεται «άλεφ μηδέν».
- Τα μη αριθμήσιμα σύνολα, έχουν πληθαρίθμους υπερπεπερασμένους αριθμούς οι οποίοι συμβολίζονται $\aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \ldots$
- Θεωρούμε ότι για τους πληθαρίθμους ισχύει η διάταξη:

$$0 < 1 < 2 < \ldots < \aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3, \ldots$$

Παράδειγμα 1.11. Ισχύει$|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$. Πράγματι, θεωρούμε την απεικόνιση $f{:}\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N}$

$$f(k) = \begin{cases} 2k, & k \geq 0 \\ -(2k+1), & k < 0 \end{cases}$$

μερικές τιμές της συνάρτησης f απεικονίζονται στον παρακάτω πίνακα

k	$\cdots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$f(k)$	$\cdots$	9	7	5	3	1	0	2	4	6	8	10	$\cdots$

Εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι η f είναι «ένα προς ένα» και «επί» του $\mathbb{N}$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $m, n \in \mathbb{Z}$, έτσι ώστε

$$f(m) = f(n) \tag{1.1}$$

Για να ισχύει η παραπάνω ισότητα πρέπει προφανώς οι αριθμοί m, n να είναι ομόσημοι, αφού οι θετικοί ακέραιοι αντιστοιχίζονται σε άρτιους φυσικούς, ενώ οι αρνητικοί σε περιττούς. Αν $m, n \geq 0$, τότε η σχέση (1.1) συνεπάγεται $2m = 2n$, άρα $m = n$. Αν αντίθετα $m, n < 0$, τότε η (1.1) δίνει $-(2m+1) = -(2n+1)$, οπότε και πάλι $m = n$. Άρα, η f είναι «ένα προς ένα».

Για να δείξουμε ότι η f είναι «επί» του συνόλου $\mathbb{N}$, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν n είναι ένας οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός, τότε

- αν ο n είναι άρτιος, τότε $n = f(\frac{n}{2})$,
- ενώ αν ο n είναι περιττός, τότε $n = f(-\frac{n+1}{2})$

Άρα, η f είναι «επί» του συνόλου $\mathbb{N}$. $\square$

Εκ πρώτης όψης το παραπάνω παράδειγμα μας οδηγεί σε ένα φαινομενικά περίεργο συμπέρασμα. Παρά το γεγονός ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι γνήσιο υποσύνολο των ακεραίων, στο παράδειγμα δείξαμε ότι οι πληθάριθμοι τους είναι ίσοι. Το αποτέλεσμα αυτό δεν πρέπει να μας εκπλήσσει επειδή τα δύο σύνολα δεν είναι πεπερασμένα. Ο πληθάριθμος ενός συνόλου εκφράζει κυριολεκτικά το πλήθος των στοιχείων του, μόνο όταν το σύνολο είναι πεπερασμένο.

Επιπλέον, το φαινομενικό παράδοξο επεκτείνεται ακόμη περισσότερο καθώς αποδεικνύεται το παρακάτω.

***Θεώρημα* 1.12.** *Τα σύνολα των φυσικών, των ακεραίων και των ρητών αριθμών έχουν τον ίδιο πληθάριθμο. Δηλαδή,* $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Συγκρίνοντας τον πληθάριθμο του συνόλου των πραγματικών αριθμών, με τον πληθάριθμο των τριών παραπάνω υποσυνόλων του, έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα που έχει αποδειχθεί από τον Cantor.

***Θεώρημα* 1.13.** *Το σύνολο των πραγματικών αριθμών, $\mathbb{R}$, δεν είναι αριθμήσιμο.*

Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι το σύνολο $\mathbb{R}$ έχει αυστηρά μεγαλύτερο πληθάριθμο από τους φυσικούς. Μάλιστα, παραμένει ακόμη αναπόδεικτη μέχρι σήμερα η παρακάτω εικασία που είναι γνωστή ως «υπόθεση του συνεχούς» και διατυπώνεται ως εξής:

***Εικασία* 1.14** (Υπόθεση του συνεχούς)**.** *Δεν υπάρχει σύνολο S τέτοιο ώστε* $|\mathbb{N}| < |S| < |\mathbb{R}|$.

Η υπόθεση του συνεχούς υποδεικνύει ότι το αμέσως «μεγαλύτερο», ως προς τον πληθάριθμο, σύνολο από τους φυσικούς αριθμούς δεν είναι άλλο από τους πραγματικούς (το συνεχές).

Κλείνουμε την παρούσα ενότητα, παρουσιάζοντας το θεώρημα που ακολουθεί, το οποίο παρέχει ορισμένες χρήσιμες σχέσεις που αφορούν, αντίστοιχα την ένωση, το καρτεσιανό γινόμενο και το δυναμοσύνολο πεπερασμένων συνόλων.

***Θεώρημα* 1.15.** *Αν A, B πεπερασμένα σύνολα, τότε:*

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- $|A \times B| = |A|\,|B|$
- $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

Δείχνουμε την εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 1.16. Έστω
$$A = \{1, 2, 3\} \text{και } B = \{3, 4\}$$
προφανώς $|A| = 3$ και $|B| = 2$. Για την ένωση των A, B έχουμε:
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$$
οπότε πράγματι
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 3 + 2 - 1 = 4$$
Αντίστοιχα το καρτεσιανό γινόμενο των A, B είναι
$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}$$
και προφανώς ισχύει
$$|A \times B| = |A|\,|B| = 3 \cdot 2 = 6$$
Τέλος, το δυναμοσύνολο του A είναι
$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{1, 2, 3\}\}$$
και ισχύει
$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^3 = 8$$
□

1.4 Η αρχή του περιστερώνα

Σύμφωνα με την **αρχή του περιστερώνα**, εάν έχουμε στη διάθεση μας m φωλιές για περιστέρια (περιστερώνες) και $n > m$ περιστέρια που πρόκειται να τοποθετηθούν στους περιστερώνες, τότε αναγκαστικά σε τουλάχιστον ένα από τους περιστερώνες πρέπει να τοποθετήσουμε τουλάχιστον δύο περιστέρια.

Η μαθηματική διατύπωση αυτής της απλής ιδέας είναι η παρακάτω.

***Θεώρημα* 1.17** (Αρχή του περιστερώνα)**.** *Αν A, B είναι δύο πεπερασμένα σύνολα με $|A| > |B|$, τότε για κάθε συνάρτηση $f : A \to B$ θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$.*

Η εμπειρική ερμηνεία που μπορεί να δοθεί στο παραπάνω θεώρημα είναι ότι το σύνολο A περιέχει ως στοιχεία τα περιστέρια, το σύνολο B περιέχει τους περιστερώνες, οπότε επειδή $|A| > |B|$ τα περιστέρια είναι περισσότερα από τους περιστερώνες. Άρα, για κάθε πιθανή αντιστοίχιση περιστεριών σε περιστερώνες, δηλαδή για κάθε συνάρτηση $f : A \to B$, θα υπάρχουν δύο περιστέρια x_1, x_2, τα οποία θα αντιστοιχίζονται στον ίδιο περιστερώνα, δηλαδή θα ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

Ουσιαστικά, η αρχή του περιστερώνα προκύπτει από τη μέθοδο σύγκρισης των πληθαρίθμων που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα. Σύμφωνα με αυτή, αν υπήρχε συνάρτηση

$f : A \to B$, τέτοια ώστε για κάθε πιθανό ζεύγος $x_1, x_2 \in A$ να ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$, τότε η f θα ήταν «ένα προς ένα». Άρα, θα ίσχυε $|A| \leq |B|$, γεγονός που αντιφάσκει με την υπόθεση $|A| > |B|$.

Η αρχή του περιστερώνα έχει πολλές ενδιαφέρουσες εφαρμογές, μερικές από τις οποίες παρουσιάζονται στα παραδείγματα που ακολουθούν:

Παράδειγμα 1.18. Σε 13 άτομα υπάρχουν τουλάχιστον 2, που έχουν γενέθλια τον ίδιο μήνα.

Πράγματι, εφαρμόζοντας την αρχή του περιστερώνα έχουμε να αντιστοιχήσουμε 13 άτομα, που εδώ παίζουν το ρόλο των περιστεριών, στους 12 μήνες του έτους, που παίζουν το ρόλο των περιστερώνων. Επειδή, όμως τα άτομα είναι περισσότερα από τους μήνες, τουλάχιστον δύο από αυτά θα έχουν ίδιο μήνα γενέθλια. □

Παράδειγμα 1.19. Σε ένα ντουλάπι υπάρχουν 10 διαφορετικά ζευγάρια παπούτσια. Πόσα παπούτσια τουλάχιστον πρέπει να διαλέξουμε στην τύχη, ώστε να είναι σίγουρο ότι θα έχουμε τουλάχιστον δύο παπούτσια από το ίδιο ζευγάρι;

Η απάντηση μπορεί να δοθεί εφαρμόζοντας, υπό μια έννοια αντίστροφα, την αρχή του περιστερώνα, χρησιμοποιώντας την λογική της «χειρότερης περίπτωσης». Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν επιλέξουμε μέχρι και 10 παπούτσια από το ντουλάπι, είναι πιθανό να είμαστε εξαιρετικά άτυχοι και όλα τους να ανήκουν σε ένα διαφορετικό ζευγάρι. Αν όμως επιλέξουμε 11 ή περισσότερα παπούτσια, τότε είναι σίγουρο ότι θα σχηματίσουμε τουλάχιστον ένα ζεύγος.

Η αντιστοιχία της λογικής της «χειρότερης περίπτωσης», με αυτή της αρχής του περιστερώνα στο συγκεκριμένο παράδειγμα, προκύπτει αν προσπαθούμε να αντιστοιχίσουμε 11 παπούτσια (περιστέρια) σε 10 ζευγάρια (περιστερώνες), οπότε αναγκαστικά τουλάχιστον δύο από αυτά θα αντιστοιχιστούν με το ίδιο ζευγάρι. □

Παράδειγμα 1.20. Να αποδειχθεί ότι αν σε ένα parking 100 διαδοχικών θέσεων, παρκάρουμε 51 αυτοκίνητα, τότε σίγουρα τουλάχιστον δύο από αυτά θα τοποθετηθούν σε διαδοχικές θέσεις.

Το parking των 100 θέσεων θα μπορούσε να φιλοξενήσει μέχρι το πολύ 50 αυτοκίνητα, χωρίς αυτά να τοποθετηθούν σε διαδοχικές θέσεις, αφού κάθε αυτοκίνητο θα απαιτούσε εκτός από τη δική του θέση και μια κενή θέση ακριβώς δίπλα του. Εφόσον ζητείται να τοποθετηθούν 51 αυτοκίνητα (περιστέρια) σε 50 υποδοχές (περιστερώνες, που είναι ουσιαστικά ζευγάρια διαδοχικών θέσεων), τουλάχιστον δύο από αυτά θα πρέπει να τοποθετηθούν στον ίδιο περιστερώνα, δηλαδή ακριβώς δίπλα σε κάποια άλλο αυτοκίνητο. □

Παράδειγμα 1.21. Να αποδειχθεί ότι σε μια συνάντηση n ατόμων τα οποία ανταλλάσσουν χειραψίες (όχι απαραίτητα όλοι με όλους), υπάρχουν τουλάχιστον δύο άτομα που θα ανταλλάξουν τον ίδιο αριθμό χειραψιών.

Για να αποδείξουμε το ζητούμενο θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή του περιστερώνα. Σημειώστε ότι οι χειραψίες που μπορούν να πραγματοποιηθούν μεταξύ n ατόμων είναι από 0 έως $n-1$. Δηλαδή συνολικά οι δυνατοί διαφορετικοί αριθμοί χειραψιών μεταξύ n ατόμων είναι n. Εκ πρώτης όψης φαίνεται ότι η αρχή του περιστερώνα δεν μπορεί να εφαρμοστεί, αφού όσα είναι τα άτομα, τόσοι είναι και οι διαφορετικοί αριθμοί χειραψιών που μπορεί να πραγματοποιηθούν. Μια προσεκτικότερη ανάλυση όμως δείχνει ότι η παραπάνω παρατήρηση δεν είναι ακριβής. Αυτό μπορεί να γίνει σαφές διακρίνοντας τις δύο παρακάτω περιπτώσεις:

- Υπάρχει τουλάχιστον ένα άτομο που δεν ανταλλάσσει χειραψία με κανένα άλλο άτομο. Σε αυτή την περίπτωση δεν μπορεί να υπάρχει άτομο που θα πραγματοποιήσει $n-1$ χειραψίες, αφού κάτι τέτοιο θα σήμαινε ότι το άτομο αυτό, θα αντάλλασσε χειραψία και με τον «αντικοινωνικό» της συνάντησης. Άρα, οι δυνατοί διαφορετικοί αριθμοί χειραψιών είναι από 0 ως $n-2$, δηλαδή $n-1$ σε πλήθος. Άρα, εφαρμόζοντας την αρχή του περιστερώνα, ανάμεσα στα n άτομα θα υπάρχουν τουλάχιστον δύο άτομα που θα ανταλλάξουν τον ίδιο αριθμό χειραψιών.

- Όλα τα άτομα της συνάντησης ανταλλάσσουν τουλάχιστον μια χειραψία. Άρα, οι διαφορετικοί αριθμοί χειραψιών είναι από 1 ως $n-1$, δηλαδή $n-1$ σε πλήθος διαφορετικοί αριθμοί χειραψιών. Άρα, εφαρμόζοντας την αρχή του περιστερώνα, καταλήγουμε και πάλι στο ζητούμενο συμπέρασμα.

□

Η αρχή του περιστερώνα μπορεί να γενικευθεί στην μορφή που ακολουθεί.

***Θεώρημα* 1.22** (Γενικευμένη αρχή του περιστερώνα). *Αν A, B είναι δύο πεπερασμένα σύνολα, τότε για κάθε συνάρτηση $f : A \to B$ θα υπάρχουν τουλάχιστον*

$$k = \left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil$$

στοιχεία $x_1, x_2, \ldots, x_k \in A$, με $x_i \neq x_j$ για $i \neq j$ και $i, j = 1, 2, \ldots, k$, τέτοια ώστε

$$f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_k)$$

όπου $\lceil q \rceil$ συμβολίζει την οροφή (ceiling) του αριθμού q, δηλαδή $\lceil q \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid q \leq n\}$.

Η εφαρμογή της γενικευμένης αρχής του περιστερώνα παρουσιάζεται στα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 1.23. Σύμφωνα με τη γενικευμένη αρχή του περιστερώνα, σε 1000 άτομα υπάρχουν τουλάχιστον $\left\lceil \frac{1000}{365} \right\rceil = 3$, άτομα που έχουν την ίδια ημέρα του έτους γενέθλια. □

Παράδειγμα 1.24. Δεδομένου ότι σε μια τράπουλα τα φύλλα φέρουν ένα από τα τέσσερα σύμβολα, κούπα, σπαθί, καρό ή μπαστούνι, επιλέγοντας 9 φύλλα θα εμφανιστούν τουλάχιστον $\left\lceil \frac{9}{4} \right\rceil = 3$, φύλλα με το ίδιο σύμβολο. □

Παράδειγμα 1.25. Πόσα τουλάχιστον φύλλα πρέπει να επιλεγούν από μια τράπουλα, έτσι ώστε να επιλέξουμε τουλάχιστον 3 κούπες;

Στο συγκεκριμένο ερώτημα, αντίθετα με το προηγούμενο παράδειγμα, δεν ζητείται να επιλεγούν 3 τουλάχιστον φύλλα του ίδιου συμβόλου, αλλά 3 τουλάχιστον φύλλα ενός συγκεκριμένου συμβόλου (κούπες). Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούμε τη λογική της «χειρότερης περίπτωσης». Σύμφωνα με αυτή, αν επιλέξουμε μέχρι $3 \times 13 = 39$ φύλλα, είναι πιθανό όντας εξαιρετικά άτυχοι, να έχουμε τραβήξει όλα τα φύλλα που εμφανίζουν τα τρία άλλα σύμβολα, δηλαδή σπαθί, καρό και μπαστούνι. Για να είμαστε σίγουροι ότι θα επιλεγούν τουλάχιστον 3 κούπες, θα πρέπει να επιλέξουμε τουλάχιστον $39 + 3 = 42$ φύλλα. □

Παράδειγμα 1.26. Να δειχθεί ότι σε ένα αρχείο που αποτελείται από 10000 bytes, περιέχονται τουλάχιστον 40 ίδια bytes.

Κάθε byte μπορεί να πάρει $2^8 = 256$ διαφορετικές τιμές. Αν προσπαθήσουμε να αντιστοιχήσουμε τα 10000 bytes του αρχείου στις 256 διαφορετικές τιμές που μπορεί να υπάρξουν, τότε σύμφωνα με τη γενικευμένη αρχή του περιστερώνα, θα υπάρχουν τουλάχιστον

$$\left\lceil \frac{10000}{256} \right\rceil = 40$$

όμοια bytes. □

Παράδειγμα 1.27. Από πόσα τουλάχιστον bytes πρέπει να αποτελείται ένα αρχείο, ώστε να είναι σίγουρο ότι περιέχει τουλάχιστον πέντε ίδια bytes; .

Εφόσον με ένα byte μπορούμε να κωδικοποιήσουμε $2^8 = 256$ διαφορετικούς αριθμούς, αναζητούμε το ελάχιστο πλήθος των bytes n, από το οποίο πρέπει να αποτελείται το αρχείο, έτσι ώστε σύμφωνα με τη γενικευμένη αρχή του περιστερώνα να ισχύει

$$\left\lceil \frac{n}{256} \right\rceil = 5$$

Η ελάχιστη τιμή του n για την οποία ισχύει η παραπάνω σχέση είναι

$$n = 256 \times 4 + 1 = 1025.$$

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε τη λογική της «χειρότερης περίπτωσης». Αν το αρχείο αποτελείται από μέχρι και $4 \times 256 = 1024$ bytes, τότε μπορεί να μην συναντήσουμε 5 όμοια, αφού μπορεί κάθε ένα από τα 256 διαφορετικά bytes να εμφανιστεί ακριβώς 4 φορές. Αν όμως το αρχείο έχει ένα επιπλέον byte, δηλαδή συνολικά 1025, τότε είναι σίγουρο ότι τουλάχιστον 5 bytes θα είναι όμοια. □

Παράδειγμα 1.28. Δίνονται οι αριθμοί $10, 11, 12, 13, \ldots, 98, 99$. Πόσους τουλάχιστον από τους παραπάνω αριθμούς πρέπει να επιλέξουμε ώστε:

1. Να επιλέξουμε ένα τουλάχιστον πολλαπλάσιο του 3;
2. Να επιλεγούν δύο τουλάχιστον αριθμοί με το ίδιο πρώτο ψηφίο;
3. Να επιλεγούν δύο τουλάχιστον αριθμοί με ένα κοινό ψηφίο;

Οι απαντήσεις δίνονται χρησιμοποιώντας την λογική της «χειρότερης περίπτωσης».

1. Τα πολλαπλάσια του 3 που συμπεριλαμβάνονται στην ακολουθία των 90 ακεραίων από το 10 ως το 99, είναι
$$12, 15, 18, \ldots, 96, 99$$
τα οποία σε πλήθος είναι $\frac{99-12}{3}+1 = 30$. Στη χειρότερη περίπτωση μπορεί να επιλέξουμε $90 - 30 = 60$ μη πολλαπλάσια του 3. Συνεπώς, αν επιλέξουμε 61 αριθμούς θα έχουμε τουλάχιστον ένα πολλαπλάσιο του 3.

2. Στη χειρότερη περίπτωση μπορεί να επιλέξουμε 9 διψήφιους αριθμούς με διαφορετικά πρώτα ψηφία, δηλαδή αριθμούς της μορφής
$$1X, 2X, 3X, 4X, 5X, 6X, 7X, 8X, 9X,$$
όπου X είναι οποιοδήποτε ψηφίο. Άρα, αν επιλέξουμε 10 αριθμούς θα έχουμε σίγουρα δύο τουλάχιστον αριθμούς με το ίδιο πρώτο ψηφίο. Εναλλακτικά, εφαρμόζοντας την αρχή του περιστερώνα, θα μπορούσαμε να σκεφτούμε ότι υπάρχουν 9 ομάδες διψήφιων αριθμών (περιστερώνες), που κάθε μια τους ξεκινάει με διαφορετικό πρώτο ψηφίο, οπότε αντιστοιχίζοντας 10 διαφορετικούς αριθμούς (περιστέρια), αναγκαστικά τουλάχιστον δύο από αυτούς θα ανήκουν στην ίδια ομάδα.

3. Μια πρώτη προσέγγιση θα ήταν να σκεφτούμε ότι στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, χρησιμοποιούνται συνολικά 10 διαφορετικά ψηφία (0,1,...,9), οπότε με τη λογική της χειρότερης περίπτωσης, αν «μοιράσουμε» τα 10 αυτά ψηφία σε διψήφιους αριθμούς, μπορούμε να κατασκευάσουμε 5 διψήφιους οι οποίοι χρησιμοποιούν διαφορετικά ψηφία μεταξύ τους. Για παράδειγμα θα μπορούσαμε να μοιράσουμε τα 10 ψηφία σε πέντε διψήφιους αριθμούς, ως εξής:
$$50, 69, 17, 28, 43$$
Προφανώς, προσθέτοντας ένα έκτο διψήφιο αριθμό στην παραπάνω συλλογή, αναγκαστικά θα χρησιμοποιούσαμε ψηφία που έχουν ήδη εμφανιστεί στους προηγούμενους πέντε. Άρα, μια πιθανή απάντηση στο ερώτημα φαίνεται να είναι ότι πρέπει να επιλεγούν έξι τουλάχιστον αριθμοί. Όμως η παραπάνω κατανομή ψηφίων δεν είναι η χειρότερη δυνατή, καθώς στο αρχικό μας σκεπτικό δεν λάβαμε υπόψη την περίπτωση να χρησιμοποιηθεί το ίδιο ψηφίο δύο φορές κατά το σχηματισμό ενός διψήφιου αριθμού. Εύκολα, μπορεί να διαπιστωθεί ότι αν επιλέξουμε τους 9 αριθμούς
$$11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99$$
αυτοί χρησιμοποιούν διαφορετικά ψηφία. Επιλέγοντας ένα δέκατο αριθμό είναι σίγουρο, ότι ανάμεσα σε αυτούς θα υπάρχουν τουλάχιστον δύο που χρησιμοποιούν κάποιο κοινό ψηφίο. Άρα, το ζητούμενο ελάχιστο πλήθος διψήφιων αριθμών είναι 10.

□

2 Διμελείς Σχέσεις – Συναρτήσεις

2.1 Διμελείς Σχέσεις

Έστω δύο σύνολα A, B και το καρτεσιανό τους γινόμενο:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Ορισμός 2.1. Οποιοδήποτε υποσύνολο του καρτεσιανού $A \times B$ ονομάζεται **διμελής σχέση** από το A στο B, *δηλαδή*

$$\Sigma \subseteq A \times B$$

Συχνά, για να δείξουμε ότι δύο στοιχεία $a \in A$, $b \in B$ σχετίζονται μέσω της Σ, αντί του $(a, b) \in \Sigma$ γράφουμε $a\Sigma b$. Αν τα σύνολα A, B ταυτίζονται, τότε η Σ ονομάζεται σχέση επί του συνόλου A.

Ένας πολύ συνηθισμένος και βολικός τρόπος απεικόνισης μιας διμελούς σχέσης Σ, όταν αυτή ορίζεται σε ένα πεπερασμένο σύνολο A είναι μέσω του γραφήματος της. Τα στοιχεία του συνόλου, συμβολίζονται με κορυφές ή κόμβους (δηλαδή σημεία στο επίπεδο) και για να απεικονιστεί η συσχέτιση δύο στοιχείων a, b μέσω της Σ, χρησιμοποιούμε ένα βέλος από το a προς το b. Επίσης, βολικός τρόπος απεικόνισης μιας διμελούς σχέσης είναι μέσω ενός πίνακα διασταύρωσης, όπως στα παραδείγματα που ακολουθούν

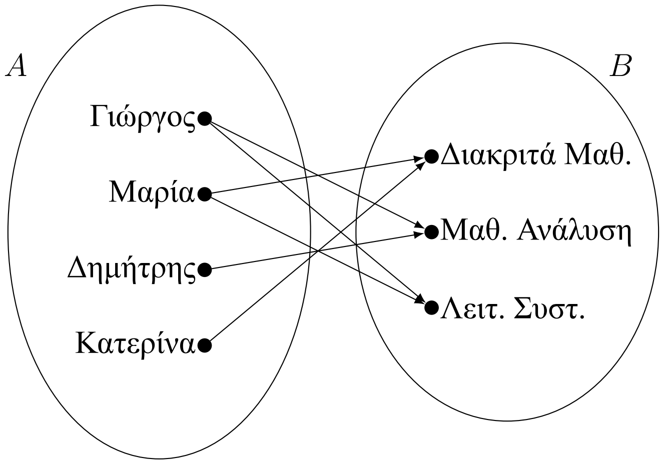
Παράδειγμα 2.2. Έστω το σύνολο φοιτητών $A = \{\text{Γιώργος}, \text{Μαρία}, \text{Δημήτρης}, \text{Κατερίνα}\}$ του τμήματος πληροφορικής και το σύνολο των μαθημάτων $B = \{$Διακριτά Μαθηματικά, Μαθηματική Ανάλυση, Λειτουργικα Συστήματα$\}$. Ορίζουμε τη διμελή σχέση Σ από το A στο B, όπου το $a\Sigma b$ εκφράζει το γεγονός ότι «ο\η a παρακολουθεί το μάθημα b». Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η σχέση αποτελείται από τα παρακάτω ζεύγη:

$$\begin{aligned}\Sigma = \{&(\text{Γιώργος}, \text{Μαθηματική Ανάλυση}), (\text{Γιώργος}, \text{Λειτουργικα Συστήματα}),\\ &(\text{Μαρία}, \text{Διακριτά Μαθηματικά}), (\text{Μαρία}, \text{Λειτουργικα Συστήματα}),\\ &(\text{Δημήτρης}, \text{Μαθηματική Ανάλυση}), (\text{Κατερίνα}, \text{Διακριτά Μαθηματικά})\}\end{aligned}$$

Η σχέση Σ μπορεί να απεικονιστεί με τη βοήθεια του πίνακα

	Διακριτά Μαθηματικά	Μαθηματική Ανάλυση	Λειτουργικά Συστήματα
Γιώργος		✓	✓
Μαρία	✓		✓
Δημήτρης		✓	
Κατερίνα	✓		

ή εναλλακτικά μέσω του γραφήματος της



□

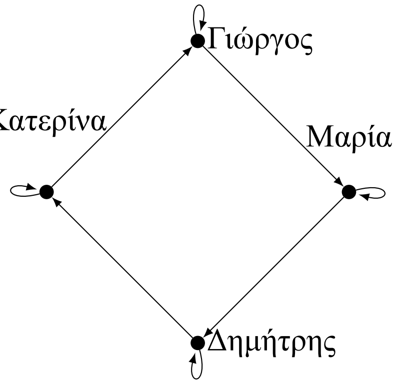
Παράδειγμα 2.3. Έστω το σύνολο φοιτητών $A = \{\text{Γιώργος}, \text{Μαρία}, \text{Δημήτρης}, \text{Κατερίνα}\}$, επί του οποίου ορίζουμε τη σχέση Σ, όπου το $a\Sigma b$ εκφράζει το γεγονός ότι «ο a γνωρίζει τον b». Έστω ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση η διμελής σχέση περιέχει τα ζεύγη:

$$\Sigma = \{(\text{Γιώργος}, \text{Γιώργος}), (\text{Μαρία}, \text{Μαρία}), (\text{Δημήτρης}, \text{Δημήτρης}), (\text{Κατερίνα}, \text{Κατερίνα}), \\ (\text{Γιώργος}, \text{Μαρία}), (\text{Μαρία}, \text{Δημήτρης}), (\text{Δημήτρης}, \text{Κατερίνα}), (\text{Κατερίνα}, \text{Γιώργος})\}$$

η οποία μπορεί να απεικονιστεί είτε μέσω του πίνακα

	Γιώργος	Μαρία	Δημήτρης	Κατερίνα
Γιώργος	✓	✓		
Μαρία		✓	✓	
Δημήτρης			✓	✓
Κατερίνα	✓			✓

είτε μέσω του παρακάτω γραφήματος:



Παρατηρείστε ότι επειδή η σχέση ορίζεται επί ενός μόνο συνόλου, δεν χρειάζεται να απεικονίσουμε δύο αντίγραφα του A χωριστά, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. □

Σε κάποιες άλλες περιπτώσεις και ειδικά όταν μια διμελής σχέση ορίζεται επί ενός μη πεπερασμένου συνόλου, η σχέση περιγράφεται μέσω μιας χαρακτηριστικής ιδιότητας η οποία μας επιτρέπει να αποφανθούμε κατά πόσο ένα συγκεκριμένο ζεύγος ανήκει ή δεν ανήκει στη σχέση.

Παράδειγμα 2.4. Αν $A = B = \mathbb{Z}$ μπορούμε να ορίσουμε τη σχέση Σ, «μικρότερο ή ίσο». Δηλαδή

$$\Sigma = \{(a, b) \mid a \leq b, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$$

Αντί να γράφουμε $(a, b) \in \Sigma$, γράφουμε $a\Sigma b$ ή πιο απλά $a \leq b$. □

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι παρακάτω ορισμοί που αφορούν τις διμελείς σχέσεις:

- Αν $\Sigma \subseteq A \times B$, τότε ονομάζουμε **αντίστροφη** της Σ, τη σχέση

$$\Sigma^{-1} = \{(b, a) \mid a\Sigma b\}$$

- Αν $\Sigma_1 \subseteq A \times B$ και $\Sigma_2 \subseteq B \times C$, τότε ονομάζουμε **σύνθεση** των Σ_1, Σ_2, τη σχέση

$$\Sigma_1 \circ \Sigma_2 = \{(a, c) \mid \exists b \in B \text{έτσι ώστε } a\Sigma_1 b \text{και } b\Sigma_2 c\}$$

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι η έννοια της διμελούς σχέσης μπορεί γενικευθεί:

Ορισμός 2.5. Ονομάζουμε **n-μελή σχέση** Σ μεταξύ των συνόλων $A_1, A_2, \ldots, A_n$ οποιοδήποτε υποσύνολο του καρτεσιανού τους γινομένου. Δηλαδή

$$\Sigma \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

Η έννοια της $n-$μελούς σχέσης βρίσκει εφαρμογή στις σχεσιακές βάσεις δεδομένων.

Ιδιότητες διμελών σχέσεων επί ενός συνόλου A

Εξετάζουμε τώρα μια σειρά από ιδιότητες που μπορεί να έχει μια διμελής σχέση επί ενός συνόλου και παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Μια σχέση $\Sigma \subseteq A \times A$ χαρακτηρίζεται

1. **Ανακλαστική:** Αν για κάθε $a \in A$ ισχύει $a\Sigma a$
2. **Συμμετρική:** Αν για κάθε $a, b \in A$ ισχύει $a\Sigma b \Rightarrow b\Sigma a$
3. **Αντισυμμετρική:** Αν για κάθε $\forall a, b \in A$ ισχύει $a\Sigma b$ και $b\Sigma a \Rightarrow a = b$
4. **Μεταβατική:** Αν για κάθε $a, b, c \in A$, $a\Sigma b$ και $b\Sigma c \Rightarrow a\Sigma c$
5. **Καθολική:** Αν για κάθε $a, b \in A$ ισχύει $a\Sigma b$ ή $b\Sigma a$

Σημειώστε ότι αν μια σχέση Σ είναι καθολική, τότε είναι σίγουρα και ανακλαστική, αφού λόγω της καθολικότητας, ανάμεσα σε δύο οποιαδήποτε στοιχεία του A, ακόμη και όταν αυτά ταυτίζονται μεταξύ τους πρέπει να υπάρχει συσχέτιση μέσω της Σ.

Παράδειγμα 2.6. Η σχέση Σ του παραδείγματος 2.3 μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι είναι ανακλαστική, αφού κάθε φοιτητής γνωρίζει τον εαυτό του. Επιπλέον, εφόσον δεν υπάρχουν αμφίδρομες γνωριμίες μεταξύ δύο οποιονδήποτε δύο διαφορετικών ατόμων, η σχέση είναι αντισυμμετρική. Καμιά από τις υπόλοιπες ιδιότητες δεν ισχύει. □

2.2 Σχέσεις Μερικής και Ολικής διάταξης

Αν $\Sigma \subseteq A \times A$ τότε:

- Η Σ ονομάζεται σχέση **μερική διάταξης** αν είναι $\left\{\begin{array}{c}\text{Ανακλαστική}\\ \text{Αντισυμμετρική}\\ \text{Μεταβατική}\end{array}\right.$

- Η Σ ονομάζεται σχέση **ολικής διάταξης** αν είναι $\left\{\begin{array}{c}\text{Αντισυμμετρική}\\ \text{Μεταβατική}\\ \text{Καθολική}\end{array}\right.$

Η καθολικότητα της ολικής διάταξης εξασφαλίζει ότι για κάθε $a \in A$ ισχύει $a\Sigma a$, άρα οποιαδήποτε σχέση ολικής διάταξης, είναι ανακλαστική και συνεπώς σχέση μερικής διάταξης.

Όταν σε ένα σύνολο ορίζουμε μια σχέση μερικής διάταξης, τότε το σύνολο αυτό λέγεται **μερικά διατεταγμένο** (partially ordered set ή POSET). Αντίστοιχα, ένα σύνολο στο οποίο ορίζουμε μια ολική διάταξη λέγεται **ολικά διατεταγμένο**, **γραμμικά διατεταγμένο** ή **αλυσίδα**.

Παράδειγμα 2.7. Η σχέση Σ, «ο a διαιρεί τον b» (συνήθως γράφουμε $a \mid b$) επί του συνόλου των θετικών ακεραίων $\mathbb{Z}^+$, ορίζεται ως εξής:

$$\Sigma = \{(a, b) \mid \text{υπάρχει } q \in \mathbb{Z}^+ \text{έτσι ώστε } b = qa\}$$

Η σχέση Σ είναι

- **Ανακλαστική**, αφού για κάθε $a \in \mathbb{Z}^+$ ισχύει $a = 1 \cdot a$, άρα $a \mid a$.
- **Αντισυμμετρική**, αφού για κάθε $\forall a, b \in \mathbb{Z}^+$, αν $a \mid b$ και $b \mid a$ υπάρχουν $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}^+$, έτσι ώστε $b = q_1 a$ και $a = q_2 b$. Αντικαθιστώντας το b από την πρώτη ισότητα στη δεύτερη, παίρνουμε
$$a = q_2 q_1 a \tag{2.1}$$
από όπου προκύπτει ότι $q_1 = q_2 = 1$. Άρα, $a = b$.
- **Μεταβατική**, αφού για κάθε $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ αν $a \mid b$ και $b \mid c$ υπάρχουν $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}^+$, έτσι ώστε $b = q_1 a$ και $c = q_2 b$. Αντικαθιστώντας το b από την πρώτη ισότητα στη δεύτερη, παίρνουμε $c = q_2 q_1 a$. Άρα, $a \mid c$.

Επομένως, η Σ είναι σχέση μερικής διάταξης. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η Σ δεν είναι σχέση ολικής διάταξης, αφού δεν ικανοποιείται η καθολική ιδιότητα. Πράγματι, υπάρχουν ζεύγη θετικών ακεραίων αριθμών που δεν σχετίζονται μέσω της σχέσης «διαιρεί» σε καμία από τις δύο πιθανές κατευθύνσεις. Για παράδειγμα για το ζεύγος $(2, 3)$ δεν ισχύει ούτε $2 \mid 3$, ούτε $3 \mid 2$. Σημειώστε επίσης, ότι η σχέση Σ δεν είναι σχέση μερικής διάταξης αν ο ορισμός της επεκταθεί στο σύνολο των ακεραίων. Σε αυτή την περίπτωση η σχέση (2.1) δίνει $q_1 = q_2 = \pm 1$, οπότε $a = \pm b$. Άρα, η σχέση Σ δεν είναι αντισυμμετρική επί του συνόλου των ακεραίων. □

Παράδειγμα 2.8. Η σχέση «μικρότερο ή ίσο» επί του συνόλου των ακεραίων.

$$\Sigma = \{(a, b) \mid a \leq b, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$$

Η σχέση Σ είναι:

- **Αντισυμμετρική**, αφού για κάθε $a, b \in \mathbb{Z}$, αν $a \leq b$ και $b \leq a$, τότε $a = b$.
- **Μεταβατική**, αφού για κάθε $a, b, c \in \mathbb{Z}$ αν $a \leq b$ και $b \leq c$, τότε $a \leq c$.
- **Καθολική**, αφού για κάθε $a, b \in \mathbb{Z}$ ισχύει $a \leq b$ ή $b \leq a$.

Επομένως η Σ είναι σχέση ολικής διάταξης (άρα και μερικής διάταξης). □

Όταν θέλουμε να απεικονίσουμε μια μερική διάταξη σε ένα πεπερασμένο σύνολο, είναι προτιμότερο αντί του γραφήματος της σχέσης να κατασκευάσουμε το **διάγραμμα Hasse** της σχέσης. Το διάγραμμα Hasse είναι ουσιαστικά μια περιορισμένη μορφή του γραφήματος, στην οποία έχουν αφαιρεθεί όλα τα στοιχεία που υπονοούνται από τις ιδιότητες της μερικής διάταξης. Συγκεκριμένα για να κατασκευάσουμε το διάγραμμα Hasse, κατασκευάζουμε το γράφημα τις σχέσης εφαρμόζοντας τους παρακάτω κανόνες:

- Σχεδιάζουμε τα στοιχεία κατά τέτοιο τρόπο ώστε όλα τα βέλη που συνδέουν διαφορετικά στοιχεία, να έχουν κατεύθυνση από κάτω προς τα πάνω.
- Αφαιρούμε όλες τις κατευθύνσεις από τα βέλη.
- Διαγράφουμε όλα τα βέλη που ξεκινούν και καταλήγουν στο ίδιο στοιχείο.
- Διαγράφουμε τα βέλη των οποίων η παρουσία επιβάλλεται από τη μεταβατική ιδιότητα.

Παρακολουθείστε τα παρακάτω παραδείγματα:

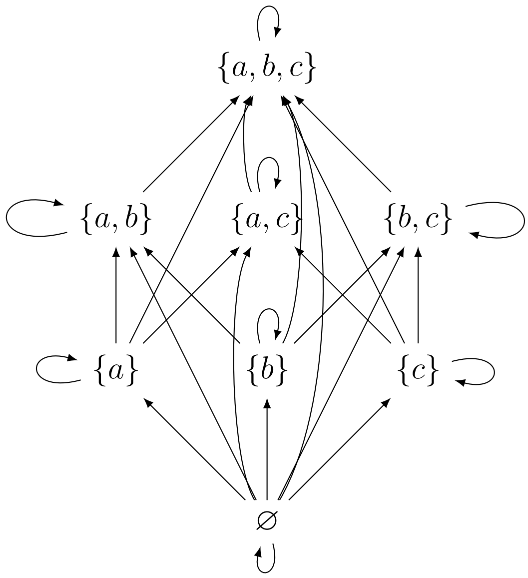
Παράδειγμα 2.9. Έστω $A = \{a, b, c\}$ και το δυναμοσύνολο του

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\},$$

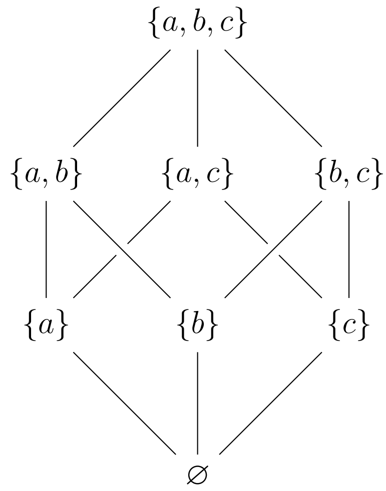
στο οποίο ορίζουμε τη σχέση «υποσύνολο ($\subseteq$)». Θα δείξουμε ότι η σχέση $\subseteq$ επί του $\mathcal{P}(A)$ είναι σχέση μερικής διάταξης. Πράγματι η σχέση $\subseteq$ είναι:

- **Ανακλαστική**, αφού για κάθε $a \in \mathcal{P}(A)$ ισχύει $a \subseteq a$.
- **Αντισυμμετρική**, αφού για κάθε $\forall a, b \in \mathcal{P}(A)$, αν $a \subseteq b$ και $b \subseteq a$, θα ισχύει $a = b$.
- **Μεταβατική**, αφού για κάθε $a, b, c \in \mathcal{P}(A)$ αν $a \subseteq b$ και $b \subseteq c$, τότε $a \subseteq c$.

Το γράφημα της σχέσης είναι:

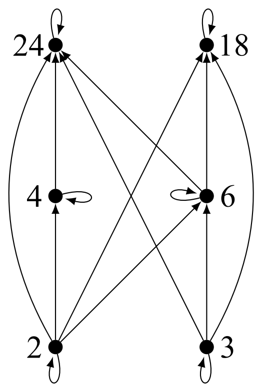


Το διάγραμμα Hasse της σχέσης $\subseteq$ επί του $\mathcal{P}(A)$ είναι:

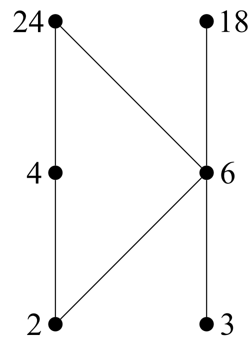


Είναι προφανές ότι το διάγραμμα Hasse απεικονίζει με πολύ πιο απλό τρόπο τη δομή της μερικής διάταξης. □

Παράδειγμα 2.10. Δίνεται το σύνολο $A = \{2, 3, 4, 6, 18, 24\}$ στο οποίο ορίζουμε τη σχέση «διαιρεί» όπως αυτή ορίστηκε στο παράδειγμα 2.7. Η σχέση αυτή είναι προφανώς μερική διάταξη και όταν ορίζεται στο σύνολο A που δίνεται. Το γράφημα της σχέσης είναι



ενώ το διάγραμμα Hasse της μερικής διάταξης είναι απλά:



$\square$

Σε ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο A, όπου για ευκολία συμβολισμού θεωρούμε ότι η μερική διάταξη είναι η «$\leq$», έχει ενδιαφέρον να ορίσουμε τα παρακάτω είδη «ακραίων» στοιχείων:

- **Μείζον στοιχείο** (maximal element): είναι ένα στοιχείο $a \in A$, τέτοιο ώστε να μην υπάρχει στοιχείο $b \in A$ τέτοιο ώστε $a \neq b$ και $a \leq b$ (πιο απλά θα μπορούσαμε να γράψουμε $a < b$).

- **Έλασσον στοιχείο** (minimal element): είναι ένα στοιχείο $a \in A$, τέτοιο ώστε να μην υπάρχει στοιχείο $b \in A$ τέτοιο ώστε $a \neq b$ και $b \leq a$ (πιο απλά θα μπορούσαμε να γράψουμε $b < a$).

- **Μέγιστο στοιχείο** (greatest element): είναι ένα στοιχείο $a \in A$, τέτοιο ώστε για κάθε $b \in A$ να ισχύει $b \leq a$.

- **Ελάχιστο στοιχείο** (least element): είναι ένα στοιχείο $a \in A$, τέτοιο ώστε για κάθε $b \in A$ να ισχύει $a \leq b$.

Αξίζει να παρατηρήσουμε τα παρακάτω:

- Ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο μπορεί να έχει κανένα, ένα ή περισσότερα του ενός μείζονα ή ελάσσονα στοιχεία.

- Αν ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο έχει μέγιστο ή ελάχιστο στοιχείο, τότε αυτά είναι αντίστοιχα τα μοναδικά μείζονα και ελάσσονα στοιχεία του.

Παράδειγμα 2.11. Στο διατεταγμένο σύνολο $\mathcal{P}(A)$ του παραδείγματος 2.9 υπάρχει τόσο ελάχιστο όσο και μέγιστο στοιχείο. Το μέγιστο στοιχείο που είναι ταυτόχρονα και το μοναδικό μείζον στοιχείο του, είναι το $\{a, b, c\}$, ενώ το ελάχιστο στοιχείο του, που είναι ταυτόχρονα και το μοναδικό έλασσον στοιχείο του είναι το $\varnothing$. $\square$

Παράδειγμα 2.12. Στο διατεταγμένο σύνολο του παραδείγματος 2.10, υπάρχουν δύο μείζονα και δύο ελάσσονα στοιχεία. Συγκεκριμένα τα 18 και 24 είναι μείζονα στοιχεία του συνόλου, ενώ αντίστοιχα τα 2 και 3 είναι ελάσσονα στοιχεία. Παρατηρείστε ότι το σύνολο δεν έχει μέγιστα, ούτε ελάχιστα στοιχεία στη θεωρούμενη μερική διάταξη. $\square$

Παράδειγμα 2.13. Στο παράδειγμα 2.7 η μερική διάταξη «διαιρεί» επί του συνόλου των θετικών ακεραίων $\mathbb{Z}^+$, υπάρχει ελάχιστο στοιχείο, που είναι ο αριθμός 1, αλλά δεν υπάρχει ούτε μέγιστο, ούτε μείζονα στοιχεία. $\square$

Παράδειγμα 2.14. Τέλος, στο παράδειγμα 2.7 η μερική διάταξη «$\leq$» ορισμένη στο $\mathbb{Z}$, δεν έχει κανένα από τα παραπάνω «ακραία» στοιχεία. $\square$

Επειδή σε αρκετές εφαρμογές το ζητούμενο είναι να ταξινομήσουμε τα στοιχεία ενός μερικά διατεταγμένου συνόλου, κατά τρόπο που να μην παραβιάζεται η δεδομένη μερική διάταξη ορίζουμε τα εξής:

Ορισμός 2.15. Έστω δύο μερικές διατάξεις R, R' επί ενός συνόλου A. Η R' λέγεται **συμβατή** με την R, αν για κάθε $a, b \in A$ ισχύει ότι $aRb \Rightarrow aR'b$. Επιπλέον, αν η R' είναι ολική διάταξη στο A, τότε η R' λέγεται **τοπολογική διάταξη** για την R στο A.

Δεδομένης μιας μερικής διάταξης R επί ενός μη κενού πεπερασμένου συνόλου A, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια τοπολογική διάταξη R', χρησιμοποιώντας τον παρακάτω αλγόριθμο:

```
// Είσοδος: Σύνολο A και η μερική διάταξη R
// Έξοδος: Τοπολογική διάταξη R'

k=1;
while (A ≠ ∅)
    a_k = minimal(A); //Επέλεξε ένα έλασσον στοιχείο του A
    A = A − a_k;
    k++;

return (a_1, a_2, ..., a_n); //Τοπολογική διάταξη R'
```

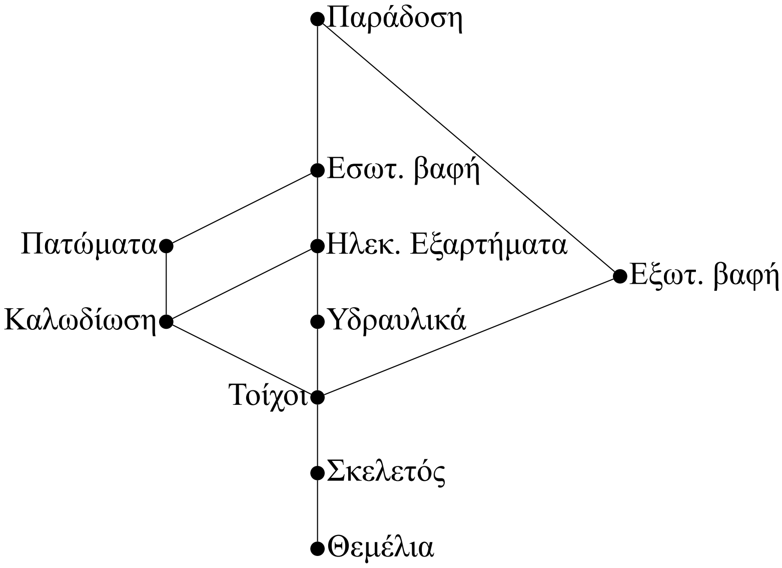
Σημειώστε ότι ο παραπάνω αλγόριθμος δεν επιστρέφει μοναδική τοπολογική διάταξη, αφού η επιλογή του ελάσσονος στοιχείου γίνεται αυθαίρετα όταν υπάρχουν περισσότερα του ενός από τα τελευταία. Η εφαρμογή του αλγορίθμου παρουσιάζεται στο παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα 2.16. Στο μερικά διατεταγμένο σύνολο του παραδείγματος 2.9, μπορούμε χρησιμοποιώντας τον παραπάνω αλγόριθμο να κατασκευάσουμε την παρακάτω τοπολογική διάταξη των στοιχείων του $\mathcal{P}(A)$

$$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}$$

Η διάταξη αυτή είναι μια από τις πιθανές που μπορεί να προκύψουν. Η ιδέα είναι ότι ακολουθώντας τη σειρά με την οποία εμφανίζονται τα στοιχεία στην τοπολογική διάταξη που κατασκευάστηκε, μπορούμε να «επισκεφτούμε» όλα τα στοιχεία του $\mathcal{P}(A)$, χωρίς να συναντήσουμε νωρίτερα στη σειρά αυτή, σύνολο που να είναι υπερσύνολο κάποιου συνόλου που θα συναντήσουμε παρακάτω. □

Παράδειγμα 2.17. Για την κατασκευή ενός σπιτιού πρέπει να εκτελεστούν μια σειρά από εργασίες, εκ των οποίων κάποιες, πρέπει να προηγηθούν κάποιων άλλων. Αντίστοιχα, υπάρχουν κάποιες ομάδες εργασιών που θα μπορούσαν να εκτελεστούν παράλληλα. Η όλη ροή των κατασκευών μπορεί να μοντελοποιηθεί μέσω μιας σχέσης μερικής διάταξης, η οποία απεικονίζεται στο παρακάτω διάγραμμα Hasse:



Εφαρμόζοντας τον παραπάνω αλγόριθμο μπορούμε να βρούμε μια τοπολογική διάταξη, δηλαδή μια σειρά εκτέλεσης των εργασιών με τρόπο που δεν παραβιάζει την προτεραιότητα εκτέλεσης των εργασιών. Μια τέτοια διάταξη είναι:

> Θεμέλια, Σκελετός, Τοίχοι, Καλωδίωση, Υδραυλικά, Εξωτερική Βαφή, Πατώματα, Ηλεκτρικά Εξαρτήματα, Εσωτερική Βαφή, Παράδοση.

□

2.3 Σχέσεις Ισοδυναμίας

- Αν $\Sigma \subseteq A \times A$ τότε, η Σ ονομάζεται σχέση **ισοδυναμίας** αν είναι $\begin{cases} \text{Ανακλαστική} \\ \text{Συμμετρική} \\ \text{Μεταβατική} \end{cases}$
- Μια οικογένεια μη κενών υποσυνόλωνA_i του A, ονομάζεται **διαμέριση** του A, αν
  - $A_i \cap A_j = \emptyset,$ για $i \neq j$
  - $\bigcup\limits_i A_i = A$

Ένα ενδιαφέρον συμπέρασμα είναι το παρακάτω

***Θεώρημα* 2.18.** *Κάθε σχέση ισοδυναμίας $\Sigma \subseteq A \times A$ ορίζει μια διαμέριση επί του συνόλου A και αντίστροφα, κάθε διαμέριση του συνόλου A ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας $\Sigma \subseteq A \times A$.*

Αν $a \in A$, τότε το σύνολο $[a] = \{b \mid b\Sigma a\}$, ονομάζεται **κλάση ισοδυναμίας** του a. Το στοιχείο a ονομάζεται **αντιπρόσωπος** της κλάσης $[a]$.

Παράδειγμα 2.19. Στο σύνολο των κατοίκων της Ελλάδας ορίζουμε τη σχέση

$$\Sigma = \{(a, b) \mid \text{Ο } a \text{ έχει τον ίδιο μήνα γενέθλια με τον } b\}$$

Η παραπάνω σχέση είναι:

- **Ανακλαστική**, αφού κάθε άτομο έχει ίδιο μήνα γενέθλια με τον εαυτό του.
- **Συμμετρική**, αφού αν ο a έχει ίδιο μήνα γενέθλια με τον b, τότε και ο b έχει ίδιο μήνα γενέθλια με τον a.
- **Μεταβατική**, αφού αν ο a έχει ίδιο μήνα γενέθλια με τον b και ο b έχει ίδιο μήνα γενέθλια με τον c, τότε και ο a έχει ίδιο μήνα γενέθλια με τον c.

Άρα, η σχέση Σ είναι σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου των κατοίκων της Ελλάδας. Η σχέση Σ διαμερίζει το σύνολο των κατοίκων σε 12 κλάσεις ισοδυναμίας, κάθε μια από τις οποίες περιέχει τους κατοίκους που γεννήθηκαν σε ένα από τους 12 ημερολογιακούς μήνες του έτους. □

Παράδειγμα 2.20. Έστω $m \in \mathbb{N}$. Επί του συνόλου των ακεραίων ορίζουμε τη σχέση

$$\Sigma_m = \{(a, b) \mid \text{υπάρχει } q \in \mathbb{Z} \text{ έτσι ώστε } a - b = qm\}$$

Συνήθως αντί του $a\Sigma_m b$, γράφουμε $a \equiv b \mod m$ (διαβάζεται a ισοδύναμο του b modulo m). Η σχέση αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας. Πράγματι

- Για κάθε $a \in \mathbb{Z}$, ισχύει $a - a = 0 \cdot m$, άρα $a \equiv a \mod m$ (**ανακλαστική**)
- Για κάθε $a, b \in \mathbb{Z}$, αν ισχύει $a \equiv b \mod m$, τότε υπάρχει $q \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $a - b = qm$. Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε $b - a = -qm$, οπότε $b \equiv a \mod m$ (**συμμετρική**)
- Για κάθε $a, b, c \in \mathbb{Z}$, αν ισχύει $a \equiv b \mod m$ και $b \equiv c \mod m$, τότε υπάρχουν $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $a - b = q_1 m$ και $b - c = q_2 m$. Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες ισότητες παίρνουμε $a - c = (q_1 + q_2)m$, άρα $a \equiv c \mod m$ (**μεταβατική**)

Εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι η κλάση ισοδυναμίας ενός τυχόντος στοιχείου a είναι

$$[a] = \{a \mid b = km + a, k \in \mathbb{Z}\}$$

□

2.4 Συναρτήσεις

Μια ειδική μορφή σχέσης που παρουσιάζει τεράστιο ενδιαφέρον είναι η συνάρτηση. Παρακάτω, υπενθυμίζουμε συνοπτικά μερικές βασικές έννοιες γύρω από τις συναρτήσεις.

Ορισμός 2.21. Μια σχέση $f \subseteq A \times B$ ονομάζεται **συνάρτηση** ή **απεικόνιση** από το σύνολο A στο σύνολο B, με **πεδίο ορισμού** το σύνολο A και **πεδίο τιμών** το σύνολο B, αν

$$(x, y_1) \in f \text{και } (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$$

Δηλαδή, συνάρτηση είναι μια σχέση από το A στο B, η οποία αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο $x \in A$ σε ένα μοναδικό στοιχείο $y \in B$. Αντί του συμβολισμού $f \subseteq A \times B$, στις συναρτήσεις χρησιμοποιούμε τον $f : A \to B$ και αντίστοιχα αντί του $(x, y) \in f$ γράφουμε $f(x) = y$. Το στοιχείο $f(x) \in B$ ονομάζεται **εικόνα του προτύπου** $x \in A$ μέσω της f.

- Μια συνάρτηση $f : A \to B$ ονομάζεται **«ένα προς ένα»**, αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$, ισχύει $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

- Μια συνάρτηση $f : A \to B$ ονομάζεται **«επί του** B**»**, αν για κάθε $y \in B$, υπάρχει $x \in A$, έτσι ώστε $y = f(x)$.

- Για μια συνάρτηση $f : A \to B$ που είναι «ένα προς ένα» και «επί», η αντίστροφη σχέση της f ορίζει μια νέα συνάρτηση που ονομάζεται **αντίστροφη συνάρτηση** και συμβολίζεται με $f^{-1} : B \to A$.

- Αν $f : A \to B$ και $g : B \to C$ δύο συναρτήσεις, τότε η **σύνθεση** των σχέσεων g, f είναι επίσης συνάρτηση που συμβολίζεται με $g \circ f : A \to C$.

3 Προτασιακή Λογική

3.1 Η γλώσσα της Προτασιακής Λογικής

Η γλώσσα της **προτασιακής λογικής** (για συντομία ΠΛ) είναι μια τυπική γλώσσα, δηλαδή μια γλώσσα αυστηρά δομημένη ως προς τη σύνταξη και τη σημασιολογία της. Η γλώσσα της ΠΛ χρησιμοποιείται για την λογική ανάλυση σύνθετων προτάσεων, που λέγονται προτασιακοί τύποι, βάσει των τιμών αληθείας των απλούστερων επιμέρους προτάσεων που την αποτελούν. Οι απλούστερες αυτές προτάσεις συμβολίζονται συνήθως με τα γράμματα $p, q, r, ...$ και ονομάζονται **προτασιακές μεταβλητές** ή **άτομα**. Κάθε προτασιακή μεταβλητή αντιπροσωπεύει μια δήλωση της φυσικής γλώσσας η οποία μπορεί να χαρακτηριστεί **αληθής** ή **ψευδής**.

Εκτός των προτασιακών μεταβλητών, για τη σύνθεση ενός προτασιακού τύπου χρησιμοποιούνται οι σύνδεσμοι της ΠΛ, οποίοι είναι οι παρακάτω:

1. $\neg$ **Άρνηση** (όχι ...)
2. $\wedge$ **Σύζευξη** (... και ...)
3. $\vee$ **Διάζευξη** (... ή ...)
4. $\rightarrow$ **Συνεπαγωγή** (αν ... τότε ...)
5. $\leftrightarrow$ **Ισοδυναμία** (... αν και μόνο αν ...)

Τέλος, εκτός των παραπάνω δομικών συστατικών συχνά στη σύνταξη ενός τύπου χρησιμοποιούνται **αριστερές και δεξιές παρενθέσεις** (,).

Οποιαδήποτε πεπερασμένη ακολουθία από σύμβολα της ΠΛ ονομάζεται **έκφραση** της γλώσσας. Για παράδειγμα η ακολουθία συμβόλων

$$\wedge p \rightarrow (q \neg r) \vee \neg q$$

είναι μια έκφραση. Επειδή, οποιαδήποτε τυχαία έκφραση της γλώσσας της ΠΛ, δεν έχει απαραίτητα νόημα, χρειαζόμαστε ένα σαφή τρόπο σχηματισμού σύνθετων προτάσεων, οι οποίες είναι συντακτικά έγκυρες. Ο τρόπος αυτός περιγράφεται αναδρομικά στον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 3.1. Μια έκφραση α της ΠΛ η οποία είναι:

- προτασιακή μεταβλητή, ή
- της μορφής $(\neg\beta)$, $(\beta \wedge \gamma)$, $(\beta \vee \gamma)$, $(\beta \rightarrow \gamma)$, $(\beta \leftrightarrow \gamma)$, όπου β, γ είναι ήδη κατασκευασμένοι προτασιακοί τύποι.

ονομάζεται **προτασιακός τύπος**. Οι προτασιακοί τύποι συμβολίζονται με τα γράμματα ϕ, χ, $\psi, \ldots$.

Παράδειγμα 3.2. Οι παρακάτω εκφράσεις είναι προτασιακοί τύποι:

- p, επειδή είναι προτασιακή μεταβλητή
- $(\neg r)$, επειδή είναι της μορφής $(\neg \beta)$, όπου β είναι η προτασιακή μεταβλητή r.
- $(q \to p)$, επειδή είναι της μορφής $(\beta \to \gamma)$, όπου β, γ είναι αντίστοιχα οι μεταβλητές q, p.
- $((\neg r) \wedge (q \to p))$, επειδή είναι της μορφής $(\beta \wedge \gamma)$, όπου β, γ είναι αντίστοιχα οι ήδη κατασκευασμένοι τύποι $(\neg r)$ και $(q \to p)$.
- $((q \to p) \leftrightarrow ((\neg r) \wedge (q \to p)))$, επειδή είναι της μορφής $(\beta \leftrightarrow \gamma)$, όπου β, γ είναι αντίστοιχα οι ήδη κατασκευασμένοι τύποι $(q \to p)$ και $((\neg r) \wedge (q \to p))$.

$\square$

Για να αποφύγουμε τη χρήση πολλαπλών διαδοχικών παρενθέσεων, που καθιστούν τους τύπους δυσανάγνωστους, ορίζουμε κάποια προτεραιότητα στην ισχύ των συνδέσμων. Θεωρούμε ότι η ο σύνδεσμος $\neg$ έχει υψηλότερη προτεραιότητα από όλους τους άλλους, ακολουθούν οι $\wedge, \vee$ που θεωρούνται ισοδύναμοι μεταξύ τους και τελικά έπονται οι $\to, \leftrightarrow$ που επίσης θεωρούνται ισοδύναμοι μεταξύ τους. Λαμβάνοντας υπόψη την προτεραιότητα των συνδέσμων, μπορούμε να παραλείπουμε τις παρενθέσεις που δεν είναι απαραίτητες, με την έννοια ότι η απουσία τους δεν καθιστά την ανάγνωση του τύπου διφορούμενη. Επιπλέον, μπορούμε χωρίς πρόβλημα να παραλείπουμε τις εξωτερικές παρενθέσεις των τύπων.

Παράδειγμα 3.3. Οι προτασιακοί τύποι του παραδείγματος 3.2, μπορούν να γραφούν πιο απλά παραλείποντας κάποιες από τις παρενθέσεις τους, ως εξής:

- p
- $\neg r$
- $q \to p$
- $\neg r \wedge (q \to p)$
- $(q \to p) \leftrightarrow \neg r \wedge (q \to p)$

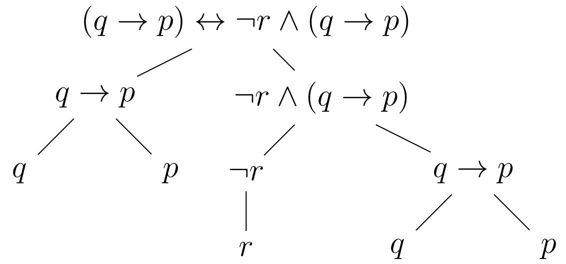
$\square$

Κάθε τύπος της ΠΛ μπορεί να παρασταθεί με ένα **δενδροδιάγραμμα**. Το δενδροδιάγραμμα είναι ένας σχηματικός τρόπος ανάλυσης ενός δοσμένου προτασιακού τύπου στα στοιχειώδη συστατικά που είναι οι προτασιακές του μεταβλητές.

Παράδειγμα 3.4. Το δενδροδιάγραμμα του προτασιακού τύπου

$$(q \to p) \leftrightarrow \neg r \land (q \to p)$$

δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



□

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, οι προτασιακοί τύποι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την λογική ανάλυση σύνθετων προτάσεων της φυσικής γλώσσας, χρησιμοποιώντας ως συστατικά τους προτασιακές μεταβλητές. Στα παραδείγματα που ακολουθούν δείχνουμε αυτή τη διαδικασία.

Παράδειγμα 3.5. Να κατασκευαστεί προτασιακός τύπος που θα εκφράζει τη δήλωση της φυσική γλώσσας: «*Αν κάποιος έχει πτυχίο πληροφορικής και δύο έτη προϋπηρεσίας ή μεταπτυχιακό δίπλωμα, τότε μπορεί να προσληφθεί ως προϊστάμενος μηχανογράφησης*».

Για να κατασκευάσουμε τον ζητούμενο τύπο, αρχικά ορίζουμε προτασιακές μεταβλητές που εκφράζουν τα επιμέρους συστατικά της δήλωσης. Δηλαδή, ορίζουμε τις παρακάτω προτασιακές μεταβλητές:

- p, η οποία εκφράζει το γεγονός ότι ο υποψήφιος έχει πτυχίο πληροφορικής
- q, η οποία εκφράζει το γεγονός ότι ο υποψήφιος έχει διετή προϋπηρεσία
- r, η οποία εκφράζει το γεγονός ότι ο υποψήφιος έχει μεταπτυχιακό δίπλωμα
- s, η οποία εκφράζει τη δυνατότητα πρόσληψης του υποψηφίου ως προϊσταμένου μηχανογράφησης

Με την παραπάνω κωδικοποίηση η δήλωση της φυσικής γλώσσας, εκφράζεται από τον προτασιακό τύπο:

$$p \land (q \lor r) \to s$$

□

Παράδειγμα 3.6. Τέσσερις φοιτητές Α,Β,Γ,Δ, καλούνται να συμμετέχουν σε μια εκδήλωση της σχολής τους. Να κωδικοποιηθεί με ένα προτασιακό τύπο κάθε μια από τις παρακάτω δηλώσεις της φυσικής γλώσσας:

1. Στην εκδήλωση θα συμμετέχει τουλάχιστον ένας, αλλά όχι και οι τέσσερις φοιτητές.
2. Στην εκδήλωση θα συμμετέχουν όλοι ή κανένας.
3. Αν συμμετέχει ο Α, τότε δεν θα συμμετέχει ο Δ, ενώ ο Β θα συμμετέχει αν και μόνο αν συμμετέχει ο Γ.
4. Στην εκδήλωση θα συμμετέχουν ακριβώς τρεις φοιτητές, εκ των οποίων ο ένας σίγουρα θα είναι ο Α.

Για να κατασκευάσουμε τους τέσσερις τύπους που αντιστοιχούν σε κάθε μια από τις παραπάνω δηλώσεις, εισάγουμε τις προτασιακές μεταβλητές $p_A, p_B, p_\Gamma, p_\Delta$που εκφράζουν το γεγονός ότι ο αντίστοιχος φοιτητής θα συμμετέχει στην εκδήλωση. Άρα, οι ζητούμενοι τύποι είναι:

1. $(p_A \lor p_B \lor p_\Gamma \lor p_\Delta) \land \neg(p_A \land p_B \land p_\Gamma \land p_\Delta)$
2. $(p_A \land p_B \land p_\Gamma \land p_\Delta) \lor (\neg p_A \land \neg p_B \land \neg p_\Gamma \land \neg p_\Delta)$
3. $(p_A \to \neg p_\Delta) \land (p_B \leftrightarrow p_\Gamma)$
4. $p_A \land ((p_B \land p_\Gamma \land \neg p_\Delta) \lor (p_B \land \neg p_\Gamma \land p_\Delta) \lor (\neg p_B \land p_\Gamma \land p_\Delta))$

□

3.2 Αποτιμήσεις

Για να μπορέσουμε να αποφανθούμε κατά πόσο ένας προτασιακός τύπος είναι έγκυρος ή όχι, πρέπει προηγουμένως να γνωρίζουμε τις τιμές αληθείας των δομικών συστατικών του, δηλαδή των μεταβλητών του. Μια **αποτίμηση** είναι μια αντιστοίχιση τιμών αληθείας στις προτασιακές μεταβλητές ενός τύπου. Οι τιμές αληθείας που μπορεί να δεχθεί μια προτασιακή μεταβλητή είναι δύο και αντιστοιχούν στις έννοιες «αληθής» και «ψευδής». Συνήθως χρησιμοποιούμε για συντομία τα Α,Ψ (αληθής ψευδής), τα αντίστοιχα λατινικά γράμματα T,F (true, false) ή τα ψηφία 1,0.

Ενώ αρχικά κάθε αποτίμηση αποδίδει τιμές αληθείας στις προτασιακές μεταβλητές ενός τύπου, μπορούμε τελικά να χαρακτηρίσουμε με μια τιμή αληθείας ολόκληρο τον τύπο, χρησιμοποιώντας την ανάλυση του τύπου σε δενδροδιάγραμμα σε συνδυασμό με τον πίνακα αληθείας των συνδέσμων που ακολουθεί:

ϕ	ψ	$\neg\phi$	$\phi \land \psi$	$\phi \lor \psi$	$\phi \to \psi$	$\phi \leftrightarrow \psi$
Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Α

Παράδειγμα 3.7. Να κατασκευαστεί ο πίνακας αληθείας του τύπου $(q \to p) \leftrightarrow \neg r \wedge (q \to p)$.

Για να βοηθηθούμε στον υπολογισμό του πίνακα αληθείας του τελικού τύπου, δημιουργούμε ενδιάμεσες στήλες στις οποίες υπολογίζουμε τις τιμές αληθείας των υποτύπων του:

p	q	r	$q \to p$	$\neg r$	$\neg r \wedge (q \to p)$	$(q \to p) \leftrightarrow \neg r \wedge (q \to p)$
Α	Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α

□

Παρατήρηση 3.8. Είναι εύκολο να επιβεβαιωθεί ότι αν ένας τύπος εμπλέκει n προτασιακές μεταβλητές, τότε ο πίνακας αληθείας του θα αποτελείται από 2^n γραμμές. Το γεγονός αυτό καθιστά αποτρεπτική τη χρήση του σε τύπους που περιέχουν σχετικά μεγάλο αριθμό μεταβλητών. Για παράδειγμα, ένας τύπος με 10 μόλις μεταβλητές, απαιτεί ένα πίνακα αληθείας με $2^{10} = 1024$ γραμμές.

Παράδειγμα 3.9. Σε ένα υποθετικό νησί κατοικούν δύο κατηγορίες ανθρώπων οι ευγενείς και οι απατεώνες. Οι ευγενείς χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι λένε πάντα αλήθεια, ενώ αντίθετα οι απατεώνες λένε πάντα ψέματα. Ένας επισκέπτης, συναντά δύο κατοίκους του νησιού τους Α, Β των οποίων την ιδιότητα δεν γνωρίζει. Ο Α δηλώνει: «*είμαστε και οι δύο απατεώνες*». Μπορεί ο επισκέπτης να συμπεράνει με ασφάλεια τις ιδιότητες των δύο κατοίκων;

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα πρέπει να κωδικοποιήσουμε τη δήλωση του Α σε προτασιακό τύπο. Έστω p, q δύο προτασιακές μεταβλητές που εκφράζουν το γεγονός ότι αντίστοιχα οι Α και Β είναι ευγενείς, οπότε η δήλωση του Α εκφράζεται από τον τύπο

$$\neg p \wedge \neg q$$

Ο πίνακας αληθείας του παραπάνω τύπου είναι

p	q	$\neg p \wedge \neg q$
Α	Α	Ψ
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α

Για να συμπεράνουμε τις ιδιότητες των δύο κατοίκων αρκεί να σκεφτούμε ότι αν Α είναι ευγενής, οπότε η μεταβλητή p είναι αληθής, θα έπρεπε η δήλωση του να είναι επίσης αληθής (άρα και ο τύπος $\neg p \wedge \neg q$). Δηλαδή, θα έπρεπε να αναζητήσουμε στον πίνακα αληθείας μια γραμμή όπου η τιμή αληθείας τόσο της p, όσο και του $\neg p \wedge \neg q$ είναι αληθείς. Όμως τέτοια γραμμή δεν υπάρχει. Άρα, σκεπτόμενοι αντίθετα, αν ο Α είναι απατεώνας θα πρέπει να λέει ψέματα, οπότε αναζητούμε μια γραμμή του πίνακα όπου η μεταβλητή p και ο τύπος $\neg p \wedge \neg q$ είναι ταυτόχρονα ψευδείς. Στον πίνακα μας υπάρχει ακριβώς μια τέτοια γραμμή (η τρίτη), από όπου συμπεραίνουμε ότι ο Α είναι απατεώνας, ενώ ο Β ευγενής. □

Παράδειγμα 3.10. Στο νησί των ευγενών και των απατεώνων του προηγούμενου παραδείγματος, ο επισκέπτης συναντάει και πάλι δυο κατοίκους Α, Β οι οποίοι δηλώνουν:

- Α: «*Είμαστε και οι δύο ίδιοι*»
- Β: «*Δεν είμαστε ίδιοι*»

Τι συμπέρασμα προκύπτει ως προς την ιδιότητα των Α, Β βάσει των δηλώσεων τους.

Σκεπτόμενοι όπως στο προηγούμενο παράδειγμα εισάγουμε τις προτασιακές μεταβλητές p, q που εκφράζουν κατά πόσο οι Α, Β είναι αντίστοιχα ευγενείς και κωδικοποιούμε τις δηλώσεις τους σε τύπους, οι οποίοι είναι:

$$\text{Δήλωση του Α: } p \leftrightarrow q$$
$$\text{Δήλωση του Β: } p \leftrightarrow \neg q$$

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τον πίνακα αληθείας

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \leftrightarrow \neg q$
Α	Α	Α	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ

Επεκτείνοντας το σκεπτικό του προηγούμενου παραδείγματος, αφού οι ευγενείς λένε πάντα αλήθεια και οι απατεώνες πάντα ψέματα, θα πρέπει να αναζητήσουμε μια γραμμή του πίνακα, όπου η τιμή αληθείας κάθε μιας από τις μεταβλητές p, q, είναι ίση με την τιμή αληθείας της αντίστοιχης δήλωσης των Α,Β. Τέτοια γραμμή είναι μόνο η τρίτη, οπότε ο Α είναι απατεώνας, ενώ ο Β ευγενής. □

Παράδειγμα 3.11. Τρεις ύποπτοι για ένα έγκλημα, ο Α, ο Β και ο Γ, δίνουν τις εξής καταθέσεις:

- Ο Α δηλώνει: «*ο Β είναι ένοχος και ο Γ είναι αθώος*».
- Ο Β δηλώνει: «*αν ο Α είναι ένοχος τότε και ο Γ είναι ένοχος*».

- Ο Γ δηλώνει: «*είμαι αθώος και τουλάχιστον ένας από τους υπόλοιπους είναι ένοχος*».

Με βάση τις παραπάνω καταθέσεις ζητείται να απαντηθούν τα παρακάτω ερωτήματα:

1. Μπορούν οι τρεις καταθέσεις να είναι ταυτόχρονα αληθείς ; Αν ναι, τότε ποιος είναι αθώος και ποιος είναι ένοχος ;

2. Αν υποθέσουμε ότι και οι τρεις ύποπτοι είναι αθώοι, ποιος έδωσε ψευδή κατάθεση και ποιος αληθή;

3. Αν υποθέσουμε ότι ο αθώος λέει την αλήθεια και ο ένοχος λέει ψέματα, τότε ποιος είναι αθώος και ποιος είναι ένοχος;

Για να απαντήσουμε στα παραπάνω ερωτήματα θέτουμε p, q, r τρεις προτασιακές μεταβλητές οι οποίες δηλώνουν αντίστοιχα «ο Α είναι αθώος», «ο Β είναι αθώος» και «ο Γ είναι αθώος». Κωδικοποιούμε τις τρεις καταθέσεις των υπόπτων σε προτασιακούς τύπους, που για συντομία θα συμβολίζουμε αντίστοιχα με ϕ, χ, ψ:

- Κατάθεση του Α: $\neg q \wedge r$

- Κατάθεση του Β: $\neg p \rightarrow \neg r$

- Κατάθεση του Γ: $r \wedge (\neg p \vee \neg q)$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα αληθείας των τριών τύπων:

α/α	p	q	r	ϕ	χ	ψ
1	Α	Α	Α	Ψ	Α	Ψ
2	Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ
3	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
4	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ
5	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α
6	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ
7	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α
8	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ

1. Για να διαπιστώσουμε αν είναι δυνατό να είναι και οι τρεις καταθέσεις αληθείς, αρκεί να αναζητήσουμε γραμμές στον πίνακα αληθείας όπου οι στήλες των τριών τύπων ϕ, χ, ψ έχουν ταυτόχρονα τιμή Α. Μοναδική τέτοια γραμμή στον παραπάνω πίνακα είναι προφανώς η τρίτη (κόκκινο χρώμα). Άρα οι τρεις καταθέσεις μπορούν να είναι ταυτόχρονα αληθείς. Για να συμπεράνουμε ποιοι είναι αθώοι και ποιοι ένοχοι σε αυτή την περίπτωση, αρκεί να ελέγξουμε τις τιμές αληθείας των τριών προτασιακών μεταβλητών p, q, r, στην αντίστοιχη γραμμή. Άρα, οι Α και Γ είναι αθώοι, ενώ ο Β ένοχος.

2. Αρκεί να ελέγξουμε την γραμμή (πρώτη – πράσινο χρώμα) όπου οι προτασιακές μεταβλητές p,q,r είναι αληθείς, οπότε οι αντίστοιχες τιμές αληθείας των ϕ, χ, ψ, δίνουν το ζητούμενο. Δηλαδή, οι Α και Γ ψεύδονται, ενώ ο Β λέει αλήθεια.

3. Αν ο Α είναι αθώος (p αληθής), λέει αλήθεια (ϕ αληθής), ενώ αν ο Α είναι ένοχος (p ψευδής) λέει ψέματα (ϕ ψευδής). Δηλαδή σε κάθε περίπτωση πρέπει η τιμή αλήθειας της p να είναι ίδια με την τιμή αληθείας του ϕ. Σκεπτόμενοι αντίστοιχα για τους Β και Γ, αναζητούμε μια αποτίμηση γραμμή του πίνακα αληθείας τέτοια ώστε η τιμή αληθείας των τριών πρώτων στηλών να συμπίπτει με την τιμή αληθείας των τριών τελευταίων. Αναζητώντας μια τέτοια γραμμή στον πίνακα αληθείας, παρατηρούμε ότι η μόνη γραμμή με αυτή την ιδιότητα είναι η έκτη (γαλάζιο χρώμα). Άρα οι Α και Γ είναι ένοχοι, ενώ ο Β είναι αθώος.

□

Ορισμός 3.12. Ένας προτασιακός τύπος λέγεται **ταυτολογία** αν είναι αληθής για κάθε πιθανή αποτίμηση των προτασιακών του μεταβλητών. Ένας τύπος λέγεται **αντίφαση** όταν είναι άρνηση μιας ταυτολογίας, δηλαδή είναι ψευδής για κάθε πιθανή αποτίμηση των μεταβλητών του.

Παράδειγμα 3.13. Χαρακτηριστικά παραδείγματα ταυτολογιών είναι οι τύποι

$$p \vee \neg p, p \rightarrow p, p \leftrightarrow p$$

ενώ αντίστοιχα παραδείγματα αντιφάσεων είναι

$$p \wedge \neg p, p \leftrightarrow \neg p$$

□

Παράδειγμα 3.14. Να δειχθεί ότι ο τύπος $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow p)$ είναι ταυτολογία.
Κατασκευάζουμε το πίνακα αληθείας του τύπου που δόθηκε:

p	q	$\neg p \rightarrow \neg q$	$\neg p \rightarrow q$	$(\neg p \rightarrow q) \rightarrow p$	$(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow p)$
Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Α

Παρατηρούμε ότι ο τύπος $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow p)$ είναι αληθής για κάθε αποτίμηση των μεταβλητών του, άρα είναι ταυτολογία. □

Παράδειγμα 3.15. Να δειχθεί ότι ο τύπος $(p \lor q) \land (\neg p \lor r) \to q \lor r$ είναι ταυτολογία.

Σε αυτό το παράδειγμα, επειδή ο τύπος που δόθηκε περιέχει 3 μεταβλητές, θα έπρεπε να κατασκευάσουμε ένα πίνακα αληθείας με 8 γραμμές. Μπορούμε, να αποφύγουμε την κατασκευή του πίνακα αληθείας, αν εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι μια συνεπαγωγή είναι ψευδής μόνο όταν η υπόθεση είναι αληθής και το συμπέρασμα ψευδές. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις η συνεπαγωγή αληθεύει.

Έστω ότι η υπόθεση της συνεπαγωγής που μας δόθηκε είναι αληθής, ενώ το συμπέρασμα της ψευδές. Δηλαδή,

- Έστω ότι $(p \lor q) \land (\neg p \lor r)$ είναι αληθής
- και $q \lor r$ είναι ψευδής

Για να είναι η διάζευξη $q \lor r$ ψευδής, θα πρέπει αναγκαστικά οι μεταβλητές q, r να είναι ψευδείς. Με δεδομένο αυτό για να είναι η υπόθεση $(p \lor q) \land (\neg p \lor r)$ αληθής, θα έπρεπε οι $p, \neg p$ να είναι ταυτόχρονα αληθής. Αυτό όμως είναι αδύνατο. Άρα, η υπόθεση μας είναι λανθασμένη και κατά συνέπεια η συνεπαγωγή είναι πάντα αληθής, δηλαδή ταυτολογία. □

Παράδειγμα 3.16. Να εξεταστεί κατά πόσο ο τύπος $p \to (q \to (r \to (s \to t)))$ είναι ταυτολογία.

Επειδή ο τύπος εμπλέκει πέντε μεταβλητές, ο πίνακας αληθείας του θα αποτελείται από 32 γραμμές, οπότε είναι σκόπιμο να αποφύγουμε την κατασκευή του. Για να εξετάσουμε κατά πόσο ο δεδομένος τύπος είναι ταυτολογία, θα διερευνήσουμε αν υπάρχουν τιμές των μεταβλητών που τον καθιστούν ψευδή.

- Για να είναι η συνεπαγωγή $p \to (q \to (r \to (s \to t)))$ ψευδής, θα πρέπει η υπόθεση p να είναι αληθής, ενώ το συμπέρασμα $q \to (r \to (s \to t))$ να είναι ψευδές.
- Αντίστοιχα, για να είναι η συνεπαγωγή $q \to (r \to (s \to t))$ ψευδής, θα πρέπει η υπόθεση q να είναι αληθής, ενώ το συμπέρασμα $r \to (s \to t)$ να είναι ψευδές.
- Ομοίως, για να είναι η συνεπαγωγή $r \to (s \to t)$ ψευδής, θα πρέπει η υπόθεση r να είναι αληθής, ενώ το συμπέρασμα $s \to t$ να είναι ψευδές.
- Τέλος, για να είναι η συνεπαγωγή $s \to t$ ψευδής, θα πρέπει η υπόθεση s να είναι αληθής, ενώ το συμπέρασμα t να είναι ψευδές.

Με βάση τα παραπάνω, θέτοντας τις μεταβλητές p, q, r, s αληθείς, ενώ τη μεταβλητή t ψευδή, ο τύπος $p \to (q \to (r \to (s \to t)))$ είναι ψευδής. Άρα, υπάρχει μια (μοναδική) αποτίμηση των μεταβλητών που τον καθιστά ψευδή. Συνεπώς, ο δεδομένος τύπος δεν είναι ταυτολογία. □

Ορισμός 3.17. Δύο προτασιακοί τύποι ϕ, ψ λέγονται **ταυτολογικά ισοδύναμοι** αν και μόνο αν ο τύπος $\phi \leftrightarrow \psi$ είναι ταυτολογία. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $\phi \equiv \psi$.

Πρακτικά, δύο τύποι ϕ, ψ είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι αν έχουν την ίδια τιμή αληθείας σε κάθε πιθανή αποτίμηση των μεταβλητών που εμπλέκουν, οπότε τελικά δίνουν τον ίδιο πίνακα αληθείας.

3.2.1 Ιδιότητες των συνδέσμων

Οι ιδιότητες των συνδέσμων που είναι γνωστοί και ως νόμοι της ΠΛ είναι μια σειρά από γνωστές ταυτολογίες, που χρησιμοποιούνται σε διάφορες περιπτώσεις. Οι πιο συχνά χρησιμοποιούμενες είναι οι παρακάτω:

1. Αντιμεταθετική:	$p \wedge q \equiv q \wedge p,$	$p \vee q \equiv q \vee p$
2. Προσεταιριστική:	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r),$	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
3. Επιμεριστική :	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r),$	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
4. Ταυτοδυναμία:	$p \wedge p \equiv p,$	$p \vee p \equiv p$
5. Απορρόφηση:	$p \wedge (p \vee q) \equiv p,$	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$
6.De Morgan:	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q,$	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
7. Διπλή άρνηση:	$\neg\neg p \equiv p$	
8. Αντ/ση συνεπαγωγής:	$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$	
9. Αντ/ση ισοδυναμιας:	$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	
10. Αντιθετοαναστροφή	$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$	

3.3 Κανονικές μορφές

Ορισμός 3.18. Ένας τύπος είναι σε **κανονική διαζευκτική μορφή** (ΚΔΜ), αν είναι της μορφής $\phi_1 \vee \phi_2 \vee \ldots \vee \phi_n$ όπου $n \geq 1$ και ϕ_i είναι της μορφής $\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \ldots \wedge \theta_m$, όπου $m \geq 1$ και τα θ_j είναι προτασιακές μεταβλητές ή αρνήσεις προτασιακών μεταβλητών.

Ορισμός 3.19. Ένας τύπος είναι σε **κανονική συζευκτική μορφή** (ΚΣΜ), αν είναι της μορφής $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \ldots \wedge \phi_n$ όπου $n \geq 1$ και ϕ_i είναι της μορφής $\theta_1 \vee \theta_2 \vee \ldots \vee \theta_m$, όπου $m \geq 1$ και τα θ_j είναι προτασιακές μεταβλητές ή αρνήσεις προτασιακών μεταβλητών.

***Θεώρημα* 3.20.** *Για κάθε προτασιακό τύπο ϕ, υπάρχει τύπος $\phi*$ σε κανονική διαζευκτική μορφή, τέτοιος ώστε $\phi \equiv \phi*$.*

***Θεώρημα* 3.21.** *Για κάθε προτασιακό τύπο ϕ, υπάρχει τύπος $\phi*$ σε κανονική συζευκτική μορφή, τέτοιος ώστε $\phi \equiv \phi*$.*

Μια συνήθης πρακτική για να υπολογιστεί η κανονική διαζευκτική ή συζευκτική μορφή ενός δεδομένου τύπου, είναι να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες των συνδέσμων, έτσι ώστε μέσα από μια σειρά από κατάλληλα επιλεγμένες εφαρμογές των ιδιοτήτων να καταλήξουμε στη ζητούμενη κανονική μορφή.
Παράδειγμα. Δίνεται ο τύπος

$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \wedge (t \rightarrow r)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες των συνδέσμων για να μετατρέψουμε τον τύπο $(p \to (q \to r)) \wedge (t \to r)$ αρχικά σε συζευκτική μορφή:

$$
\begin{aligned}
(p \to (q \to r)) \wedge (t \to r) \equiv & & \text{(Αντ/ση συνεπαγωγής)}\\
& \equiv (p \to (\neg q \vee r)) \wedge (t \to r) & \text{(Αντ/ση συνεπαγωγής)}\\
& \equiv (p \to (\neg q \vee r)) \wedge (\neg t \vee r) & \text{(Αντ/ση συνεπαγωγής)}\\
& \equiv (\neg p \vee (\neg q \vee r)) \wedge (\neg t \vee r) & \text{(Προσεταιριστική)}\\
& \equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg t \vee r) & \text{(ΚΣΜ)}
\end{aligned}
$$

Ο τελευταίος προτασιακός τύπος είναι σε κανονική συζευκτική μορφή. Συνεχίζουμε για την εύρεση μιας διαζευκτικής μορφής:

$$
\begin{aligned}
& (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg t \vee r) \equiv & \text{(Επιμεριστική)}\\
& \equiv ((\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge \neg t) \vee ((\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge r) & \text{(Επιμεριστική)}\\
& \equiv ((\neg p \wedge \neg t) \vee (\neg q \wedge \neg t) \vee (r \wedge \neg t)) \vee ((\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge r) & \text{(Επιμεριστική)}\\
& \equiv ((\neg p \wedge \neg t) \vee (\neg q \wedge \neg t) \vee (r \wedge \neg t)) \vee ((\neg p \wedge r) \vee (\neg q \wedge r) \vee (r \wedge r)) & \text{(Προσεταιριστική)}\\
& \equiv (\neg p \wedge \neg t) \vee (\neg q \wedge \neg t) \vee (r \wedge \neg t) \vee (\neg p \wedge r) \vee (\neg q \wedge r) \vee (r \wedge r) & \text{(Ταυτοδυναμία)}\\
& \equiv (\neg p \wedge \neg t) \vee (\neg q \wedge \neg t) \vee (r \wedge \neg t) \vee (\neg p \wedge r) \vee (\neg q \wedge r) \vee r & \text{(Απορρόφηση)}\\
& \equiv (\neg p \wedge \neg t) \vee (\neg q \wedge \neg t) \vee (r \wedge \neg t) \vee (\neg p \wedge r) \vee r & \text{(Απορρόφηση)}\\
& \equiv (\neg p \wedge \neg t) \vee (\neg q \wedge \neg t) \vee (r \wedge \neg t) \vee r & \text{(Απορρόφηση)}\\
& \equiv (\neg p \wedge \neg t) \vee (\neg q \wedge \neg t) \vee r & \text{(ΚΔΜ)}
\end{aligned}
$$

Ο τύπος που προέκυψε είναι σε κανονική διαζευκτική μορφή.

4 Μαθηματική Επαγωγή

4.1 Η επαγωγική αποδεικτική μέθοδος

Η **μαθηματική επαγωγή** είναι μια μεθοδολογία που μας επιτρέπει να αποδείξουμε μια πρόταση, ένα τύπο ή γενικότερα ένα ισχυρισμό ο οποίος εμπλέκει ή εξαρτάται από κάποιο φυσικό αριθμό. Γενικότερα όμως, η μεθοδολογία της επαγωγής μπορεί να επεκταθεί σε διακριτές δομές που ορίζονται αναδρομικά, όπως για παράδειγμα το σύνολο των προτασιακών τύπων της ΠΛ. Σε αυτή την περίπτωση η αποδεικτική διαδικασία ονομάζεται δομική επαγωγή.

Στη βασική της μορφή, που αφορά προτάσεις που εξαρτώνται από κάποιο φυσικό αριθμό, η ορθότητα της επαγωγικής διαδικασίας εξασφαλίζεται από το παρακάτω θεώρημα:

***Θεώρημα* 4.1** (Αρχή της μαθηματικής επαγωγής)**.** *Έστω $P(n)$ μια πρόταση που εξαρτάται από τον φυσικό αριθμό n. Αν*

- *η $P(n_0)$ αληθεύει για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$ και*
- *για κάθε $n \geq n_0$ αν ισχύει η $P(n)$, τότε ισχύει η $P(n+1)$,*

τότε η $P(n)$ αληθεύει για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq n_0$.

Στην πράξη μια επαγωγική απόδειξη αποτελείται συνήθως από τρία βήματα τα οποία περιγράφονται παρακάτω:

- **Βασικό βήμα**: Αποδεικνύουμε την πρόταση $P(n)$ για $n = n_0$.
- **Επαγωγική Υπόθεση**: Υποθέτουμε ότι η πρόταση $P(n)$ ισχύει για κάποιο $k \geq n_0$.
- **Επαγωγικό Βήμα**: Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση $P(n)$ ισχύει για $n = k+1$. Για την απόδειξη αυτή συνήθως απαιτείται η επίκληση της επαγωγική υπόθεσης.

Η εφαρμογή της επαγωγικής διαδικασίας παρουσιάζεται στα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 4.2. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{4.1}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την επαγωγική διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω.

- **Βασικό βήμα**: Αποδεικνύουμε την (4.1) για $n = 1$. Πράγματι

$$1 = \frac{1 \times (1 + 1)}{2}$$

  που ισχύει.

- **Επαγωγική Υπόθεση**: Υποθέτουμε ότι η (4.1) ισχύει για $n = k$, όπου $k \geq 1$. Δηλαδή, δεχόμαστε ότι ισχύει

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2} \tag{4.2}$$

- **Επαγωγικό Βήμα**: Θα αποδείξουμε ότι η (4.1) ισχύει για $n = k$+1. Δηλαδή θα δείξουμε ότι

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \tag{4.3}$$

  Πράγματι, ξεκινώντας από το αριστερό μέλος της (4.3), έχουμε

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \ldots + (k+1) = & \\ &= \overbrace{1 + 2 + 3 + \ldots + k}^{\text{από την } (4.2)} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 4.3. Να αποδειχθεί ότι κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 8$, μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα πολλαπλασίων του 3 και του 5. Δηλαδή, ότι για κάθε $n \geq 8$, υπάρχουν $\lambda, \mu \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε

$$n = 3\lambda + 5\mu \tag{4.4}$$

- **Βασικό βήμα**: Αποδεικνύουμε την (4.4) για $n = 8$. Πράγματι, αν θέσουμε $\lambda = \mu = 1$, τότε ισχύει

$$8 = 3 \times 1 + 5 \times 1$$

- **Επαγωγική Υπόθεση**: Υποθέτουμε ότι η (4.4) ισχύει για $n = k$, όπου $k \geq 8$. Δηλαδή, ότι για κάθε $k \geq 8$, υπάρχουν$\lambda, \mu \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε

$$k = 3\lambda + 5\mu \tag{4.5}$$

- **Επαγωγικό Βήμα**: Θα αποδείξουμε ότι η (4.4) ισχύει για $n = k+1$. Πράγματι, λόγω της επαγωγική υπόθεσης, χρησιμοποιώντας την (4.5), έχουμε

$$k + 1 = 3\lambda + 5\mu + 1 \tag{4.6}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

  – Αν $\mu = 0$, τότε θα είναι $k + 1 = 3\lambda + 1$. Όμως λόγω του ότι $k \geq 8$, θα είναι $\lambda \geq 3$. Αναλύουμε $1 = 2 \times 5 - 3 \times 3$, όποτε αντικαθιστώντας τη μονάδα στην (4.6) έχουμε

$$\begin{aligned} k + 1 &= 3\lambda + 2 \times 5 - 3 \times 3 \\ &= 3(\lambda - 3) + 5 \times 2 \end{aligned}$$

  Άρα, αν θέσουμε $\lambda' = \lambda - 3$ και $\mu' = 2$, έχουμε

$$k + 1 = 3\lambda' + 5\mu'$$

  – Αν $\mu > 0$, τότε αναλύουμε $1 = 2 \times 3 - 5$, όποτε αντικαθιστώντας τη μονάδα στην (4.6) έχουμε

$$\begin{aligned} k + 1 &= 3\lambda + 5\mu + 2 \times 3 - 5 \\ &= 3(\lambda + 2) + 5(\mu - 1) \end{aligned}$$

  Άρα, αν θέσουμε $\lambda' = \lambda + 2$ και $\mu' = \mu - 1$, έχουμε

$$k + 1 = 3\lambda' + 5\mu'$$

Παρατηρήστε ότι και στις δύο περιπτώσεις $\lambda', \mu' \in \mathbb{N}$.

□

Παράδειγμα 4.4. Να αποδειχθεί ότι το πλήθος των υποσυνόλων ενός πεπερασμένου συνόλου $S_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, για $n \geq 0$ (θεωρούμε $S_0 = \varnothing$), είναι 2^n. Δηλαδή, ότι

$$|\mathcal{P}(S_n)| = 2^n \tag{4.7}$$

- **Βασικό βήμα**: Αποδεικνύουμε την (4.7) για $n = 0$. Πράγματι, για $n = 0$ έχουμε $S_0 = \varnothing$, οπότε

$$\mathcal{P}(S_0) = \{\varnothing\}$$

άρα πράγματι

$$|\mathcal{P}(S_0)| = 2^0 = 1$$

- **Επαγωγική Υπόθεση**: Υποθέτουμε ότι η (4.7) ισχύει για $n = k$, όπου $k \geq 0$. Δηλαδή,

$$|\mathcal{P}(S_k)| = 2^k \tag{4.8}$$

- **Επαγωγικό Βήμα**: Θα αποδείξουμε ότι η (4.7) ισχύει για $n = k+1$, δηλαδή ότι

  $$|\mathcal{P}(S_{k+1})| = 2^{k+1} \tag{4.9}$$

  Διακρίνουμε δύο κατηγορίες υποσυνόλων του $S_{k+1} = \{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\}$:

  – Υποσύνολα τα οποία δεν περιέχουν το στοιχείο a_{k+1}. Αυτά όμως δεν είναι άλλα από τα υποσύνολα του S_k, άρα το πλήθος τους δίνεται από την επαγωγική υπόθεση. Δηλαδή, το πλήθος τους είναι 2^k.

  – Υποσύνολα τα οποία περιέχουν το στοιχείο a_{k+1}. Αν Q είναι ένα τέτοιο υποσύνολο, τότε αυτό γράφεται $Q = R \cup \{a_{k+1}\}$, όπου το R δεν περιέχει το a_{k+1}, άρα είναι υποσύνολο του S_k. Σε κάθε υποσύνολο Q αυτής μορφής, αντιστοιχεί ακριβώς ένα υποσύνολο $R \in \mathcal{P}(S_k)$. Συνεπώς, τα σύνολα αυτής της κατηγορίας είναι όσα και τα υποσύνολα του S_k, δηλαδή 2^k.

  Σύμφωνα με τα παραπάνω, συνολικά τα υποσύνολα του S_{k+1} είναι σε πλήθος

  $$|\mathcal{P}(S_{k+1})| = 2^k + 2^k = 2 \times 2^k = 2^{k+1}$$

□

Παράδειγμα 4.5. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $n \geq 4$, ισχύει η ανισότητα

$$n! > 2^n \tag{4.10}$$

- **Βασικό βήμα**: Αποδεικνύουμε την (4.10) για $n = 4$. Πράγματι

  $$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24 > 2^4 = 16$$

- **Επαγωγική Υπόθεση**: Υποθέτουμε ότι η (4.10) ισχύει για $n = k$, όπου $k \geq 4$. Δηλαδή, δεχόμαστε ότι ισχύει

  $$k! > 2^k \tag{4.11}$$

- **Επαγωγικό Βήμα**: Θα αποδείξουμε ότι η (4.10) ισχύει για $n = k+1$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι

  $$(k+1)! > 2^{k+1} \tag{4.12}$$

  Ξεκινώντας από το αριστερό μέλος της (4.12), έχουμε

  $$\begin{aligned} (k+1)! &= (k+1) \times k! && \text{Λόγω της (4.11)} \\ &> (k+1) \times 2^k && \text{Επειδή } k+1 \geq 5 > 2 \\ &> 2 \times 2^k \\ &= 2^{k+1} \end{aligned}$$

□

Μια πολύ χρήσιμη εφαρμογή της μαθηματικής επαγωγής είναι η χρήση της για την απόδειξη της ορθότητας ενός αλγορίθμου. Μια τέτοια απλή εφαρμογή παρουσιάζεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 4.6. Δίνεται η αναδρομική συνάρτηση

```
function f(a,n)
    if (n==0)
        return (1);
    else
        return (f(a,n-1)*a);
```

όπου $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ και $n \in \mathbb{N}$. Να δειχθεί ότι

$$f(a,n) = a^n \tag{4.13}$$

- **Βασικό βήμα**: Αποδεικνύουμε την (4.13) για $n = 0$. Πράγματι, εκτελώντας τον αλγόριθμο, επειδή ικανοποιείται η συνθήκη (n==0), θα πάρουμε

  $$f(a,0) = 1 = a^0$$

  που ισχύει.

- **Επαγωγική Υπόθεση**: Υποθέτουμε ότι η (4.13) ισχύει για $n = k$, όπου $k \geq 0$. Δηλαδή, δεχόμαστε ότι ισχύει

  $$f(a,k) = a^k \tag{4.14}$$

- **Επαγωγικό Βήμα**: Θα αποδείξουμε ότι η (4.13) ισχύει για $n = k+1$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι

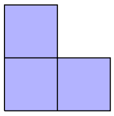
  $$f(a,k+1) = a^{k+1} \tag{4.15}$$

  Πράγματι, εκτελώντας τον αλγόριθμο, επειδή $k + 1 \geq 1$, η συνθήκη (n==0) δεν θα ικανοποιηθεί, οπότε η συνάρτηση θα επιστρέψει:

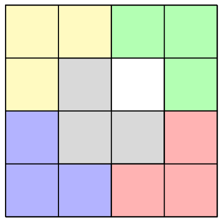
  $$\begin{aligned} f(a,k+1) &= f(a,k+1-1) \times a \\ &= f(a,k) \times a && \text{Λόγω της } (4.14) \\ &= a^k \times a \\ &= a^{k+1} \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 4.7. Να δειχθεί ότι οποιαδήποτε σκακιέρα που αποτελείται από $2^n \times 2^n$ $(n \geq 1)$ τετράγωνα μπορεί να καλυφθεί με τρόμινο σχήματος L, όπως το παρακάτω

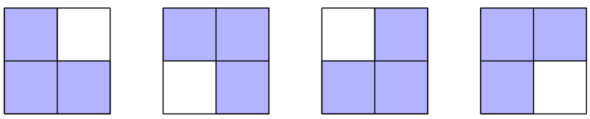


αφήνοντας ακάλυπτο ακριβώς ένα οποιοδήποτε τετράγωνο της σκακιέρας. Για παράδειγμα στην περίπτωση $n = 2$, η 4×4 σκακιέρα μπορεί να καλυφθεί ως εξής



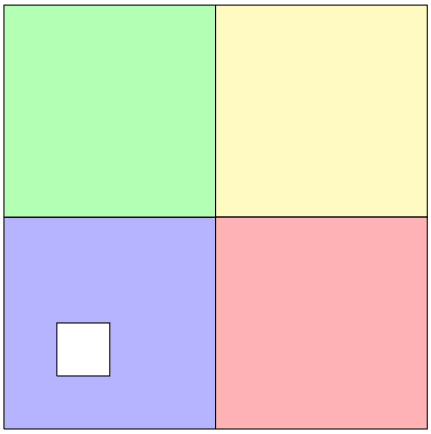
αφήνοντας ακάλυπτο μόνο το λευκό τετράγωνο.
Η απόδειξη θα γίνει επαγωγικά.

- **Βασικό βήμα**: Για $n = 1$, η σκακιέρα 2×2 μπορεί να καλυφθεί ανάλογα με το ποιο τετράγωνο επιλεγεί να μείνει ακάλυπτο όπως στα παρακάτω σχήματα

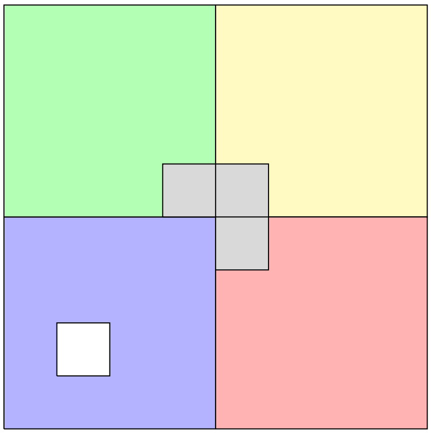


- **Επαγωγική υπόθεση**: Έστω ότι κάθε σκακιέρα διάστασης $2^k \times 2^k$, για $k \geq 1$ μπορεί να καλυφθεί από τρόμινο αφήνοντας ακριβώς ένα αυθαίρετα επιλεγμένο τετράγωνο κενό.

- **Επαγωγικό βήμα**: Θα δείξουμε ότι κάθε σκακιέρα διάστασης $2^{k+1} \times 2^{k+1}$, μπορεί να καλυφθεί από τρόμινο αφήνοντας ακριβώς ένα τετράγωνο κενό. Έστω μια σκακιέρα διάστασης $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ στην οποία επιλέγουμε αυθαίρετα ένα τετράγωνο που θα απομείνει κενό. Χωρίζουμε τη σκακιέρα αυτή σε τέσσερις σκακιέρες διάστασης $2^k \times 2^k$ οπότε το κενό τετράγωνο θα ανήκει σε μια από αυτές. Έστω ότι το κενό τετράγωνο ανήκει στην κάτω αριστερή σκακιέρα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

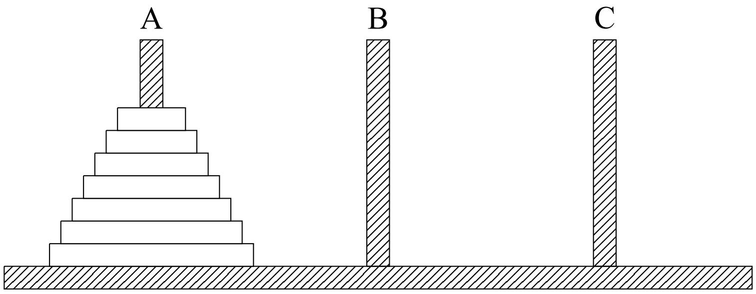


Για την κάτω αριστερή σκακιέρα διάστασης $2^k \times 2^k$, ισχύει η επαγωγική υπόθεση, άρα μπορούμε να την καλύψουμε αφήνοντας κενό μόνο το κενό τετράγωνο που επιλέχθηκε. Από τις υπόλοιπες τρεις σκακιέρες διάστασης $2^k \times 2^k$, αφαιρούμε προσωρινά το γκρι τρόμινο στο κέντρο όπως στο σχήμα που ακολουθεί



Αφαιρώντας το γκρι τρόμινο από τις τρεις αυτές σκακιέρες (πράσινη, κίτρινη, κόκκινη) αφήνουμε ακριβώς ένα τετράγωνο κενό σε κάθε μια τους, άρα μπορούμε να επικαλεστούμε την επαγωγική υπόθεση, σύμφωνα με την οποία υπάρχει πλήρης κάλυψη από τρόμινο για το υπόλοιπο της επιφάνειας τους. Συνεπώς, επαναφέροντας το γκρι τρόμινο στο κέντρο, ολόκληρη η $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ σκακιέρα μπορεί να καλυφθεί αφήνοντας κενό μόνο το λευκό τετράγωνο. $\square$

Παράδειγμα 4.8. Ο πύργος του Hanoi είναι ένα παιχνίδι στο οποίο υπάρχουν τρεις πάσσαλοι A, B, C και μια σειρά από n δίσκους οι διαφορετικής διαμέτρου. Οι δίσκοι είναι αρχικά τοποθετημένοι στον πάσσαλο A, σε φθίνουσα σειρά διαμέτρου από κάτω προς τα πάνω, όπως στο παρακάτω σχήμα:

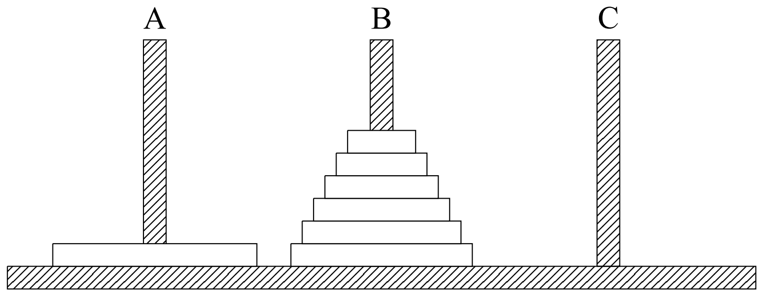


Το ζητούμενο του παιχνιδιού είναι να μεταφέρει κανείς όλους τους δίσκους από τον πάσσαλο A, σε κάποιο άλλο πάσσαλο, ακολουθώντας τους παρακάτω κανόνες:

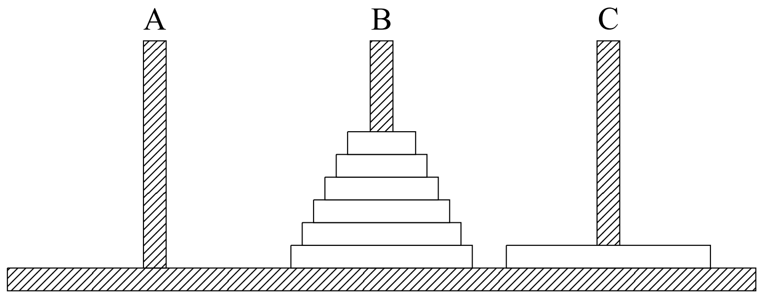
- Σε κάθε βήμα επιτρέπεται να μετακινηθεί μόνο ένας δίσκος.
- Μια μετακίνηση μπορεί να πραγματοποιηθεί από την κορυφή ενός σωρού δίσκων στην κορυφή ενός άλλου σωρού.
- Δεν επιτρέπεται σε κάποιο σωρό να βρεθεί μεγαλύτερος δίσκος πάνω από μικρότερο.

Το πρόβλημα είναι αρκετά δύσκολο να λυθεί ακόμη και για σχετικά μικρό αριθμό δίσκων. Η ευκολότερη μορφή λύσης που έχει δοθεί έχει τη μορφή αναδρομικού αλγορίθμου, ο οποίος μπορεί να μεταφέρει n δίσκους από τον πάσσαλο A σε κάποιο άλλο πάσσαλο, σε $2^n - 1$ κινήσεις. Η απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού μπορεί να επιβεβαιωθεί επαγωγικά, όπως δείχνεται παρακάτω.

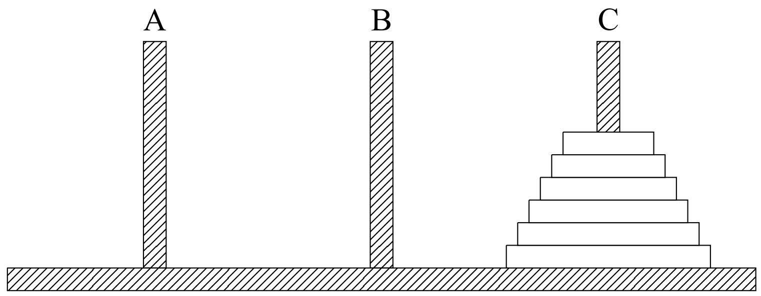
- **Βασικό βήμα**: Για $n = 1$, μπορούμε προφανώς να μετακινήσουμε τον μοναδικό δίσκο από τον πάσσαλο A σε οποιοδήποτε άλλο, με μία μόνο κίνηση. Άρα, ο απαιτούμενος αριθμός κινήσεων είναι πράγματι $2^1 - 1 = 1$, όπως προβλέπει ο τύπος.
- **Επαγωγική υπόθεση:** Υποθέτουμε ότι μπορούμε να μετακινήσουμε $k \geq 1$ δίσκους από τον πάσσαλο A σε οποιοδήποτε πάσσαλο σε $2^k - 1$ κινήσεις.
- **Επαγωγικό βήμα:** Θα αποδείξουμε ότι μπορούμε να μετακινήσουμε $k + 1$ δίσκους από τον πάσσαλο A σε οποιοδήποτε πάσσαλο σε $2^{k+1} - 1$ κινήσεις. Πράγματι, με την παρακάτω διαδικασία θα μεταφέρουμε με νόμιμο τρόπο τους $k+1$ δίσκους, από τον πάσσαλο A, στον πάσσαλο C. Η διαδικασία θα ήταν εντελώς αντίστοιχη για τη μεταφορά στον πάσσαλο B. Αναλύουμε τη διαδικασία μεταφοράς σε τρία επιμέρους στάδια:
  - Από την επαγωγική υπόθεση μπορούμε να μετακινήσουμε τους k μικρότερους δίσκους από την κορυφή του πασσάλου A, στον πάσσαλο B, χρησιμοποιώντας $2^k - 1$ κινήσεις. Με την εφαρμογή του πρώτου σταδίου, η κατανομή των δίσκων είναι η παρακάτω:



– Στη συνέχεια μπορούμε με μια επιπλέον κίνηση να μεταφέρουμε το μεγαλύτερο δίσκο που απέμεινε στον πάσσαλο A, στον πάσσαλο C, οπότε η κατανομή διαμορφώνεται όπως φαίνεται στο σχήμα:



– Τελικά, εφαρμόζοντας και πάλι την επαγωγική υπόθεση, μπορούμε να μετακινήσουμε τους k δίσκους του πασσάλου B, στον πάσσαλο C, χρησιμοποιώντας $2^k - 1$ κινήσεις. Οπότε η τελική θέση των δίσκων είναι η ζητούμενη:



Άρα, για τη μετακίνηση των $k + 1$ δίσκων από τον πάσσαλο A, στον πάσσαλο C, απαιτήθηκαν

$$(2^k - 1) + 1 + (2^k - 1) = 2 \times 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$$

κινήσεις.

$\square$

4.2 Ισχυρή μαθηματική επαγωγή

Μια δεύτερη εκδοχή της επαγωγικής αποδεικτικής διαδικασίας, που είναι γνωστή ως **ισχυρή μαθηματική επαγωγή**, αξιοποιεί μια ενισχυμένη μορφή της επαγωγικής υπόθεσης, ώστε να μπορούμε να εργαστούμε επαγωγικά και σε περιπτώσεις που δεν καλύπτονται από την απλή επαγωγική μέθοδο. Η ακριβής διατύπωση της αρχής της ισχυρής μαθηματικής επαγωγής είναι η παρακάτω:

***Θεώρημα* 4.9** (Αρχή της ισχυρής μαθηματικής επαγωγής)**.** *Έστω $P(n)$ μια πρόταση που εξαρτάται από τον φυσικό αριθμό n. Αν*

- *η $P(n_0)$ αληθεύει για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$, και*
- *για κάθε n, τέτοιο ώστε $n_0 \leq n < k$, αν ισχύει η $P(n)$, τότε ισχύει η $P(k)$,*

τότε η $P(n)$ αληθεύει για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq n_0$.

Στην πράξη μια επαγωγική απόδειξη, με την ισχυρή επαγωγική υπόθεση αποτελείται από τα βήματα τα οποία περιγράφονται παρακάτω:

- **Βασικό βήμα**: Αποδεικνύουμε την πρόταση $P(n)$ για $n = n_0$.
- **Επαγωγική Υπόθεση**: Υποθέτουμε ότι η πρόταση $P(n)$ ισχύει για κάθε n, τέτοιο ώστε $n_0 \leq n < k$.
- **Επαγωγικό Βήμα**: Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση $P(n)$ ισχύει για $n = k$.

Παρακολουθείστε τα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 4.10. Να αποδειχθεί ότι κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 2$, είναι πρώτος ή γινόμενο πρώτων[1] αριθμών.

- **Βασικό βήμα**: Για $n = 2$, δεν χρειάζεται να δείξουμε κάτι καθώς ο αριθμός 2 είναι πρώτος.
- **Επαγωγική υπόθεση**: Έστω ότι κάθε φυσικός n, τέτοιο ώστε $2 \leq n < k$ γράφεται σαν γινόμενο πρώτων.
- **Επαγωγικό βήμα**: Θα δείξουμε ότι ο αριθμός k είναι γινόμενο πρώτων. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις
  – Αν ο k είναι πρώτος, δεν χρειάζεται να δείξουμε κάτι.

[1] Πρώτοι ονομάζονται οι φυσικοί αριθμοί μεγαλύτεροι ή ίσοι του 2, που διαιρούνται μονό από τον εαυτό τους και τη μονάδα

– Αν ο k δεν είναι πρώτος, τότε θα διαιρείται από κάποιο φυσικό αριθμό p, τέτοιο ώστε $1 < p < k$. Άρα, υπάρχει q, τέτοιο ώστε $1 < q < k$ και

$$k = pq$$

Όμως επειδή $2 \leq p < k$ και $2 \leq q < k$, από την (ισχυρή) επαγωγική υπόθεση συμπεραίνουμε ότι οι p, q μπορούν, ο καθένας, είτε να γραφούν σαν γινόμενο πρώτων, είτε είναι οι ίδιοι πρώτοι. Άρα, το k ως γινόμενο των p, q είναι επίσης γινόμενο πρώτων.

□

Παράδειγμα 4.11. Δίνεται η αναδρομική συνάρτηση

```
function f(a,n)
   if (n==0)
      return (1);
   else
      if (mod(n,2)==0)
         b = f(a, n/2);
         return (b*b);
      else
         b = f(a, (n-1)/2);
         return (b*b*a);
```

όπου $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ και $n \in \mathbb{N}$. Να δειχθεί ότι

$$f(a,n) = a^n \tag{4.16}$$

- **Βασικό βήμα**: Αποδεικνύουμε την (4.16) για $n = 0$. Πράγματι, εκτελώντας τον αλγόριθμο, επειδή ικανοποιείται η συνθήκη (n==0), θα πάρουμε

  $$f(a,0) = 1 = a^0$$

  που ισχύει.

- **Επαγωγική Υπόθεση**: Υποθέτουμε ότι η (4.16) ισχύει για κάθε n, όπου $0 \leq n < k$.

- **Επαγωγικό Βήμα**: Θα αποδείξουμε ότι η (4.16) ισχύει για $n = k$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι

  $$f(a,k) = a^k \tag{4.17}$$

  Πράγματι, εκτελώντας τον αλγόριθμο, επειδή $0 \leq n < k$, θα είναι $k \geq 1$. Συνεπώς, η συνθήκη (n==0) δεν θα ικανοποιηθεί, οπότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

– Αν το k είναι άρτιος, τότε θα ισχύει η συνθήκη (mod(k,2)==0), άρα ο αλγόριθμος υπολογίζει

$$\begin{aligned} b &= f(a, k/2) && \text{Επειδή } k/2 < k \text{ εφαρμόζουμε την ε.υ.} \\ &= a^{k/2} \end{aligned}$$

οπότε η συνάρτηση επιστρέφει

$$\begin{aligned} f(a,k) &= b \times b \\ &= a^{k/2} \times a^{k/2} \\ &= a^k \end{aligned}$$

– Αν το k είναι περιττός, τότε δεν ισχύει η συνθήκη (mod(k,2)==0). Ο αλγόριθμος υπολογίζει

$$\begin{aligned} b &= f(a, (k-1)/2) && \text{Επειδή } (k-1)/2 < k \text{ εφαρμόζουμε την ε.υ.} \\ &= a^{(k-1)/2} \end{aligned}$$

οπότε η συνάρτηση επιστρέφει

$$\begin{aligned} f(a,k) &= b \times b \times a \\ &= a^{(k-1)/2} \times a^{(k-1)/2} \times a \\ &= a^k \end{aligned}$$

□

Σαν τελευταίο παράδειγμα αυτού του κεφαλαίου θα παρουσιάσουμε την λανθασμένη απόδειξη ενός παράδοξου αποτελέσματος, για να τονίσουμε τον μεγάλο ρόλο κάποιων λεπτομερειών που πρέπει να λαμβάνονται προσεκτικά υπόψη.

Παράδειγμα 4.12. Να αποδειχθεί ότι όλοι οι φυσικοί αριθμοί είναι άρτιοι!

- **Βασικό βήμα**: Για $n = 0$, είναι προφανές ότι η πρόταση ισχύει, καθώς το 0 είναι άρτιος.
- **Επαγωγική υπόθεση**: Έστω ότι κάθε φυσικός αριθμός n, όπου $0 \leq n < k$, είναι άρτιος.
- **Επαγωγικό βήμα**: Θα δείξουμε ότι ο αριθμός k είναι άρτιος. Πράγματι, γράφουμε

$$k = (k-1) + 1 \tag{4.18}$$

όπου προφανώς $k-1 < k$ και $1 < k$. Άρα, για τους αριθμούς $k-1$ και 1 ισχύει η επαγωγική υπόθεση, δηλαδή οι $k-1, 1$ είναι άρτιοι! Συνεπώς, επειδή το k είναι άθροισμα των δύο άρτιων αριθμών $k-1$ και 1, θα είναι και το ίδιο άρτιος!

Εξήγηση: Το λάθος στο παραπάνω σκεπτικό εντοπίζεται στο σημείο που επιπόλαια διαπιστώσαμε ότι ισχύει $k-1<k$ και $1<k$. Η ελάχιστη τιμή που επιτρέπεται να πάρει το k, δεδομένου ότι $0 \leq n < k$, είναι 1. Αν $k=1$, τότε η ανάλυση (4.18) είναι της μορφής

$$\underbrace{1}_{k} = \underbrace{0}_{k-1} + \underbrace{1}_{1}$$

Προφανώς, ενώ $k-1=0<k=1$, δεν ισχύει το ίδιο για το 1, δηλαδή δεν ισχύει $1<k=1$. Άρα, η απόδειξη μας δεν είναι σωστή!

$\square$

5 Στοιχειώδης Συνδυαστική

Συνδυαστική είναι ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με τη μελέτη πεπερασμένων διακριτών δομών. Πρακτικά, το σύνηθες ζητούμενο σε ένα πρόβλημα συνδυαστικής είναι η εύρεση του πλήθους των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου. Για την επίλυση των προβλημάτων αυτού του είδους επιστρατεύουμε μια σειρά κανόνων και μοντέλων, εκ των οποίων τα πιο γνωστά παρουσιάζονται παρακάτω.

5.1 Κανόνες Αθροίσματος και Γινομένου

Από τη στοιχειώδη θεωρία συνόλων είναι γνωστό ότι αν αν A, B είναι δύο πεπερασμένα σύνολα ξένα μεταξύ τους (δηλαδή $A \cap B = \emptyset$), τότε

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Στη συνδυαστική η αντίστοιχη αρχή ονομάζεται **κανόνας του αθροίσματος** και εφαρμόζεται όταν έχουμε στη διάθεση μας δύο σύνολα **αμοιβαία αποκλειόμενων ενδεχομένων**. Δυο ενδεχόμενα ονομάζονται αμοιβαία αποκλειόμενα όταν η επιλογή του ενός αποκλείει την επιλογή του άλλου. Όταν καλούμαστε να βρούμε το συνολικό πλήθος ενδεχομένων που μπορούν να παραχθούν από δύο σύνολα αμοιβαία αποκλειόμενων ενδεχομένων, με n_A και n_B ενδεχόμενα αντίστοιχα, τότε σύμφωνα με τον κανόνα του αθροίσματος, έχουμε $n_A + n_B$ ενδεχόμενα.

Παράδειγμα 5.1. Ένα μοντέλο αυτοκινήτου διατίθεται σε δύο εκδόσεις την Sport και την Classic. Η Sport διατίθεται σε τρία χρώματα κόκκινο, κίτρινο και πορτοκαλί, ενώ η Classic σε τέσσερα χρώματα, μαύρο, άσπρο, μπλε και ασημί. Πόσες είναι οι πιθανές επιλογές για έναν αγοραστή;

Παρατηρούμε τα δύο σύνολα χρωμάτων στα οποία διατίθενται οι εκδόσεις Sport και Classic, δεν έχουν κοινά στοιχεία. Δηλαδή τα δύο σύνολα αποτελούνται από αμοιβαία αποκλειόμενα ενδεχόμενα. Άρα, σύμφωνα με τον κανόνα του αθροίσματος υπάρχουν $3 + 4 = 7$ επιλογές χρώματος. □

Ένα δεύτερο γνωστό συμπέρασμα της στοιχειώδους θεωρίας συνόλων ότι αν A, B είναι δύο πεπερασμένα σύνολα, τότε για το καρτεσιανό τους γινόμενο[1] ισχύει

$$|A \times B| = |A|\,|B|$$

[1] Υπενθυμίζουμε ότι το καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων A, B είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγαριών με στοιχεία από τα A, B αντίστοιχα, δηλαδή $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

Η απλή αυτή αρχή ερμηνεύεται στη συνδυαστική ως **κανόνας του γινομένου**. Για να εφαρμοστεί ο κανόνας του γινομένου, πρέπει να έχουμε στη διάθεση μας δύο σύνολα **ανεξάρτητων ενδεχομένων**. Για να είναι οι δύο σύνολα ενδεχομένων ανεξάρτητα πρέπει για κάθε επιλογή ενδεχομένου από το ένα σύνολο, το πλήθος των διαθέσιμων ενδεχομένων από το άλλο να είναι πάντοτε το ίδιο. Αν το πρώτο σύνολο ενδεχομένων αποτελείται από n_A ενδεχόμενα και το δεύτερο αντίστοιχα από n_B, τότε, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου, το συνολικό πλήθος ενδεχομένων που σχηματίζονται από τα δύο σύνολα είναι $n_A n_B$.

Παράδειγμα 5.2. Σε μια ντουλάπα υπάρχουν 5 διαφορετικά πουκάμισα και 3 διαφορετικά σακάκια. Πόσες διαφορετικές επιλογές πουκάμισου - σακακιού μπορούν να δημιουργηθούν;

Προφανώς όποιο πουκάμισο και να διαλέξουμε, έχουμε πάντα στη διάθεση μας 3 επιλογές σακακιού (και αντίστροφα). Δηλαδή, τα δύο σύνολα ενδεχομένων (πουκάμισα - σακάκια) είναι ανεξάρτητα, άρα σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου έχουμε $5 \times 3 = 15$ διαφορετικές επιλογές. □

Ένα συνηθισμένο λάθος που γίνεται κατά τη χρήση του κανόνα του αθροίσματος, είναι η εφαρμογή του σε σύνολα ενδεχομένων που δεν είναι αμοιβαία αποκλειόμενα. Παρακολουθείστε το παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα 5.3. Έστω ότι ρίχνουμε ένα κόκκινο και ένα πράσινο ζάρι. Εφόσον τα δύο ζάρια είναι διακεκριμένα, το αποτέλεσμα της ρίψης είναι διατεταγμένα ζεύγη αριθμών από το 1 ως το 6. Επειδή τα δύο ζάρια είναι ανεξάρτητα, σύμφωνα με τον κανόνα του γινόμενου, υπάρχουν $6 \times 6 = 36$ τέτοια ζεύγη. Το ζητούμενο είναι να μετρήσουμε πόσα από αυτά τα ζεύγη περιέχουν τουλάχιστον ένα εξάρι.

Λανθασμένη ανάλυση: Για να μετρήσουμε το πλήθος των ευνοϊκών ζευγαριών με ένα τουλάχιστον εξάρι διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν το κόκκινο ζάρι φέρει 6, τότε το πράσινο μπορεί να φέρει οτιδήποτε, υπάρχουν 6 ευνοϊκά ζεύγη της μορφής $(6, x)$, όπου $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

- Αν το πράσινο ζάρι φέρει 6, τότε το κόκκινο μπορεί να φέρει οτιδήποτε, υπάρχουν 6 ευνοϊκά ζεύγη της μορφής $(x, 6)$, όπου $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Άρα, συνολικά έχουμε $6 + 6 = 12$ ζεύγη που περιέχουν τουλάχιστον ένα εξάρι.

Παρόλα αυτά, αν προσπαθήσουμε να μετρήσουμε προσεκτικά τα ευνοϊκά ζεύγη θα δούμε ότι αυτά είναι μόλις 11. Συγκεκριμένα τα ευνοϊκά ζεύγη είναι (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6), (5,6), (4,6), (3,6), (2,6), (1,6). Το λάθος στην παραπάνω ανάλυση εντοπίζεται στο γεγονός ότι έχουμε λανθασμένα εφαρμόσει τον κανόνα του αθροίσματος, καθώς τα δύο σύνολα που εξετάσαμε δεν αποτελούνται από αμοιβαία αποκλειόμενα ενδεχόμενα. Ειδικότερα, το ζεύγος (6,6) εμφανίζεται και στα δύο υποσύνολα ενδεχομένων που διακρίναμε. Άρα, αθροίζοντας τα πλήθη των ενδεχομένων των δύο παραπάνω συνόλων μετρήσαμε το ενδεχόμενο (6,6) εσφαλμένα δύο φορές.

Σωστή ανάλυση: Αυτή τη φορά θα διακρίνουμε πιο προσεκτικά τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν και τα δύο ζάρια φέρουν εξάρι, έχουμε 1 ευνοϊκό ενδεχόμενο, το (6,6).

- Αν το κόκκινο ζάρι φέρει 6 και το πράσινο φέρει 1 ως 5, υπάρχουν 5 ευνοϊκά ζεύγη της μορφής $(6, x)$, όπου $x = 1, 2, 3, 4, 5$.

- Αν το πράσινο ζάρι φέρει 6 και το κόκκινο φέρει 1 ως 5, υπάρχουν 5 ευνοϊκά ζεύγη της μορφής $(x, 6)$, όπου $x = 1, 2, 3, 4, 5$.

Επειδή τα τρία παραπάνω σύνολα ενδεχομένων είναι αμοιβαία αποκλειόμενα, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του αθροίσματος, που δίνει συνολικά $1+5+5 = 11$ ενδεχόμενα. □

Σημειώστε ότι το παραπάνω παράδειγμα αφορά μια σχετικά απλή περίπτωση απαρίθμησης, όπου μάλιστα το ζητούμενο πλήθος ευνοϊκών ενδεχομένων είναι μικρό. Το γεγονός αυτό μας βοήθησε σημαντικά στον εντοπισμό του λάθους, αφού μπορέσαμε εύκολα να απαριθμήσουμε τα ευνοϊκά ζεύγη εξαντλητικά. Σε πολυπλοκότερα παραδείγματα, αφενός η εξαντλητική απαρίθμηση είναι πρακτικά αδύνατη, αφετέρου ο διαχωρισμός των ευνοϊκών ενδεχομένων σε σύνολα αμοιβαία αποκλειόμενων περιπτώσεων δεν είναι το ίδιο εύκολος (προσπαθήστε να απαντήσετε στο αντίστοιχο ερώτημα με αυτό του παραπάνω παραδείγματος, στην περίπτωση που έχουμε 3,4,5... ή γενικά n διακεκριμένα ζάρια).

5.2 Διατάξεις – Συνδυασμοί

Ένα πολύ βασικό συνδυαστικό μοντέλο είναι αυτό της δημιουργίας δειγμάτων. Βάσει αυτού του μοντέλου θεωρούμε ότι έχουμε στη διάθεση μας n διακεκριμένα αντικείμενα και σχηματίζουμε δείγματα μεγέθους r, δηλαδή επιλέγουμε r από τα n αντικείμενα, λαμβάνοντας υπόψη μια σειρά περιορισμούς που αναλύονται παρακάτω.

Ένας πρώτος διαχωρισμός που γίνεται ως προς το είδος του δείγματος που σχηματίζουμε, αφορά το κατά πόσο μας ενδιαφέρει ή όχι η σειρά των αντικειμένων που το αποτελούν.

- **Διάταξη** (Permutation) σημαίνει ότι μας ενδιαφέρει η σειρά των αντικειμένων στο δείγμα.

- **Συνδυασμός** (Combination) σημαίνει ότι δεν μας ενδιαφέρει η σειρά των αντικειμένων στο δείγμα.

Παράδειγμα 5.4. Κατά το σχηματισμό του τυχερού αριθμού στην κλήρωση ενός λαχείου, έχει προφανώς σημασία η σειρά των ψηφίων που έχουν κληρωθεί. Αν υποθέσουμε ότι ο τυχερός αριθμός που κληρώθηκε είναι 734801, προφανώς δεν θα κερδίσει κάποιος που στο λαχείο του αναγράφεται ο αριθμός 830147, παρά το γεγονός ότι τα ψηφία του δελτίου του είναι ίδια με αυτά του τυχερού αριθμού. Δηλαδή, κατά το σχηματισμό του δείγματος μας ενδιαφέρει η διάταξη των ψηφίων. □

Παράδειγμα 5.5. Αντίθετα από το προηγούμενο παράδειγμα, στο ΛΟΤΤΟ, όπου κληρώνονται 6 από τους αριθμούς από το 1 έως το 49, δεν έχει σημασία η σειρά εμφάνισης των τυχερών αριθμών κατά την έξοδο τους από την κληρωτίδα. Δηλαδή, δεν έχει σημασία αν θα εμφανιστούν οι αριθμοί 5, 23, 12, 37, 44, 6 με τη συγκεκριμένη σειρά ή αν εμφανιστούν οι ίδιοι αριθμοί με τη σειρά 37, 44, 12, 23, 6, 5. Η τυχερή εξάδα καθορίζεται μόνο από το ποιοι είναι οι αριθμοί που την αποτελούν και όχι από τη σειρά τους. Σε αυτή την περίπτωση μιλάμε για δημιουργία συνδυασμών. □

Μια δεύτερη διάκριση που αφορά τον τρόπο σχηματισμού του δείγματος, είτε πρόκειται για διάταξη είτε για συνδυασμό, είναι το κατά πόσο επιτρέπεται η εμφάνιση του ίδιου αντικειμένου περισσότερες από μια φορές στο δείγμα.

- Σε δείγματα **χωρίς επανάληψη** (without repetition) κάθε αντικείμενο εμφανίζεται το πολύ μια φορά.
- Σε δείγματα **με επανάληψη** (with repetition) επιτρέπεται το ίδιο αντικείμενο να εμφανιστεί στο δείγμα περισσότερες από μια φορές.

Παράδειγμα 5.6. Στο παράδειγμα 5.5 οι αριθμοί που σχηματίζουν την τυχερή εξάδα είναι προφανώς διαφορετικοί μεταξύ τους. Αυτό είναι άμεση συνέπεια του τρόπου διεξαγωγής της κλήρωσης του συγκεκριμένου παιχνιδιού. Κάθε αριθμός που κληρώνεται βγαίνει από την κληρωτίδα και δεν συμμετέχει στην επόμενη κλήρωση των αριθμών που απέμειναν μέσα σε αυτή. Συνεπώς κάθε αριθμός μπορεί να εμφανιστεί το πολύ μια φορά στην τυχερή εξάδα. Σε αυτή την περίπτωση μιλάμε για δειγματοληψία χωρίς επανάληψη. □

Παράδειγμα 5.7. Αντίθετα, στο παράδειγμα 5.4, ο τρόπος σχηματισμού του τυχερού αριθμού από τα έξι ψηφία του, είναι τέτοιος που επιτρέπει την εμφάνιση κάποιου ή κάποιων από τα ψηφία 0,1,2,..,9 περισσότερες από μια φορές. Έτσι για παράδειγμα ένα αποτέλεσμα της μορφής 652552 είναι απολύτως φυσιολογικό. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε δειγματοληψία με επανάληψη. □

Όπως προκύπτει από τα παραπάνω, υπάρχουν δύο είδη διάταξης, με ή χωρίς επανάληψη και αντίστοιχα δύο είδη συνδυασμών. Τα τέσσερα αυτά μοντέλα δειγματοληψίας αναλύονται παρακάτω.

5.2.1 Διατάξεις r αντικειμένων από n, χωρίς επανάληψη

Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε στη διάθεση μας n διακεκριμένα αντικείμενα και διατάσσουμε r από αυτά χωρίς να χρησιμοποιούμε το ίδιο αντικείμενο περισσότερες από μια φορές. Προφανώς σε αυτή την περίπτωση το μέγεθος του δείγματος δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο του n, δηλαδή $r \leq n$. Το ζητούμενο είναι να υπολογίσουμε το πλήθος δυνατών διατάξεων μεγέθους r, χωρίς επανάληψη.

Ο υπολογισμός των δυνατών διατάξεων βασίζεται σε διαδοχικές εφαρμογές του κανόνα του γινομένου. Το σκεπτικό είναι το παρακάτω:

- για το 1ο στοιχείο του δείγματος, έχουμε n επιλογές, αφού έχουμε στη διάθεση μας όλα τα αντικείμενα.

- για το 2ο στοιχείο του δείγματος, έχουμε $n-1$ επιλογές αφού ήδη ένα αντικείμενο έχει χρησιμοποιηθεί στο πρώτο βήμα,
- για το 3ο στοιχείο έχουμε $n-2$ επιλογές,
- ...
- για το r-οστό στοιχείο του δείγματος, έχουμε $n-r+1$ επιλογές.

Επειδή το πλήθος των επιλογών σε κάθε βήμα, είναι ανεξάρτητο από τις επιλογές μας στα προηγούμενα βήματα, εφαρμόζοντας τον κανόνα του γινομένου έχουμε

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1)$$

τρόπους σχηματισμού του δείγματος. Το πλήθος των διατάξεων, r αντικειμένων από n, χωρίς επανάληψη, συμβολίζεται με $P(n,r)$ και μπορεί εύκολα να εκφραστεί με τη βοήθεια παραγοντικών ως εξής:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{5.1}$$

Ο συμβολισμός $n!$ διαβάζεται n **παραγοντικό** και ορίζεται αναδρομικά από τον τύπο

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ n(n-1)!, & n > 0 \end{cases}$$

Στην πράξη για $n > 0$, το παραγοντικό του n είναι ίσο με το γινόμενο των φυσικών αριθμών από το 1 ως το n, δηλαδή

$$n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$$

σημειώστε όμως ότι $0! = 1$.

Παράδειγμα 5.8. Πόσες συμβολοσειρές μπορούμε να σχηματίσουμε, με πέντε διαφορετικά ελληνικά κεφαλαία γράμματα;

Πρόκειται, για σχηματισμό διατάξεων $r = 5$ αντικειμένων από $n = 24$, χωρίς επανάληψη. Άρα, εφαρμόζοντας τον παραπάνω τύπο έχουμε:

$$P(24,5) = \frac{24!}{(24-5)!} = \frac{24!}{19!} = 5100480$$

□

Παράδειγμα 5.9. Πόσες συμβολοσειρές μπορούμε να σχηματίσουμε με πέντε διαφορετικά ελληνικά κεφαλαία γράμματα, οι οποίες περιέχουν την ακολουθία «ΤΟ»;

Διατάσσουμε αρχικά $r = 3$ γράμματα, από τα $n = 22$ που απομένουν από το αλφάβητο αν εξαιρέσουμε τα γράμματα Τ,Ο. Υπάρχουν

$$P(22,3) = \frac{22!}{(22-3)!} = \frac{22!}{19!} = 9240$$

τρόποι να διαταχθούν τα τρία γράμματα εκτός των Τ,Ο. Στη συνέχεια εξετάζουμε τους πιθανούς τρόπους τοποθέτησης της ακολουθίας «ΤΟ», μεταξύ των τριών γραμμάτων που ήδη διατάξαμε. Οι τέσσερις πιθανές τοποθετήσεις είναι

Τ Ο _ _ _
_ Τ Ο _ _
_ _ Τ Ο _
_ _ _ Τ Ο

Άρα, εφαρμόζοντας τον κανόνα του γινομένου, συνολικά υπάρχουν

$$4 \times P(22,3) = 4 \times 9240 = 36960$$

συμβολοσειρές που αποτελούνται από πέντε διαφορετικά γράμματα και περιέχουν την ακολουθία «ΤΟ». □

Παράδειγμα 5.10. Πόσες συμβολοσειρές μπορούμε να σχηματίσουμε με πέντε διαφορετικά ελληνικά κεφαλαία γράμματα, οι οποίες δεν περιέχουν την ακολουθία «ΤΟ»;

Με βάση τα δύο προηγούμενα παραδείγματα το πλήθη των συμβολοσειρών μήκους 5 που περιέχουν την ακολουθία «ΤΟ» και εκείνες που δεν την περιέχουν, αθροιζόμενα θα πρέπει να δίνουν το πλήθος των αντίστοιχων ακολουθιών χωρίς κανένα περιορισμό. Άρα, το πλήθος των συμβολοσειρών χωρίς την ακολουθία «ΤΟ» είναι

$$P(24,5) - 4 \times P(22,3) = 5063520.$$

□

Παράδειγμα 5.11. Με πόσους τρόπους μπορούν πέντε άτομα, ο Γιάννης, ο Πέτρος, η Μαρία, ο Άρης και η Δήμητρα να δειπνήσουν σε ένα τραπέζι πέντε διακεκριμένων θέσεων:

(α) Αν το τραπέζι είναι κυκλικό και ο Γιάννης και η Μαρία δεν πρέπει να κάθονται σε διπλανές θέσεις;

(β) Αν το τραπέζι δεν είναι κυκλικό και ο Γιάννης και η Μαρία δεν πρέπει να κάθονται σε διπλανές θέσεις;

(γ) Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν τα 5 παραπάνω άτομα σε ένα μη κυκλικό τραπέζι 10 θέσεων, αν πρέπει αναγκαστικά ανάμεσα στο Γιάννη και στη Μαρία να μεσολαβούν ακριβώς δύο κενές θέσεις;

(α) Αν δεν υπήρχε ο περιορισμός που περιγράφεται στην εκφώνηση θα είχαμε ένα απλό πρόβλημα διάταξης 5 διακεκριμένων αντικειμένων, αφού κάθε συνδαιτυμόνας θα μπορούσε να καθίσει σε οποιαδήποτε θέση, με λύση $5! = 120$. Από αυτές θα πρέπει να εξαιρέσουμε τις περιπτώσεις όπου ο Γιάννης και η Μαρία κάθονται σε διπλανές θέσεις. Αν αριθμήσουμε τις διακεκριμένες θέσεις του κυκλικού τραπεζιού από το 1 ως το 5, τότε υπάρχουν 5 επιλογές διπλανών θέσεων: 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-1. Οι δυνατές όμως τοποθετήσεις της Μαρίας δίπλα στο Γιάννη είναι 10 αφού για κάθε μια από τις προηγούμενες επιλογές μπορεί να κάθεται αριστερά ο Γιάννης και δεξιά η Μαρία ή αντίστροφα. Για κάθε τοποθέτηση του Γιάννη και της Μαρίας μένουν 3 διακεκριμένες θέσεις για να καθίσουν οι υπόλοιποι συνδαιτυμόνες. Αυτό είναι ένα πρόβλημα διάταξης 3 αντικειμένων και έχει λύση $3! = 6$. Σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου οι τρόποι με τους οποίους μπορούν να τοποθετηθούν οι συνδαιτυμόνες ώστε ο Γιάννης να καθίσει δίπλα στη Μαρία είναι $10 \times 6 = 60$. Επομένως, οι τρόποι με τους οποίους μπορούν να τοποθετηθούν οι συνδαιτυμόνες ώστε ο Γιάννης να μην καθίσει δίπλα στη Μαρία είναι $120 - 60 = 60$.

(β) Αν το τραπέζι δεν είναι κυκλικό τότε οι θέσεις 5-1 δεν είναι γειτονικές, άρα έχουμε $2 \times 4 = 8$ «απαγορευμένες» τοποθετήσεις για τον Γιάννη και τη Μαρία. Σκεπτόμενοι αντίστοιχα με την περίπτωση (α), θα έχουμε $5! - 8 \times 3! = 120 - 48 = 72$ τοποθετήσεις.

(γ) Μπορούμε να τοποθετήσουμε αρχικά τον Γιάννη και τη Μαρία με τους παρακάτω 14 τρόπους:

Γ _ _ Μ _ _ _ _ _ _	Μ _ _ Γ _ _ _ _ _ _
_ Γ _ _ Μ _ _ _ _ _	_ Μ _ _ Γ _ _ _ _ _
_ _ Γ _ _ Μ _ _ _ _	_ _ Μ _ _ Γ _ _ _ _
_ _ _ Γ _ _ Μ _ _ _	_ _ _ Μ _ _ Γ _ _ _
_ _ _ _ Γ _ _ Μ _ _	_ _ _ _ Μ _ _ Γ _ _
_ _ _ _ _ Γ _ _ Μ _	_ _ _ _ _ Μ _ _ Γ _
_ _ _ _ _ _ Γ _ _ Μ	_ _ _ _ _ _ Μ _ _ Γ

Σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις απομένουν 6 θέσεις διαθέσιμες, για τα υπόλοιπα 3 άτομα, τα οποία μπορούν να καθίσουν σε αυτές με $\mathrm{P}(6,3) = 6 \times 5 \times 4 = 120$ τρόπους. Άρα χρησιμοποιώντας τον κανόνα του γινομένου έχουμε συνολικά $120 \times 14 = 1680$ τρόπους.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε την ακολουθία «Γ _ _ Μ» σαν ένα νέο άτομο, όποτε το πρόβλημα μας θα ήταν ισοδύναμο με το να τοποθετήσουμε 4 άτομα σε 7 θέσεις, δηλαδή $\mathrm{P}(7,4) = 840$. Αντίστοιχα, θεωρώντας την ακολουθία «Μ _ _ Γ» σαν ένα νέο άτομο έχουμε επίσης 840 τρόπους. Δηλαδή συνολικά $840 + 840 = 1680$ τρόπους. □

Παράδειγμα 5.12. Σε ένα πάρτι συμμετέχουν 10 αγόρια και 10 κορίτσια. Με πόσους τρόπους μπορούν να σχηματιστούν ζευγάρια ώστε να χορέψουν τον επόμενο χορό;

Θεωρώντας ότι κάθε κορίτσι θα διαλέξει τον καβαλιέρο της, το πρόβλημα είναι αντίστοιχο με τη δημιουργία ενός διατεταγμένου δείγματος μεγέθους $r = 10$ (κορίτσια) από $n = 10$ διακριτά αντικείμενα (αγόρια). Άρα, το πλήθος των δυνατών διατάξεων είναι

$$P(10,10) = \frac{10!}{(10-10)!} = 10!$$

□

5.2.2 Διατάξεις r αντικειμένων από n, με επανάληψη

Όταν έχουμε δυνατότητα επανάληψης μπορούμε κατά το σχηματισμό του δείγματος να χρησιμοποιούμε το ίδιο αντικείμενο περισσότερες από μια φορές. Εξαιτίας της δυνατότητας αυτής μπορεί το μέγεθος του δείγματος να είναι μεγαλύτερο του n. Το ζητούμενο είναι να υπολογίσουμε το πλήθος δυνατών διατάξεων μεγέθους r, αυτή τη φορά με επανάληψη.

Όπως και παραπάνω, ο υπολογισμός των δυνατών διατάξεων βασίζεται σε διαδοχικές εφαρμογές του κανόνα του γινομένου:

- για το 1ο στοιχείο του δείγματος, έχουμε n επιλογές, αφού έχουμε στη διάθεση μας όλα τα αντικείμενα.
- για το 2ο στοιχείο του δείγματος, έχουμε και πάλι n επιλογές, αφού εξακολουθούμε να έχουμε στη διάθεση μας όλα τα αντικείμενα
- ...
- για το r-οστό στοιχείο του δείγματος, έχουμε n επιλογές.

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του γινομένου έχουμε

$$\underbrace{n \times n \times n \times \ldots \times n}_{r \text{ όροι}}$$

τρόπους σχηματισμού του δείγματος. Άρα το πλήθος των διατάξεων r αντικειμένων από n, με επανάληψη είναι

$$n^r \tag{5.2}$$

Παράδειγμα 5.13. Πόσους διαφορετικούς δυαδικούς αριθμούς μήκους 16 μπορούμε να σχηματίσουμε;

Εφόσον μιλάμε για δυαδικούς αριθμούς, έχουμε στη διάθεση μας δύο ψηφία, τα 0 και 1. Κάθε ένα από αυτά μπορεί να εμφανιστεί στο δυαδικό αριθμό των 16 ψηφίων περισσότερες από μια φορές. Άρα, πρόκειται για σχηματισμό διατάξεων μήκους $r = 16$ αντικειμένων από $n = 2$, με επανάληψη (παρατηρείστε ότι $r > n$). Άρα, εφαρμόζοντας τον παραπάνω τύπο έχουμε

$$2^{16} = 65536$$

διαφορετικούς δυαδικούς αριθμούς. □

Παράδειγμα 5.14. Έχοντας στην διάθεσή μας τα ψηφία 0 έως 9, πόσους $n-$ψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε (με απεριόριστη επανάληψη των ψηφίων) οι οποίοι περιέχουν μία τουλάχιστον φορά το μηδέν (σε οποιαδήποτε θέση εκτός της πρώτης από αριστερά);

Για να μετρήσουμε το ζητούμενο πλήθος θα μπορούσαμε να αναλύσουμε το πρόβλημα σε ένα μεγάλο αριθμό αμοιβαία αποκλειόμενων περιπτώσεων, που αφορούν το πλήθος των εμφανίσεων του 0 (προσέξτε ότι η εκφώνηση απαιτεί τουλάχιστον μια εμφάνιση του 0 και όχι ακριβώς μία). Αυτό σημαίνει ότι θα έπρεπε να καταμετρήσουμε το πλήθος των $n-$ψήφιων αριθμών με ένα μηδενικό, στη συνέχεια με δύο μηδενικά, τρία μηδενικά κλπ. Κάτι τέτοιο είναι αρκετά δύσκολο (όχι όμως αδύνατο!) γι' αυτό προτιμούμε να εφαρμόσουμε το παρακάτω τέχνασμα:

- Το πλήθος των $n-$ψήφιων αριθμών που μπορούν να σχηματιστούν χωρίς τον περιορισμό σχετικά με την εμφάνιση ενός τουλάχιστον μηδενικού είναι $9 \times 10^{n-1}$, αφού για το πρώτο αριστερά ψηφίου έχουμε 9 επιλογές (ψηφία 1 ως 9), ενώ για τις υπόλοιπα $n-1$ ψηφία, έχουμε τη διάταξη $n-1$ στοιχείων από 10 διακεκριμένα ψηφία (ψηφία 0 ως 9), με επανάληψη.

- Στη συνέχεια υπολογίζουμε το πλήθος των αριθμών που ικανοποιούν τη «συμπληρωματική» συνθήκη σχετικά με το πλήθος των εμφανίσεων του 0. Η συμπληρωματική της συνθήκης «... τουλάχιστον μια φορά το μηδέν», είναι προφανώς «... καμιά φορά το μηδέν». Οι αριθμοί μήκους n που δεν περιέχουν καμία φορά το μηδέν είναι 9^n, αφού έχουμε διάταξη n ψηφίων από 9 διαθέσιμα, με επανάληψη.

Εφόσον οι συμπληρωματικές συνθήκες είναι αμοιβαία αποκλειόμενες, εφαρμόζουμε τον κανόνα του αθροίσματος. Δηλαδή, αν x είναι το ζητούμενο πλήθος των $n-$ψήφιων αριθμών με τουλάχιστον ένα μηδενικό, πρέπει να ισχύει

$$x + 9^n = 9 \times 10^{n-1}$$

Δηλαδή,

$$x = 9 \times 10^{n-1} - 9^n$$

□

Παράδειγμα 5.15. Σε ένα σύστημα ασφαλείας ο κωδικός πρόσβασης (password) αποτελείται από 10 χαρακτήρες ακριβώς. Οι 72 επιτρεπτοί χαρακτήρες για το σχηματισμό των κωδικών πρόσβασης είναι: «a-z», «A-Z», «0-9» και «!@#$%^&*+-». Επιπλέον, απαιτείται κάθε κωδικός πρόσβασης να περιέχει τουλάχιστον ένα από τα 10 ειδικά σύμβολα «!@#$%^&*+-». Πόσοι διαφορετικοί κωδικοί πρόσβασης μπορούν να δημιουργηθούν;

Αν δεν υπήρχε ο περιορισμός της χρήσης τουλάχιστον ενός από τα 10 ειδικά σύμβολα, θα υπήρχαν

$$72^{10}$$

διαφορετικοί κωδικοί πρόσβασης. Επειδή είναι δύσκολο να διακρίνουμε όλες τις περιπτώσεις κωδικών πρόσβασης που περιέχουν τουλάχιστον ένα ειδικό σύμβολο, υπολογίζουμε το πλήθος των κωδικών που που ικανοποιούν τη συμπληρωματική ιδιότητα. Δηλαδή, το πλήθος των συμβολοσειρών που δεν περιέχουν κανένα από τα ειδικά σύμβολα, το οποίο είναι

$$62^{10}$$

Άρα, το ζητούμενο πλήθος κωδικών πρόσβασης είναι

$$72^{10} - 62^{10}$$

□

5.2.3 Συνδυασμοί r αντικειμένων από n, χωρίς επανάληψη

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω ο σχηματισμός μη διατεταγμένων δειγμάτων ονομάζεται συνδυασμός. Συγκεκριμένα, σε αυτή τη υποενότητα αναφερόμαστε στη δημιουργία συνδυασμών r αντικειμένων από n διαθέσιμα διακεκριμένα αντικείμενα, χωρίς επανάληψη. Η κατασκευή του τύπου που δίνει το πλήθος των συνδυασμών r από n, χωρίς επανάληψη, μπορεί να αναχθεί στον αντίστοιχο τύπο των διατάξεων.

Το σκεπτικό είναι ότι αν σχηματίσουμε τα $P(n,r)$ σε πλήθος διατεταγμένα δείγματα, τότε αυτά μπορούν να χωριστούν σε ομάδες που αποτελούνται από τα ίδια αντικείμενα. Το πλήθος των ζητούμενων συνδυασμών είναι ίσο με το πλήθος των ομάδων αυτών. Κάθε τέτοια ομάδα θα περιέχει $r!$ διατάξεις των ίδιων αντικείμενων, άρα συνολικά το πλήθος των ομάδων θα είναι $P(n,r)/r!$. Για να γίνει το παραπάνω καλύτερα κατανοητό δίνουμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 5.16. Έστω ότι έχουμε $n = 4$ γράμματα (Α,Β,Γ,Δ) και διατάσσουμε $r = 3$ από αυτά, χωρίς επανάληψη. Το πλήθος των διατάξεων είναι σύμφωνα με τα παραπάνω $P(4,3) = 24$. Πράγματι, οι 24 δυνατές διατάξεις είναι:

Ομάδα 1 (ΑΒΓ)						**Ομάδα 2 (ΑΒΔ)**						**Ομάδα 3 (ΑΓΔ)**						**Ομάδα 4 (ΒΓΔ)**					
Α	Α	Β	Β	Γ	Γ	Α	Α	Β	Β	Δ	Δ	Α	Α	Γ	Γ	Δ	Δ	Β	Β	Γ	Γ	Δ	Δ
Β	Γ	Α	Γ	Α	Β	Β	Δ	Α	Δ	Α	Β	Γ	Δ	Α	Δ	Α	Γ	Γ	Δ	Β	Δ	Β	Γ
Γ	Β	Γ	Α	Β	Α	Δ	Β	Δ	Α	Β	Α	Δ	Γ	Δ	Α	Γ	Α	Δ	Γ	Δ	Β	Γ	Β

Όπως είναι προφανές από τον παραπάνω πίνακα οι 24 διατάξεις, χωρίζονται σε 4 ομάδες με βάση τα γράμματα που περιέχονται σε κάθε ομάδα. Κάθε μια από τις ομάδες αποτελείται από $3! = 6$ διατάξεις των τριών γραμμάτων που συνθέτουν την ομάδα. Από την άλλη μεριά κάθε ομάδα αντιστοιχεί σε ένα συνδυασμό τριών γραμμάτων από τα τέσσερα διαθέσιμα. Άρα, το πλήθος των συνδυασμών είναι

$$\frac{P(4,3)}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

□

Γενικεύοντας το παραπάνω σκεπτικό το πλήθος των συνδυασμών r από n, χωρίς επανάληψη, που συμβολίζεται με $C(n,r)$, δίνεται από τον τύπο

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{5.3}$$

Παράδειγμα 5.17. Επανερχόμαστε στην κλήρωση του ΛΟΤΤΟ, που όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενα παραδείγματα, αντιστοιχεί σε σχηματισμό συνδυασμών $r = 6$ αντικειμένων από $n = 49$ διαθέσιμα, χωρίς επανάληψη. Σύμφωνα με τον τύπο (5.3) το πλήθος των δυνατών τυχερών εξάδων είναι

$$C(49, 6) = \frac{49!}{6!(49-6)!} = \frac{49!}{6!43!} = 13983816$$

□

Παράδειγμα 5.18. Πόσες δυαδικές λέξεις μήκους 8 (bytes) που περιέχουν ακριβώς 3 μονάδες (και προφανώς 5 μηδενικά) υπάρχουν;

Ένα byte αποτελείται από 8 δυαδικά ψηφία τα οποία θεωρούμε ότι αριθμούνται βάσει της θέσης τους. Αρκεί να επιλέξουμε 3 από τις 8 αυτές θέσεις στις οποίες θα τοποθετήσουμε τις μονάδες. Η επιλογή αυτή μπορεί να γίνει με

$$C(8, 3) = \frac{8!}{5!3!} = 56$$

τρόπους. Προφανώς, στις υπόλοιπες 5 θέσεις του byte θα τοποθετήσουμε μηδενικά. □

Παράδειγμα 5.19. Μια ομάδα από 13 τουρίστες πρόκειται να επιβιβαστεί σε τρία διακεκριμένα ταξί. Το πρώτο ταξί μπορεί να δεχθεί 5 επιβάτες, ενώ τα άλλα δύο από 4. Με πόσους τρόπους μπορούν να κατανεμηθούν οι τουρίστες στα τρία οχήματα;

- Για το πρώτο ταξί καλούμαστε να επιλέξουμε 5 άτομα από τα 13, που πρόκειται να επιβιβαστούν σε αυτό. Η επιλογή αυτή μπορεί να γίνει με $C(13, 5)$ τρόπους.
- Στο δεύτερο ταξί, θα επιλέξουμε 4 από τα 8 εναπομείναντα άτομα, άρα η επιλογή μπορεί να γίνει με $C(8, 4)$ τρόπους.
- Τελικά, έχουν απομείνει 4 άτομα τα οποία αναγκαστικά θα τοποθετηθούν στο τελευταίο όχημα (μπορούμε να πούμε ότι σε αυτή την περίπτωση έχουμε $C(4, 4) = 1$ τρόπο).

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του γινομένου, για τις τρεις παραπάνω επιλογές, έχουμε τελικά

$$C(13, 5) \times C(8, 4) \times C(4, 4) = \frac{13!}{5!8!}\frac{8!}{4!4!}\frac{4!}{0!4!} = \frac{13!}{5!4!4!} = 90090$$

τρόπους επιβίβασης στα οχήματα.

Σημειώστε ότι το τελικό αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο από τη σειρά που πραγματοποιήσαμε την κατανομή των επιβατών στα τρία οχήματα. Για παράδειγμα, αν επιλέξουμε αρχικά τους επιβάτες για το πρώτο τετραθέσιο αυτοκίνητο, στη συνέχεια για το πενταθέσιο και τέλος για το δεύτερο τετραθέσιο αυτοκίνητο, το αντίστοιχο αποτέλεσμα θα ήταν

$$C(13, 4) \times C(9, 5) \times C(4, 4) = \frac{13!}{4!9!}\frac{9!}{5!4!}\frac{4!}{0!4!} = \frac{13!}{5!4!4!} = 90090.$$

□

Παράδειγμα 5.20. Με πόσους τρόπους μπορούμε να σχηματίσουμε μια πενταμελή επιτροπή φοιτητών, επιλέγοντας από μια ομάδα 10 φοιτητών, στην οποία θα πρέπει να συμμετέχουν τουλάχιστον ένας από του φοιτητές Α και Β (οι οποίοι είναι μέλη της ομάδας των 10);

Α' τρόπος: Διακρίνουμε αμοιβαία αποκλειόμενες περιπτώσεις, ανάλογα με τη συμμετοχή των Α και Β στην επιτροπή.

- Αν συμμετέχει ο Α, αλλά δε συμμετέχει ο Β, τότε απομένει να επιλεγούν άλλα 4 άτομα από τους εναπομείναντες 8 φοιτητές. Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί με $C(8,4)$ τρόπους.
- Αντίστοιχα, αν συμμετέχει ο Β, αλλά δε συμμετέχει ο Α, τότε επίσης απομένει να επιλεγούν 4 άτομα από τους εναπομείναντες 8 φοιτητές, άρα υπάρχουν και πάλι $C(8,4)$ τρόποι.
- Αν συμμετέχουν και ο Α και ο Β, τότε απομένει να επιλεγούν 3 ακόμη άτομα από τους υπόλοιπους 8 φοιτητές. Το πλήθος των επιλογών είναι $C(8,3)$.

Επειδή οι τρεις παραπάνω περιπτώσεις αποτελούν αμοιβαία αποκλειόμενα ενδεχόμενα, εφαρμόζουμε τον κανόνα του αθροίσματος, οπότε συνολικά μπορούμε να σχηματίσουμε

$$C(8,4) + C(8,4) + C(8,3) = 70 + 70 + 56 = 196$$

επιτροπές σύμφωνα με τα ζητούμενα.

Β' τρόπος: Αν δεν υπήρχε ο περιορισμός της συμμετοχής τουλάχιστον ενός εκ των Α και Β, το πλήθος των δυνατών επιτροπών θα ήταν $C(10,5)$. Στις επιτροπές αυτές περιέχονται τόσο εκείνες στις οποίες που συμμετέχει τουλάχιστον ένας από τους Α,Β, όσο και εκείνες στις οποίες δεν συμμετέχει κανένας από τους δύο. Όμως οι επιτροπές στις οποίες δεν συμμετέχει ούτε ο Α, ούτε ο Β, είναι συνολικά $C(8,5)$. Άρα, το πλήθος των ζητούμενων επιτροπών είναι

$$C(10,5) - C(8,5) = 252 - 56 = 196.$$

□

5.2.4 Συνδυασμοί r αντικειμένων από n, με επανάληψη

Η κατασκευή του τύπου που δίνει το πλήθος των συνδυασμών r αντικειμένων από n, με επανάληψη, απαιτεί αρκετά μεγαλύτερη φαντασία από ότι οι τύποι των προηγούμενων περιπτώσεων. Παρακολουθείστε το παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα 5.21. Μια μηχανή αναψυκτικών διαθέτει τέσσερα είδη αναψυκτικών, τα Α,Β,Γ και Δ. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 10 αναψυκτικά από τη μηχανή αυτή;

Το συγκεκριμένο πρόβλημα αφορά την επιλογή $r = 10$ αναψυκτικών από $n = 4$ διαθέσιμα είδη, χωρίς προφανώς να μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία θα βγουν από τη μηχανή και φυσικά με δυνατότητα επιλογής περισσότερων του ενός από κάθε είδος. Άρα, πρόκειται για πρόβλημα συνδυασμών με επανάληψη.

Μια πρώτη σκέψη που θα μπορούσε να κάνει κανείς, είναι να εφαρμόσει μια τακτική αντίστοιχη με αυτή που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό του πλήθους των συνδυασμών χωρίς επανάληψη. Δηλαδή, να σκεφτούμε αρχικά ότι τα 10 αναψυκτικά βγαίνουν με μια σειρά από τη μηχανή, άρα υπάρχουν 4^{10} διατάξεις (με επανάληψη) και στη συνέχεια να εφαρμόσουμε την τεχνική της ομαδοποίησης, όπως στο παράδειγμα 5.16. Δυστυχώς, η τεχνική αυτή δεν μπορεί να εφαρμοστεί, καθώς μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι οι ομάδες στις οποίες αναλύονται οι 4^{10} διατάξεις με βάση το περιεχόμενο τους, δεν έχουν τον ίδιο αριθμό δεκάδων αναψυκτικών. Για παράδειγμα, η επιλογή 10 αναψυκτικών τύπου Α αντιστοιχεί σε μια μόνο διάταξη (την ΑΑΑΑΑΑΑΑΑΑ), ενώ η επιλογή 9 αναψυκτικών τύπου Α και ενός Β, αντιστοιχεί σε 10 διαφορετικές διατάξεις (ΒΑΑΑΑΑΑΑΑΑ, ΑΒΑΑΑΑΑΑΑΑ, ΑΑΒΑΑΑΑΑΑΑ,... κλπ.). Άρα, είναι λάθος να ισχυριστούμε κατ' αντιστοιχία με το παράδειγμα 5.16 ότι το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη είναι $4^{10}/10!$.

Το τέχνασμα που εφαρμόζουμε για να μετρήσουμε το ζητούμενο πλήθος συνδυασμών με επανάληψη, βασίζεται ουσιαστικά σε αναγωγή του προβλήματος σε ένα ισοδύναμο του. Συγκεκριμένα, θα αντιστοιχίσουμε κάθε δυνατή επιλογή της δεκάδας αναψυκτικών, με μοναδικό τρόπο, σε ένα δυαδικό αριθμό.

Στον παρακάτω πίνακα εμφανίζονται τρία τυχαία παραδείγματα επιλογής των 10 αναψυκτικών:

	Τύπος Α	Τύπος Β	Τύπος Γ	Τύπος Δ	Σύνολο
1η επιλογή	II	I	IIII	III	10
2η επιλογή		IIII		IIIII	10
3η επιλογή		IIIIIIIII			10

Το πλήθος των I σε κάθε στήλη, εκφράζει το πλήθος των αναψυκτικών του αντίστοιχου τύπου. Ένας πιο συμπαγής τρόπος γραφής του παραπάνω πίνακα προκύπτει αν κωδικοποιήσουμε τα I, με 1, και τα χωρίσματα μεταξύ των τεσσάρων τύπων αναψυκτικού με 0. Έτσι για κάθε επιλογή, σχηματίζεται μια δυαδική συμβολοσειρά.

	Δυαδική Συμβολοσειρά	Πλήθος 1	Πλήθος 0
1η επιλογή	1101011110111	10	3
2η επιλογή	0111100111111	10	3
3η επιλογή	0111111111100	10	3

Παρατηρείστε ότι όλες δυαδικές συμβολοσειρές που κωδικοποιούν τις επιλογές των αναψυκτικών, αποτελούνται από 10 μονάδες και 3 μηδενικά. Το σημαντικό είναι ότι κάθε πιθανή επιλογή αναψυκτικών αντιστοιχεί μοναδικά σε μια δυαδική συμβολοσειρά με 10 μονάδες και 3 μηδενικά, ενώ κάθε τέτοια δυαδική συμβολοσειρά αντιστοιχεί επίσης μοναδικά σε μια επιλογή αναψυκτικών. Άρα, το ζητούμενο πλήθος συνδυασμών με επανάληψη, είναι ίσο με το πλήθος των δυαδικών συμβολοσειρών που αποτελούνται από 10 μονάδες και 3 μηδενικά.

Για να μετρήσουμε το πλήθος των δυαδικών συμβολοσειρών 13 ψηφίων, που περιέχουν ακριβώς 10 μονάδες, αρκεί να σκεφτούμε ότι υπάρχουν 13 διαθέσιμες θέσεις και καλούμαστε να επιλέξουμε 10 από αυτές που πρόκειται να καταληφθούν από μονάδες (βλέπε παράδειγμα 5.18). Οι 3 θέσεις που απομένουν θα καταληφθούν από μηδενικά. Η επιλογή των 10 από τις 13 θέσεις μπορεί να γίνει με

$$C(13,10) = \frac{13!}{3!10!} = 286$$

τρόπους. Αυτό είναι και το ζητούμενο πλήθος επιλογής αναψυκτικών. □

Γενικεύοντας την τεχνική του προηγούμενου παραδείγματος προκύπτει ότι το πλήθος των των συνδυασμών r αντικειμένων από n, με επανάληψη είναι ίσο με το πλήθος των συνδυασμών r αντικειμένων από $n+r-1$, χωρίς επανάληψη, δηλαδή

$$C(n+r-1,r) = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!} \tag{5.4}$$

Παράδειγμα 5.22. Ρίχνουμε τρία όμοια ζάρια. Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα;

Εφόσον, τα τρία ζάρια είναι όμοια δεν μπορούμε να διακρίνουμε σε ποιο ζάρι αντιστοιχεί κάθε αποτέλεσμα, άρα δεν μας ενδιαφέρει η σειρά των τριών αποτελεσμάτων. Συνεπώς, το ζητούμενο είναι να σχηματίσουμε τους συνδυασμούς $r = 3$ αριθμών από το το 1 ως το 6, όπου μπορεί ο ίδιος αριθμός να εμφανιστεί περισσότερες από μια φορές. Άρα, το πλήθος των πιθανών αποτελεσμάτων είναι

$$C(6+3-1,3) = C(8,3) = \frac{8!}{5!3!} = 56$$

□

Παράδειγμα 5.23. Πόσες είναι οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \tag{5.5}$$

όπου $x_i \geq 0$, $i = 1,2,3,4$.

Αρκεί να αντιστοιχίσουμε το πρόβλημα του υπολογισμού του πλήθους των λύσεων της παραπάνω εξίσωσης με το πρόβλημα της επιλογής 10 αναψυκτικών που παρουσιάστηκε στο παράδειγμα 5.21. Η τιμή κάθε αγνώστου αντιστοιχεί στην ποσότητα των αναψυκτικών από κάθε ένα από τα τέσσερα διαθέσιμα είδη της μηχανής. Επειδή επιλέγουμε συνολικά 10 αναψυκτικά, θα πρέπει οι ποσότητες x_1, x_2, x_3, x_4 αθροιζόμενες να δίνουν 10. Δηλαδή, να ικανοποιούν την εξίσωση (5.5). Άρα, οι μη αρνητικές ακέραιες λύσεις της (5.5) είναι όσες οι επιλογές των αναψυκτικών στο παράδειγμα 5.21, δηλαδή,

$$C(13,10) = \frac{13!}{3!10!} = 286$$

□

Στον πίνακα 5.1 συνοψίζονται τα τέσσερα βασικότερα μοντέλα δειγματοληψίας, που παρουσιάστηκαν παραπάνω.

	Διατάξεις (ενδιαφέρει η σειρά)	**Συνδυασμοί (δεν ενδιαφέρει η σειρά)**
Χωρίς επανάληψη	$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$	$C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$
Με επανάληψη	n^r	$C(n+r-1,r) = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!}$

Πίνακας 5.1: Τα τέσσερα βασικά μοντέλα δειγματοληψίας

5.2.5 Διατάξεις ομάδων ομοίων αντικειμένων

Σε κάποιες κατηγορίες προβλημάτων καλούμαστε να διατάξουμε n αντικείμενα, τα οποία όμως δεν είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους, αλλά χωρίζονται σε ομάδες ομοίων αντικειμένων. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν $p \leq n$ ομάδες ομοίων αντικειμένων και κάθε ομάδα περιέχει n_i όμοια αντικείμενα, όπου $n_1 + n_2 + ... + n_p = n$, τότε το πλήθος των διατάξεων είναι:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_p!}$$

Ο τρόπος κατασκευής του παραπάνω τύπου βασίζεται σε μια τεχνική αντίστοιχη με αυτή του παραδείγματος 5.16 και περιγράφεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 5.24. Πόσες συμβολοσειρές παράγονται από τα γράμματα της λέξης ΠΑΡΑΠΟΝΑ;

Το ζητούμενο είναι να διατάξουμε $n = 8$ γράμματα, τα οποία όμως χωρίζονται σε $p = 5$ ομάδες ομοίων γραμμάτων. Συγκεκριμένα έχουμε $n_1 = 2$ «Π», $n_2 = 3$ «Α», $n_3 = 1$ «Ρ», $n_4 = 1$ «Ο» και $n_5 = 1$ «Ν».

Θεωρούμε προσωρινά ότι τα πέντε γράμματα είναι διακεκριμένα. Για ευκολία μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε να διατάξουμε τα σύμβολα $\Pi_1, \Pi_2, A_1, A_2, A_3$, Ρ,Ο, Ν. Για τα πέντε αυτά διαφορετικά σύμβολα υπάρχουν 8! διατάξεις. Ανάμεσα σε αυτές τις 8! διαφορετικές συμβολοσειρές θα συναντήσουμε τις έξι παρακάτω:

- $\Pi_1 A_1 P A_2 \Pi_2 ONA_3$
- $\Pi_1 A_1 P A_3 \Pi_2 ONA_2$
- $\Pi_1 A_2 P A_1 \Pi_2 ONA_3$
- $\Pi_1 A_2 P A_3 \Pi_2 ONA_1$
- $\Pi_1 A_3 P A_1 \Pi_2 ONA_2$
- $\Pi_1 A_3 P A_2 \Pi_2 ONA_1$

Οι έξι αυτές συμβολοσειρές διαφέρουν μόνο στην τοποθέτηση των τριών «Α», ενώ είναι ακριβώς ίδιες στα υπόλοιπα γράμματα. Αν αφαιρεθούν οι δείκτες από τα τρία «Α» οι έξι αυτές λέξεις θα ταυτιστούν. Το πλήθος 6 δεν είναι προφανώς τυχαίο. Είναι ίσο με πλήθος των διατάξεων τριών αντικειμένων, δηλαδή $3! = 6$.

Την ίδια ακριβώς ομαδοποίηση μπορούμε να εφαρμόσουμε για οποιαδήποτε συμβολοσειρά μέσα στις 8! διαφορετικές που παράγονται λόγω της διάκρισης των ομοίων γραμμάτων. Άρα, αφαιρώντας τους δείκτες από τα «Α» πρέπει να διαιρέσουμε το συνολικό πλήθος των διατάξεων, με το αντίστοιχο πλήθος διατάξεων των «Α». Ακριβώς η ίδια λογική εφαρμόζεται για όλα τα υπόλοιπα γράμματα. Οπότε τελικά έχουμε

$$\frac{8!}{3!2!1!1!1!} = 3360$$

διαφορετικές συμβολοσειρές. □

Παράδειγμα 5.25. Επανερχόμαστε στο παράδειγμα 5.18. Το ζητούμενο είναι να προσδιοριστεί το πλήθος των δυαδικών λέξεων που αποτελούνται από 3 μονάδες και 5 μηδενικά.

Ουσιαστικά το ζητούμενο είναι μετρηθεί το πλήθος των διατάξεων $n = 8$ δυαδικών ψηφίων, δεδομένου ότι αυτά ανήκουν σε δύο ομάδες ομοίων αντικειμένων, και ειδικότερα είναι $n_1 = 3$ μονάδες και $n_2 = 5$ μηδενικά. Σύμφωνα με τον τύπο που παρουσιάστηκε παραπάνω, το πλήθος των διατάξεων είναι

$$\frac{8!}{3!5!} = 56$$

□

Παράδειγμα 5.26. Εξετάζουμε από διαφορετική οπτική γωνία το πρόβλημα του παραδείγματος 5.19, όπου ζητείται το πλήθος των τρόπων κατανομής 13 τουριστών σε τρία διακεκριμένα οχήματα, χωρητικότητας 5, 4 και 4 ατόμων αντίστοιχα.

Ας υποθέσουμε ότι τα τρία οχήματα ονομάζονται Α,Β,Γ, οπότε ο διοργανωτής της εκδρομής έχει ετοιμάσει 13 εισιτήρια, εκ των οποίων τα 5 φέρουν την ένδειξη Α, άλλα 4 την ένδειξη Β και τα τελευταία 4 την ένδειξη Γ. Ανάλογα με τον τρόπο που θα μοιραστούν τα εισιτήρια στους 13 τουρίστες, εκείνοι θα επιβιβαστούν στο αντίστοιχο όχημα. Μοιράζοντας τα 13 εισιτήρια στους 13 επιβάτες, δημιουργούμε διατάξεις των συμβόλων Α,Β,Γ όπου το σύμβολο Α εμφανίζεται 5 φορές και τα Β και Γ από 4 φορές το καθένα. Σύμφωνα με τα παραπάνω, το πλήθος των διατάξεων αυτών είναι

$$\frac{13!}{5!4!4!} == 90090$$

που συμπίπτει με το αποτέλεσμα του παραδείγματος 5.19. □

5.3 Τοποθέτηση Σφαιριδίων σε υποδοχές

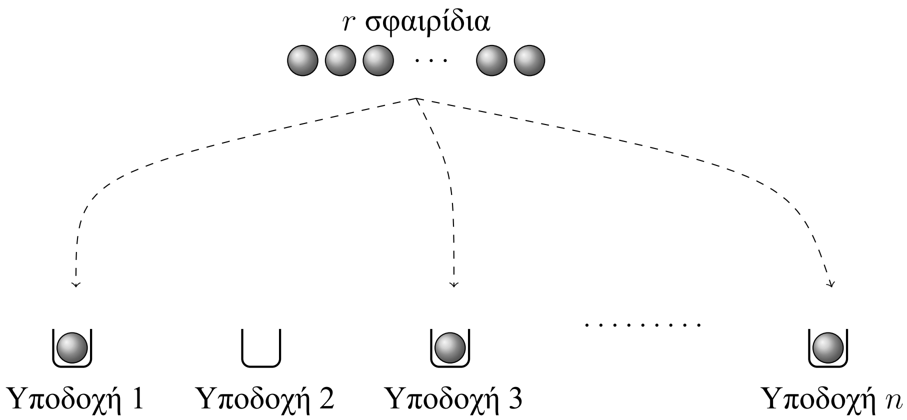
Ένα δεύτερο σημαντικό συνδυαστικό μοντέλο είναι αυτό της τοποθέτησης σφαιριδίων σε υποδοχές (γνωστό ως balls and bins). Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο το ζητούμενο είναι να μετρηθούν οι τρόποι τοποθέτησης r σφαιριδίων, σε n διακεκριμένες υποδοχές, δεδομένων κάποιων περιορισμών τόσο ως προς το είδος των σφαιριδίων, όσο και ως προς τη χωρητικότητα της κάθε υποδοχής. Το συμπέρασμα που προκύπτει από τη μελέτη του μοντέλου τοποθέτησης σφαιριδίων σε υποδοχές, είναι ότι οι διάφορες παραλλαγές του ανάγονται ουσιαστικά στα μοντέλα δειγματοληψίας που παρουσιάστηκαν στην ενότητα 5.2.

Οι παραλλαγές του μοντέλου τοποθέτησης σφαιριδίων σε υποδοχές αναλύονται παρακάτω.

5.3.1 Όμοια σφαιρίδια

Σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε ότι έχουμε r όμοια (μη διακεκριμένα) σφαιρίδια, τα οποία πρέπει να τοποθετηθούν σε n διακεκριμένα κουτιά. Ως προς τη χωρητικότητα των υποδοχών διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις:

- **Κάθε υποδοχή χωράει το πολύ ένα σφαιρίδιο** (βλέπε σχήμα 5.1). Αφού κάθε υποδοχή χωράει το πολύ ένα σφαιρίδιο, πρέπει αναγκαστικά να είναι $r \leq n$, αφού διαφορετικά δεν μπορούν όλα τα σφαιρίδια να τοποθετηθούν σε κάποια υποδοχή. Για να μετρήσουμε το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων, πρακτικά αρκεί να επιλέξουμε τις r από τις n υποδοχές που θα πάρουν σφαιρίδιο. Άρα, το πλήθος των τοποθετήσεων είναι απλά $C(n, r)$.



Σχήμα 5.1: Όμοια σφαιρίδια σε υποδοχές που χωρούν το πολύ ένα σφαιρίδιο

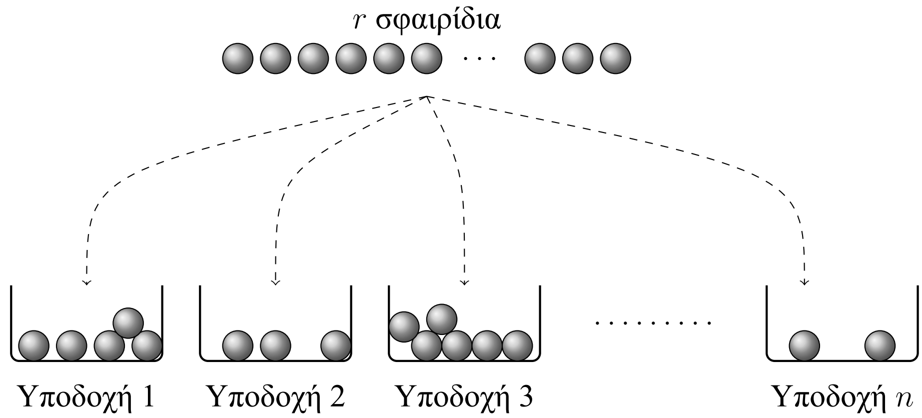
Παράδειγμα 5.27. Πόσοι είναι οι 8-ψήφιοι δυαδικοί αριθμοί που περιέχουν ακριβώς 3 μονάδες (και φυσικά 5 μηδενικά);

Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να θεωρήσουμε τα 8 ψηφία του δυαδικού αριθμού ως $n = 8$ διακεκριμένες υποδοχές και τις 3 μονάδες ως $r = 3$ όμοια σφαιρίδια, που πρέπει να κατανεμηθούν στις υποδοχές υπό τον περιορισμό ότι σε κάθε κουτί θα μπει το πολύ ένα σφαιρίδιο (εννοείται ότι στα 5 κουτιά που θα μείνουν άδεια αντιστοιχούν τα 5 μηδενικά του αριθμού). Σύμφωνα με τα παραπάνω η τοποθέτηση μπορεί να γίνει με

$$C(8,3) = \frac{8!}{5!3!} = 56$$

τρόπους. Παρατηρείστε ότι θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε το ίδιο μοντέλο, βλέποντας το πρόβλημα σαν τοποθέτηση $r = 5$ σφαιριδίων, στα οποία τώρα αντιστοιχίζουμε τα 5 μηδενικά, στις $n = 8$ υποδοχές. Η απάντηση σε αυτή την περίπτωση προκύπτει ίδια με παραπάνω. □

- **Οι υποδοχές χωράνε περισσότερα από ένα σφαιρίδια** (βλέπε σχήμα 5.2). Για να μετρήσουμε το πλήθος των τοποθετήσεων, μπορούμε να σκεφτούμε ότι κάθε σφαιρίδιο «επιλέγει» την υποδοχή στην οποία θα τοποθετηθεί αποκτώντας μια ετικέτα που δείχνει τον αριθμό της υποδοχής που «επέλεξε». Τα σφαιρίδια με τις ετικέτες που απέκτησαν, είναι ουσιαστικά ένα μη διατεταγμένο δείγμα μεγέθους r, όπου η ίδια ετικέτα μπορεί να εμφανιστεί περισσότερες από μία φορές. Άρα το πλήθος των τοποθετήσεων είναι $C(n+r-1, r)$.



Σχήμα 5.2: Τοποθέτηση ομοίων σφαιριδίων σε υποδοχές χωρίς περιορισμό

Παράδειγμα 5.28. Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε 10 καραμέλες σε σε τρία (διακεκριμένα) παιδιά;

Η απάντηση μπορεί να βρεθεί θεωρώντας ότι έχουμε να τοποθετήσουμε $r = 10$ όμοια σφαιρίδια (καραμέλες) σε $n = 3$ διακεκριμένες υποδοχές (παιδιά). Άρα το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων είναι

$$C(3+10-1, 10) = \frac{12!}{10!2!} = 66$$

□

Παράδειγμα 5.29. Να βρεθεί ο αριθμός των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $x+y+z = 10$, για

(α) $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

(β) $x > 0, y > 0, z > 0$

(α) Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την τοποθέτηση 10 όμοιων (μη διακεκριμένων) σφαιριδίων σε 3 διακεκριμένες υποδοχές (τρεις άγνωστοι x, y, z). Σύμφωνα με τον αντίστοιχο τύπο, ο αριθμός των λύσεων θα είναι

$$C(3+10-1, 10) = \frac{12!}{10!2!} = 66$$

(β) Η διαφορά εδώ σε σχέση με το (α) είναι ότι δεν επιτρέπεται στους τρεις αγνώστους η μηδενική λύση. Στο ισοδύναμο πρόβλημα της τοποθέτησης των 10 όμοιων σφαιριδίων σε 3 διακεκριμένα κουτιά, τίθεται ο επιπλέον ο περιορισμός ότι κάθε κουτί θα πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 1 σφαιρίδιο.

Αφού τα σφαιρίδια δεν είναι διακεκριμένα, μπορούμε πολύ απλά να τοποθετήσουμε εξ αρχής ένα σφαιρίδιο σε κάθε κουτί και στη συνέχεια να κατανείμουμε τα υπόλοιπα 7 σφαιρίδια χωρίς κανένα περιορισμό. Οπότε ο αριθμός των τοποθετήσεων είναι:

$$C(3+7-1, 7) = C(9, 7) = \frac{9!}{7!2!} = 36$$

□

Παράδειγμα 5.30. Έστω ότι έχουμε p όμοια μήλα και q όμοια πορτοκάλια, όπου $p \geq q-1$. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τα διατάξουμε, κατά τέτοιο τρόπο ώστε να μην εμφανίζονται δύο διαδοχικά πορτοκάλια στη σειρά;

Για να λύσουμε το παραπάνω πρόβλημα εφαρμόζουμε το εξής τέχνασμα. Αρχικά, τοποθετούμε τα q πορτοκάλια και ανάμεσα σε κάθε δύο διαδοχικά πορτοκάλια τοποθετούμε από ένα μήλο, ώστε να εξασφαλίσουμε την ικανοποίηση του περιορισμού. Για να γίνει αυτό θα χρειαστούμε $q-1$ μήλα, τα οποία είναι εξασφαλισμένο ότι διαθέτουμε αφού $p \geq q-1$. Η διάταξη θα είναι της μορφής

$$\text{ΠΜ ΠΜ ΠΜ} \ \ldots \ \text{ΠΜ Π}$$

Εφόσον, έχουμε εκ των προτέρων ικανοποιήσει τον περιορισμό, μένει να τοποθετήσουμε τα εναπομείναντα μήλα, τα οποία είναι $r = p-(q-1) = p-q+1$, στις $n = q+1$ υποδοχές (συμβολίζονται με $\sqcup$ παρακάτω) που σχηματίζονται ανάμεσα στα διαδοχικά ζεύγη ΠΜ και στα δύο άκρα της ακολουθίας, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\sqcup\,\text{ΠΜ} \sqcup \text{ΠΜ} \sqcup \text{ΠΜ} \sqcup \ldots \sqcup \text{ΠΜ} \sqcup \text{Π} \sqcup$$

Άρα, υπάρχουν

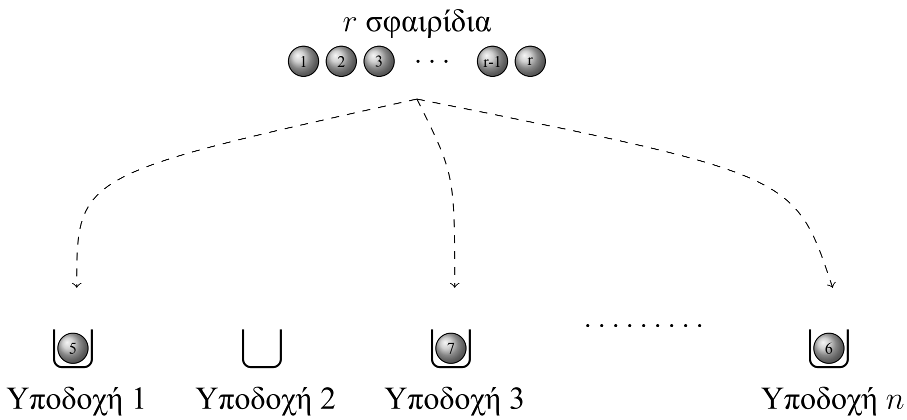
$$C(q+1+p-q+1-1, p-q+1) = C(p+1, p-q+1) = \frac{(p+1)!}{(p-q+1)!q!}$$

δυνατές τοποθετήσεις. □

5.3.2 Διακεκριμένα σφαιρίδια

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση που τα σφαιρίδια που πρόκειται να τοποθετηθούν στις υποδοχές έχουν κάποια ιδιότητα που τα καθιστά διακεκριμένα. Για παράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα σφαιρίδια φέρουν μια αρίθμηση από το 1 ως το r. Διακρίνουμε τους παρακάτω περιορισμούς ως προς τις υποδοχές.

- **Κάθε υποδοχή χωράει το πολύ ένα σφαιρίδιο** (βλέπε σχήμα 5.3). Όπως και στην αντίστοιχη περίπτωση των ομοίων σφαιριδίων πρέπει να ισχύει $r \leq n$, αφού διαφορετικά δεν μπορούν όλα τα σφαιρίδια να τοποθετηθούν σε κάποια υποδοχή. Για να μετρήσουμε το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων, πρακτικά αρκεί να διατάξουμε r υποδοχές από τις n υποδοχές που θα πάρουν σφαιρίδιο. Άρα το πλήθος των τοποθετήσεων είναι $P(n, r)$.



Σχήμα 5.3: Διακεκριμένα σφαιρίδια σε υποδοχές που χωρούν το πολύ ένα σφαιρίδιο

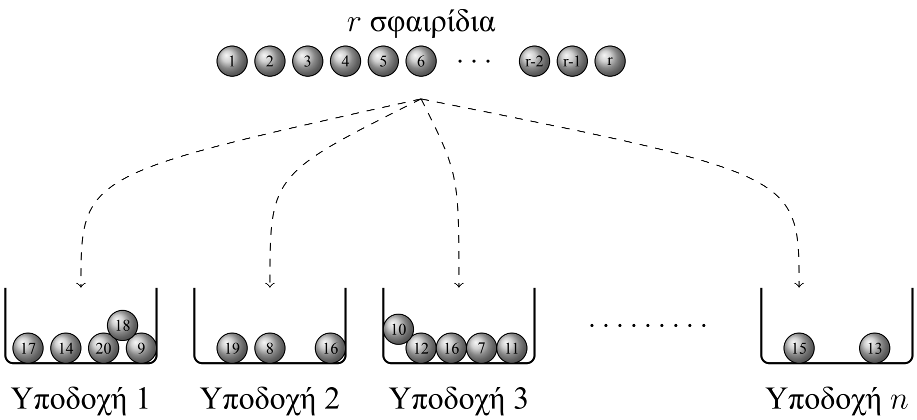
Παράδειγμα 5.31. Σε μια αίθουσα κινηματογράφου υπάρχουν 50 αριθμημένες θέσεις. Στην προβολή μιας ταινίας πρόκειται να προσέλθουν 30 θεατές. Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν οι 30 θεατές στην συγκεκριμένη αίθουσα.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε $n = 50$ διακεκριμένες υποδοχές (θέσεις της αίθουσας), στις οποίες θα τοποθετήσουμε $r = 30$ διακεκριμένα σφαιρίδια (θεατές), με τον προφανή περιορισμό ότι κάθε υποδοχή (θέση) μπορεί να δεχθεί το πολύ ένα σφαιρίδιο (θεατή). Άρα, σύμφωνα με τα παραπάνω, το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων είναι

$$P(50,30) = \frac{50!}{(50-30)!} = \frac{50!}{20!}$$

$\square$

- **Οι υποδοχές μπορούν να χωρέσουν περισσότερα από ένα σφαιρίδια, αλλά δεν έχει σημασία η σειρά των σφαιριδίων σε κάθε υποδοχή** (βλέπε σχήμα 5.4). Κάθε δυνατή κατανομή αντιστοιχεί με την εφαρμογή μιας ετικέτας σε κάθε σφαιρίδιο, η οποία δείχνει την υποδοχή στην οποίο θα τοποθετηθεί. Έτσι για κάθε τοποθέτηση δημιουργείται ένα διατεταγμένο δείγμα μεγέθους r, όπου η ίδια ετικέτα μπορεί να εμφανιστεί περισσότερες από μία φορές. Άρα, το πλήθος των τοποθετήσεων είναι n^r.



Σχήμα 5.4: Τοποθέτηση διακεκριμένων σφαιριδίων σε υποδοχές χωρίς περιορισμό και χωρίς να έχει σημασία η σειρά των σφαιριδίων σε κάθε υποδοχή

Παράδειγμα 5.32. Σε ένα λεωφορείο επιβαίνουν 20 άτομα που πρόκειται να αποβιβαστούν σε 5 διακεκριμένες στάσεις. Με πόσους τρόπους μπορεί να συμβεί αυτό;

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα μας ενδιαφέρει αφενός να γνωρίζουμε πόσοι επιβάτες θα κατέβουν σε κάθε στάση, αλλά πολύ περισσότερο μας ενδιαφέρει ποιοι επιβάτες θα κατέβουν σε κάθε στάση. Από την άλλη πλευρά από τη φύση του προβλήματος δεν φαίνεται να μας ενδιαφέρει η σειρά αποβίβασης των επιβατών σε κάθε στάση.

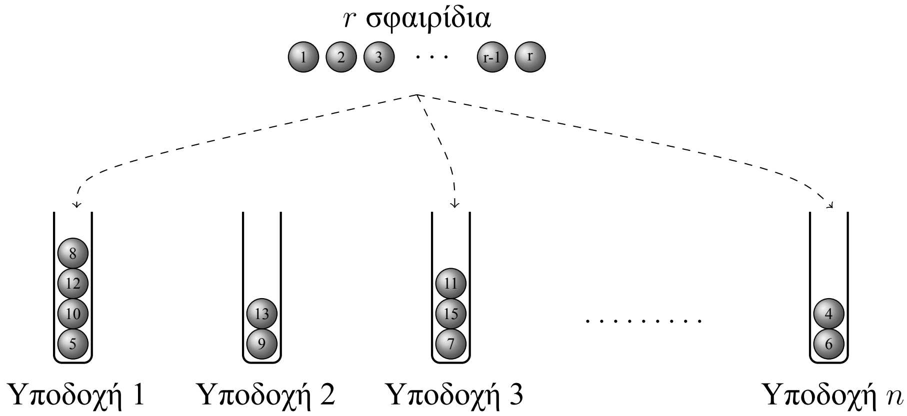
Πρόκειται λοιπόν για ένα πρόβλημα ισοδύναμο με την τοποθέτηση $r = 20$ διακεκριμένων σφαιριδίων (επιβατών) σε $n = 5$ διακεκριμένες υποδοχές (στάσεις) χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά των σφαιριδίων σε κάθε υποδοχή. Σύμφωνα με τα παραπάνω ο συνολικός αριθμός πιθανών τρόπων αποβίβασης είναι

$$5^{20}$$

□

- **Οι υποδοχές μπορούν να χωρέσουν περισσότερα από ένα σφαιρίδια και έχει σημασία η σειρά των σφαιριδίων σε κάθε υποδοχή** (βλέπε σχήμα 5.5). Σε αυτή περίπτωση μπορούμε να θεωρήσουμε προσωρινά ότι τα σφαιρίδια είναι όμοια, οπότε μπορούν να κατανεμηθούν στις υποδοχές με $C(n+r-1,r)$ τρόπους. Επειδή όμως τα σφαιρίδια είναι στην πραγματικότητα διακεκριμένα και μας ενδιαφέρει η ακριβής σειρά τοποθέτησης τους σε κάθε υποδοχή, για κάθε ένα από τους $C(n+r-1,r)$ τρόπους τοποθέτησης των ομοίων σφαιριδίων, υπάρχουν $r!$ διατάξεις των διακεκριμένων σφαιριδίων. Άρα, το πλήθος των τοποθετήσεων είναι

$$C(n+r-1,r) \times r! = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!}r! = P(n+r-1,r)$$



Σχήμα 5.5: Τοποθέτηση διακεκριμένων σφαιριδίων σε υποδοχές χωρίς περιορισμό όπου έχει σημασία η σειρά των σφαιριδίων σε κάθε υποδοχή

Παράδειγμα 5.33. Σε μια τράπεζα υπάρχουν 20 πελάτες που περιμένουν να εξυπηρετηθούν από 5 διαφορετικά ταμεία. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν οι 20 πελάτες να δημιουργήσουν ουρές σε κάθε ένα από τα 5 ταμεία (υποθέτουμε ότι όλοι οι πελάτες είναι ήδη στην τράπεζα);

Αντίστοιχα με το παράδειγμα 5.32 έχουμε να τοποθετήσουμε $r = 20$ διακεκριμένα σφαιρίδια (τα 20 άτομα που είναι άνθρωποι άρα διακεκριμένα πρόσωπα), σε $n = 5$ διακεκριμένες υποδοχές (στις 5 διαφορετικές ουρές), όμως αυτή τη φορά μας ενδιαφέρει η σειρά των σφαιριδίων (πελατών) σε κάθε υποδοχή (ουρά). Σύμφωνα με το αντίστοιχο μοντέλο τοποθέτησης σφαιριδίων σε υποδοχές, αυτό μπορεί να γίνει με

$$P(5+20-1,20) = P(24,20) = \frac{(24)!}{(24-20)!} = \frac{24!}{4!}$$

τρόπους. □

Παράδειγμα 5.34. Με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε τα γράμματα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, έτσι ώστε το Α να βρίσκεται αριστερότερα του Β και το Β αριστερότερα του Γ;

Για να ικανοποιήσουμε τον ζητούμενο περιορισμό τοποθετούμε αρχικά τα Α,Β,Γ στη ζητούμενη σειρά, οπότε θεωρούμε ότι ανάμεσα τους καθώς και στα δύο άκρα της ακολουθίας, δημιουργούνται $n = 4$ υποδοχές που συμβολίζονται με $\sqcup$, όπως παρακάτω:

$$\sqcup \text{Α} \sqcup \text{Β} \sqcup \text{Γ} \sqcup$$

Απομένει να τοποθετήσουμε τα $r = 5$ γράμματα Δ, Ε, Ζ, Η, Θ (διακριτά σφαιρίδια), χωρίς κανένα περιορισμό στις 4 υποδοχές που δημιουργήθηκαν, λαμβάνοντας υπόψη τη σειρά των γραμμάτων σε κάθε υποδοχή. Σύμφωνα με τα παραπάνω, το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων είναι

$$P(4+5-1,5) = P(8,5) = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!}$$

□

Τα πέντε μοντέλα τοποθέτησης σφαιριδίων σε υποδοχές που παρουσιάστηκαν παραπάνω, συνοψίζονται στον πίνακα 5.2.

Είδος Σφαιριδίων	**Περιορισμός**	**Αντίστοιχο Μοντέλο Δειγματοληψίας**	**Πλήθος**
Όμοια σφαιρίδια	Το πολύ ένα σφαιρίδιο σε κάθε υποδοχή και $r \leq n$	Συνδυασμοί r από n χωρίς επανάληψη	$C(n, r)$
	Χωρίς περιορισμό	Συνδυασμοί r από n με επανάληψη	$C(n + r - 1, r)$
Διακεκριμένα σφαιρίδια	Το πολύ ένα σφαιρίδιο σε κάθε υποδοχή και $r \leq n$	Διατάξεις r από n χωρίς επανάληψη	$P(n, r)$
	Δεν ενδιαφέρει η σειρά τοποθέτησης των σφαιριδίων σε κάθε υποδοχή	Διατάξεις r από n με επανάληψη	n^r
	Έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης των σφαιριδίων σε κάθε υποδοχή	Διατάξεις r από $n + r - 1$ χωρίς επανάληψη	$P(n + r - 1, r)$

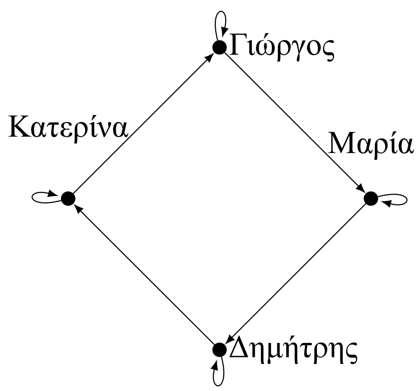
Πίνακας 5.2: Τα μοντέλα τοποθέτησης σφαιριδίων σε υποδοχές.

6 Γραφήματα

6.1 Βασικές έννοιες

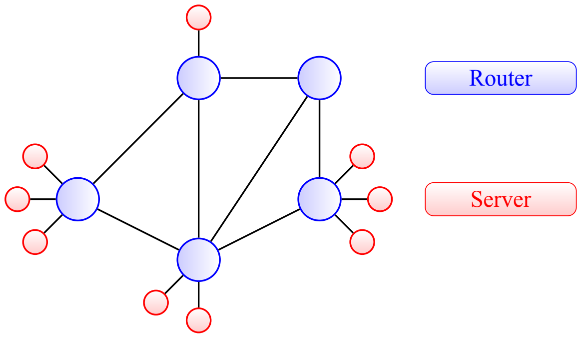
Το **γράφημα** ή **γράφος** (graph) είναι μια πολύ σημαντική διακριτή δομή που βρίσκει πολλές εφαρμογές σε διάφορους κλάδους των επιστημών μεταξύ των οποίων τα θεωρητικά μαθηματικά, η επιστήμη των υπολογιστών, η φυσική, η χημεία, η κοινωνιολογία κ.α. Σε γενικές γραμμές ένα γράφημα αποτελείται από δύο συστατικά, τις **κορυφές** (vertices) ή **κόμβους** (nodes), οι οποίες απεικονίζονται με σημεία του επιπέδου και τις **ακμές** (edges), οι οποίες δείχνουν τις συσχετίσεις μεταξύ των κορυφών, που παριστάνονται συνήθως με γραμμές ή βέλη ανάμεσα στις κορυφές.

Σε προηγούμενο κεφάλαιο χρησιμοποιήσαμε τα γραφήματα για να παραστήσουμε μια διμελή σχέση η οποία ορίστηκε επί ενός συνόλου. Για παράδειγμα επί του συνόλου των φοιτητών $A = \{\text{Γιώργος}, \text{Μαρία}, \text{Δημήτρης}, \text{Κατερίνα}\}$, ορίσαμε τη διμελή σχέση Σ, όπου το $a\Sigma b$ εκφράζει το γεγονός ότι «ο a γνωρίζει τον b». Η σχέση αυτή μπορεί να παρασταθεί με το γράφημα



Παρατηρείστε ότι στο παραπάνω γράφημα οι γραμμές που συνδέουν τα άτομα είναι βέλη, αφού η σχέση γνωριμίας δεν θεωρείται εξ ορισμού αμφίδρομη (συμμετρική). Τα βέλη αυτά αποδίδουν την κατεύθυνση της γνωριμίας.

Αντίστοιχα, θα μπορούσαμε με ένα γράφημα να παραστήσουμε την τοπολογία ενός δικτύου όπως στο παρακάτω σχήμα



Αντίθετα με το προηγούμενο παράδειγμα, τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τους κόμβους του δικτύου δεν έχουν κατεύθυνση.

Δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 6.1. Γράφημα $G(V,E)$ είναι ένα ζεύγος συνόλων

- $V = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ που ονομάζεται σύνολο **κορυφών**,
- $E = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_m\}$ που ονομάζεται σύνολο **ακμών**,

όπου η ακμή $e_i = (v_p, v_q) \in E$ παριστάνει την σύνδεση ενός ζεύγους κορυφών $v_p, v_q \in V$.

- Αν τα ζεύγη $e_i = (v_p, v_q)$ είναι διατεταγμένα τότε το γράφημα λέγεται **κατευθυνόμενο**. Σε αυτή την περίπτωση οι ακμές συμβολίζονται με βέλη και λέμε ότι η ακμή e_i έχει αρχή την κορυφή v_p και τέλος την v_q.
- Αν τα ζεύγη $e_i = \{v_p, v_q\}$ είναι μη διατεταγμένα τότε το γράφημα λέγεται **μη κατευθυνόμενο**, οπότε οι ακμές παριστάνονται με απλά ευθύγραμμα τμήματα μεταξύ των κορυφών και λέμε ότι η ακμή e_i εφάπτεται ή προσπίπτει στις κορυφές v_p, v_q. Οι κορυφές v_p, v_q λέγονται **γειτονικές**.

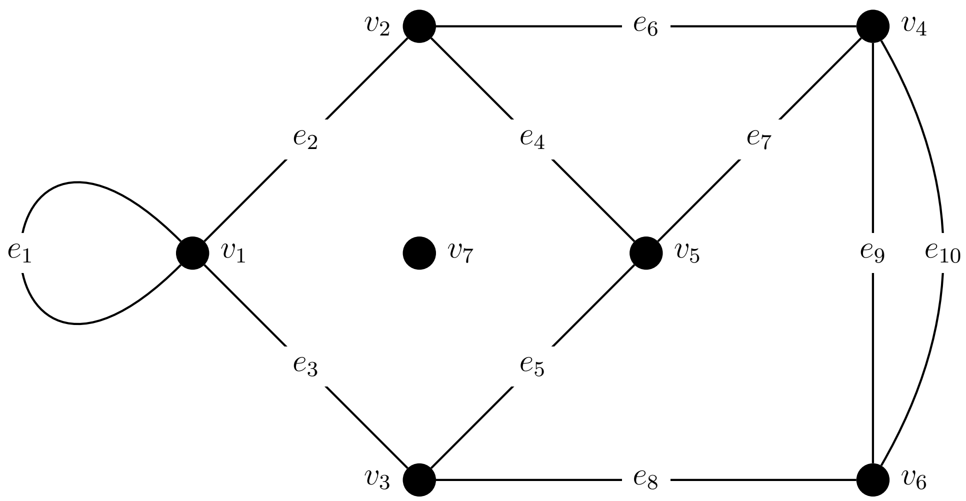
Επιπλέον, χρησιμοποιούμε την παρακάτω ορολογία:

- **Τάξη** του γραφήματος ονομάζεται το πλήθος των κορυφών του, δηλαδή το $|V|$.
- **Μέγεθος** του γραφήματος ονομάζεται το πλήθος των ακμών του, δηλαδή το $|E|$.
- Σε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα δυο ακμές που συνδέουν το ίδιο ζεύγος κορυφών λέγονται **παράλληλες**.
- Σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα δυο ακμές που συνδέουν τις ίδιες κορυφές, αλλά έχουν αντίθετη φορά **δεν θεωρούνται παράλληλες**.
- Μια ακμή που συνδέει μια κορυφή με τον εαυτό της λέγεται **ανακύκλωση** ή **βρόγχος**.
- Μια κορυφή που δεν συνδέεται με καμία άλλη λέγεται **μεμονωμένη κορυφή**.

- Ένα γράφημα που δεν έχει παράλληλες ακμές και ανακυκλώσεις λέγεται **απλό γράφημα**.
- Σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα, ο **βαθμός** μιας κορυφής $v \in V$, συμβολίζεται με $\delta(v)$ και ισούται με το πλήθος των ακμών που εφάπτονται στην κορυφή αυτή (οι ανακυκλώσεις συνεισφέρουν δύο μονάδες στο βαθμό της κορυφής που προσπίπτουν).
- Σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα διακρίνουμε δύο ειδών βαθμούς
  - **Προς τα έξω βαθμός** της κορυφής v που συμβολίζεται $\delta^+(v)$ και ισούται με το πλήθος των ακμών που ξεκινούν από την κορυφή αυτή.
  - **Προς τα έσω βαθμός** της κορυφής v που συμβολίζεται $\delta^-(v)$ και ισούται με το πλήθος των ακμών που καταλήγουν στην κορυφή αυτή.

Η παραπάνω ορολογία εξηγείται στα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 6.2. Δίνεται το μη κατευθυνόμενο γράφημα του σχήματος



Η τάξη του γραφήματος είναι

$$|V| = 7$$

ενώ το μέγεθος του είναι

$$|E| = 10$$

Η κορυφή v_7 είναι μεμονωμένη κορυφή. Η ακμή e_1 είναι ανακύκλωση, ενώ οι ακμές e_9, e_{10} είναι παράλληλες. Οι βαθμοί των κορυφών του γραφήματος είναι

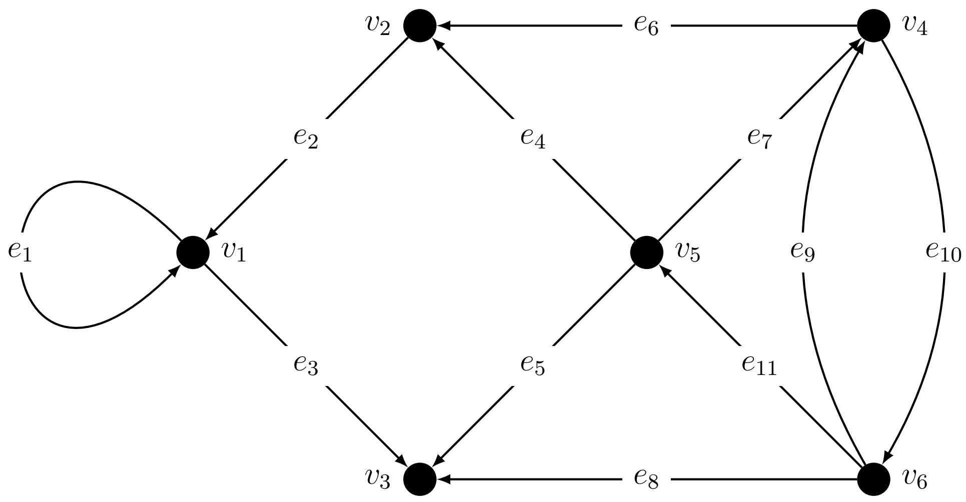
$$\delta(v_1) = \delta(v_4) = 4$$

$$\delta(v_2) = \delta(v_3) = \delta(v_5) = \delta(v_6) = 3$$

$$\delta(v_7) = 0$$

Παρατηρείστε, ότι η ανακύκλωση e_1 συνεισφέρει δύο μονάδες στο βαθμό της κορυφής v_1. Σημειώστε επίσης ότι λόγω της ύπαρξης της ανακύκλωσης, αλλά και των δύο παράλληλων ακμών το γράφημα δεν μπορεί να χαρακτηριστεί απλό. □

Παράδειγμα 6.3. Δίνεται το παρακάτω κατευθυνόμενο γράφημα



Η τάξη του γραφήματος είναι

$$|V| = 6$$

και το μέγεθος του είναι

$$|E| = 11$$

Η ακμή e_1 είναι ανακύκλωση, αλλά οι ακμές e_9, e_{10} δεν θεωρούνται παράλληλες. Οι προς τα έξω και έσω βαθμοί των κορυφών του γραφήματος είναι

$$\delta^+(v_1) = \delta^-(v_1) = 2$$

$$\delta^+(v_2) = 1, \delta^-(v_2) = 2$$
$$\delta^+(v_3) = 0, \delta^-(v_3) = 3$$
$$\delta^+(v_4) = \delta^-(v_4) = 2$$
$$\delta^+(v_5) = 3, \delta^-(v_5) = 1$$
$$\delta^+(v_6) = 3, \delta^-(v_2) = 1$$

□

Ένα ενδιαφέρον συμπέρασμα σε σχέση με τους βαθμούς των κορυφών ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος, προκύπτει από το γεγονός ότι κάθε ακμή συνεισφέρει δύο ακριβώς μονάδες στο συνολικό άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών. Η διαπίστωση αυτή είναι γνωστή στη θεωρία γραφημάτων ως λήμμα της χειραψίας.

***Λήμμα* 6.4** (Λήμμα της Χειραψίας)**.** *Το άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος είναι άρτιο και ισούται με το διπλάσιο του αριθμού των ακμών του. Δηλαδή, αν $n = |V|$, τότε*

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) = 2\,|E|$$

Άμεση συνέπεια του παραπάνω λήμματος είναι ότι πλήθος των κορυφών περιττού βαθμού σε ένα γράφημα είναι άρτιο. Αυτό μπορεί εύκολα να επιβεβαιωθεί αν λάβουμε υπόψη ότι το άθροισμα άρτιων βαθμών κορυφών είναι πάντα άρτιο, ενώ το άθροισμα ενός συνόλου περιττών ακεραίων είναι άρτιο αν και μόνο αν το πλήθος τους είναι άρτιο.

Παράδειγμα 6.5. Στο γράφημα του παραδείγματος 6.2, μπορεί εύκολα να επαληθευτεί το λήμμα της χειραψίας. Πράγματι, το άθροισμα των βαθμών των κορυφών είναι

$$\sum_{i=1}^{7} \delta(v_i) = 4 + 3 + 3 + 4 + 3 + 3 = 20$$

που είναι ίσο με το διπλάσιο του αριθμού των ακμών, δηλαδή

$$2\,|E| = 2 \cdot 10 = 20$$

Παρατηρείστε ότι στο γράφημα υπάρχει άρτιο πλήθος κορυφών που έχουν περιττό βαθμό. Για την ακρίβεια, υπάρχουν 4 κορυφές, βαθμού 3. □

Επίσης, ενδιαφέρον παρουσιάζει η παρακάτω πρόταση η οποία είναι άμεση συνέπεια της αρχής του περιστερώνα.

***Πρόταση* 6.6.** *Σε ένα απλό, μη κατευθυνόμενο γράφημα υπάρχουν τουλάχιστον δύο κορυφές που έχουν ίδιο βαθμό.*

Απόδειξη. Σε ένα απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα με n κορυφές, οι βαθμοί των κορυφών κυμαίνονται από 0 ως $n - 1$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν στο γράφημα υπάρχει μεμονωμένη κορυφή, δηλαδή κορυφή βαθμού 0, δεν μπορεί να υπάρχει κορυφή βαθμού $n - 1$. Μια κορυφή βαθμού $n - 1$ θα έπρεπε να συνδέεται μέσω ακμής με όλες τις υπόλοιπες, συμπεριλαμβανομένης και της μεμονωμένης κορυφής, όμως κάτι τέτοιο είναι άτοπο. Άρα, σε αυτή την περίπτωση, οι βαθμοί κορυφών κυμαίνονται από 0 ως $n - 2$. Όμως, δεδομένου ότι υπάρχουν n κορυφές (περιστέρια) και $n-1$ διαφορετικοί βαθμοί (περιστερώνες), σύμφωνα με την αρχή του περιστερώνα θα υπάρχουν δύο τουλάχιστον κορυφές με ίδιο βαθμό.

- Αν στο γράφημα δεν υπάρχει μεμονωμένη κορυφή, τότε οι βαθμοί των κορυφών κυμαίνονται από 1 ως $n - 1$. Άρα, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, υπάρχουν n κορυφές (περιστέρια) και $n - 1$ διαφορετικοί βαθμοί (περιστερώνες), οπότε η αρχή του περιστερώνα επιβάλλει την ύπαρξη τουλάχιστον δύο κορυφών με τον ίδιο βαθμό.

□

Παράδειγμα 6.7. Δίνονται οι παρακάτω ακολουθίες ακεραίων αριθμών:

(α) 0,1,2,3,4

(β) 2,2,2,3,4

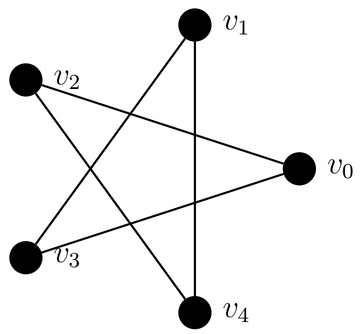
(γ) 2,2,2,2,2

Ποιες από τις παραπάνω ακολουθίες θα μπορούσαν να αντιπροσωπεύουν ακολουθίες βαθμών απλών μη κατευθυνόμενων γραφημάτων;

(α) Η ακολουθία 0,1,2,3,4, δεν μπορεί να αντιστοιχεί σε βαθμούς κορυφών απλού γραφήματος, αφού σύμφωνα με την πρόταση 6.6 σε κάθε απλό γράφημα υπάρχουν τουλάχιστον δύο κορυφές ίδιου βαθμού.

(β) Η ακολουθία 2,2,2,3,4, δεν μπορεί να αντιστοιχεί σε βαθμούς κορυφών γραφήματος, αφού δίνουν άθροισμα
$$2 + 2 + 2 + 3 + 4 = 13$$
που είναι περιττό. Σύμφωνα με το λήμμα 6.4, το άθροισμα των βαθμών των κορυφών σε ένα γράφημα είναι πάντα άρτιο.

(γ) Η ακολουθία 2,2,2,2,2, αντιστοιχεί στους βαθμούς των κορυφών του παρακάτω απλού γραφήματος



□

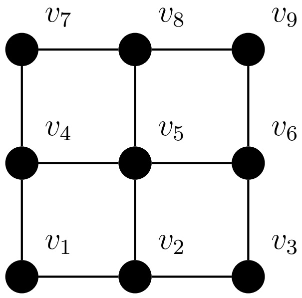
Ορισμός 6.8. Έστω ένα γράφημα $G(V, E)$. Τότε,

- Ένα σύνολο κορυφών $V_1 \subseteq V$ του λέγεται **σύνολο ανεξαρτησίας** αν μεταξύ δύο οποιονδήποτε κορυφών του δεν υπάρχει ακμή που να τις συνδέει.
- Ένα γράφημα που το σύνολο κορυφών μπορεί να χωριστεί σε δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα ανεξαρτησίας ονομάζεται **διχοτομίσιμο** ή **διμερές** (**bipartite**).

- Γενικότερα αν το σύνολο κορυφών μπορεί να χωριστεί σε k ξένα ανά δύο σύνολα ανεξαρτησίας λέγεται ***k*-μερές**.

- Ο ελάχιστος δυνατός αριθμός συνόλων ανεξαρτησίας στα οποίο μπορούμε να χωρίσουμε το σύνολο κορυφών του $G(V, E)$, ονομάζεται **χρωματικός αριθμός** του G και συμβολίζεται με $\chi(G)$.

Παράδειγμα 6.9. Έστω το γράφημα του σχήματος



Το σύνολο κορυφών $\{v_1, v_3, v_5, v_7, v_9\}$ είναι ένα σύνολο ανεξαρτησίας. Οι υπόλοιπες τέσσερις κορυφές, δηλαδή οι $\{v_2, v_4, v_6, v_8\}$, αποτελούν επίσης σύνολο ανεξαρτησίας. Τα δύο σύνολα ανεξαρτησίας είναι προφανώς ξένα μεταξύ τους και συμπληρωματικά, άρα το παραπάνω γράφημα είναι διμερές. Δηλαδή, ο χρωματικός αριθμός του γραφήματος είναι $\chi(G) = 2$. □

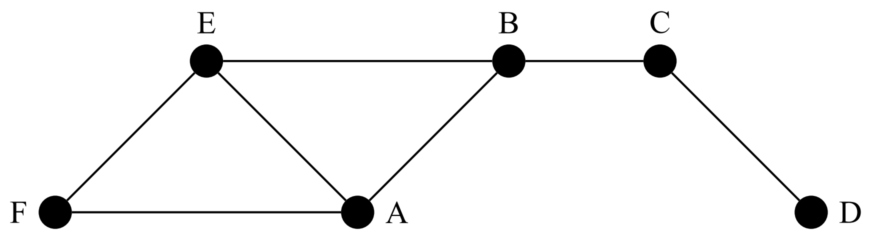
Παράδειγμα 6.10. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι χιλιομετρικές αποστάσεις μεταξύ έξι πόλεων μιας περιφέρειας:

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
A	0	90	180	200	30	100
B	90	0	100	180	90	190
C	180	100	0	100	200	320
D	200	180	100	0	300	280
E	30	90	200	300	0	50
F	100	190	320	280	50	0

Πίνακας 6.1: Αποστάσεις μεταξύ έξι πόλεων

Στην περιφέρεια υπάρχει κανονισμός που απαγορεύει σε δύο πόλεις που βρίσκονται σε χιλιομετρική απόσταση μικρότερη των 150 χιλιομέτρων να έχουν ταξί ίδιου χρώματος. Να υπολογιστεί ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων για τα ταξί των έξι πόλεων, ώστε να μην παραβιάζεται ο κανονισμός για τα χρώματα.

Σχεδιάζουμε ένα γράφημα όπου κάθε πόλη αντιπροσωπεύεται από μία κορυφή, ενώ δύο πόλεις (κορυφές) συνδέονται μεταξύ τους με ακμή μόνο αν η χιλιομετρική απόσταση μεταξύ τους είναι μικρότερη των 150 χιλιομέτρων:



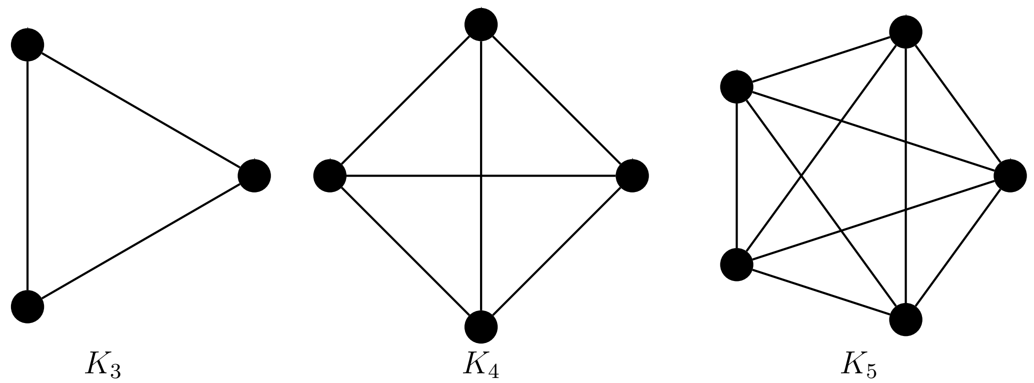
Σχήμα 6.1: Γράφημα των έξι πόλεων

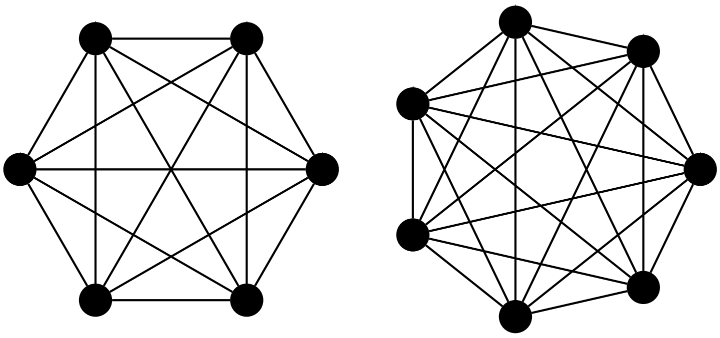
Για να λύσουμε το πρόβλημα αρκεί να διαμερίσουμε το σύνολο κορυφών του γραφήματος, στον ελάχιστο δυνατό αριθμό συνόλων ανεξαρτησίας. Αυτά δεν μπορεί να είναι λιγότερα από 3, αφού μεταξύ των κορυφών A, E, B υπάρχουν όλες οι δυνατές συνδέσεις και επομένως κάθε μία από αυτές θα πρέπει να ανήκει σε διαφορετικά σύνολα ανεξαρτησίας. Τα σύνολα $\{A, C\}$, $\{D, E\}$, $\{B, F\}$ αποτελούν σύνολα ανεξαρτησίας, επομένως αν για κάθε σύνολο χρησιμοποιηθεί το ίδιο χρώμα ταξί, υπάρχει συμμόρφωση με τον κανονισμό της πολιτείας.

Επομένως, ο ελάχιστος αριθμός διαφορετικών χρωμάτων για τα ταξί των έξι πόλεων είναι τρία. Ο αριθμός αυτός δεν είναι άλλος από τον χρωματικό αριθμό του γραφήματος, δηλαδή $\chi(G) = 3$. □

Ορισμός 6.11. Πλήρες γράφημα ή **κλίκα** K_n, ονομάζεται ένα απλό γράφημα με n κορυφές του οποίου κάθε κορυφή συνδέεται με όλες τις υπόλοιπες.

Παράδειγμα 6.12. Στο παρακάτω σχήμα εμφανίζονται τα γραφήματα K_n, για $n = 3, 4, 5, 6, 7$.





K_6 K_7

□

Το K_n περιέχει προφανώς το μέγιστο δυνατό αριθμό ακμών μεταξύ των απλών γραφημάτων με n κορυφές. Όλες οι κορυφές του K_n έχουν βαθμό $n-1$, οπότε το άθροισμα των βαθμών των κορυφών θα είναι

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) = n(n-1).$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω άθροισμα στο λήμμα της χειραψίας παίρνουμε

$$n(n-1) = 2\,|E|\,,$$

οπότε το πλήθος των ακμών του K_n είναι

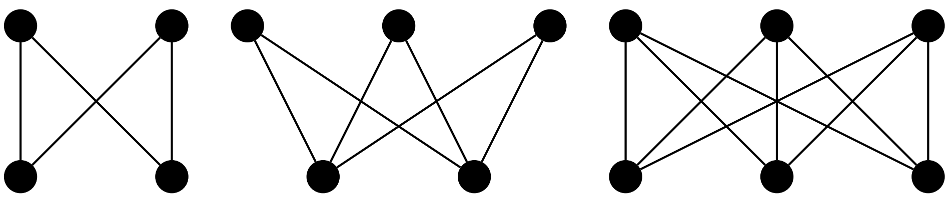
$$|E| = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Είναι εύκολο να επιβεβαιωθεί ότι ο χρωματικός αριθμός του πλήρους γραφήματος με n κορυφές είναι ίσος με το πλήθος τους. Δηλαδή,

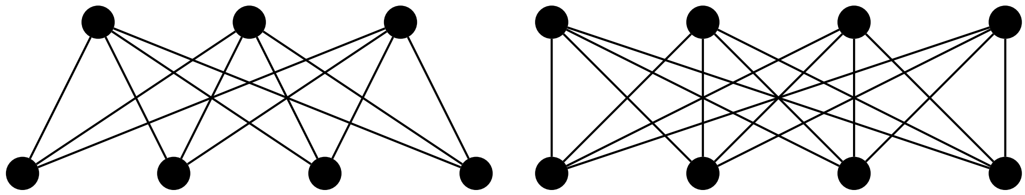
$$\chi(K_n) = n.$$

Ορισμός 6.13. Πλήρες διμερές γράφημα $K_{m,n}$, ονομάζεται το απλό διμερές γράφημα που το σύνολο κορυφών του αποτελείται από δύο σύνολα ανεξαρτησίας με m και n κορυφές αντίστοιχα και κάθε κορυφή συνδέεται με όλες τις υπόλοιπες κορυφές εκτός του συνόλου ανεξαρτησίας της.

Παράδειγμα 6.14. Στο παρακάτω σχήμα εμφανίζονται τα γραφήματα $K_{2,2}$, $K_{2,3}$, $K_{3,3}$, $K_{4,3}$ και $K_{4,4}$.



$K_{2,2}$ $K_{2,3}$ $K_{3,3}$



$K_{4,3}$ $K_{4,4}$

□

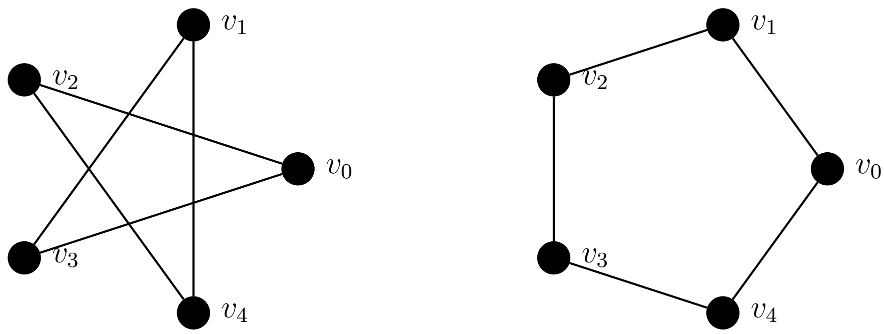
Εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι το πλήθος των ακμών του $K_{m,n}$ είναι

$$|E| = m \cdot n$$

Πράγματι, εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι όλες οι κορυφές που ανήκουν στο σύνολο ανεξαρτησίας με τις m κορυφές, έχουν βαθμό n αφού συνδέονται με όλες τις κορυφές του δεύτερου συνόλου ανεξαρτησίας που αποτελείται από n κορυφές. Άρα, συνολικά υπάρχουν $m \cdot n$ ακμές.

Ορισμός 6.15. **Συμπληρωματικό** ενός γραφήματος G, που συμβολίζεται $\overline{G}$, ονομάζεται το γράφημα που αποτελείται από το ίδιο σύνολο κορυφών με το G και ακμές μεταξύ όλων των κορυφών που δεν είναι γειτονικές στο G.

Παράδειγμα 6.16. Τα δύο παρακάτω γραφήματα είναι συμπληρωματικά.



G $\overline{G}$

□

Αν $G(V, E)$ είναι ένα απλό γράφημα και $\overline{G}(V, E')$ το συμπληρωματικό του, τότε

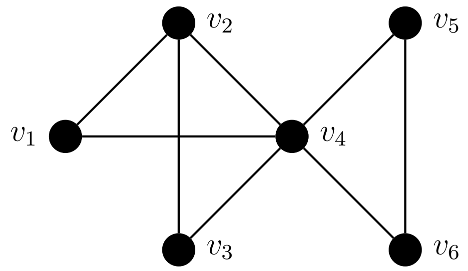
$$|E| + |E'| = \frac{n(n-1)}{2},$$

όπου $n = |V|$. Δηλαδή, το συνολικό πλήθος πλήθος ακμών ενός γραφήματος και του συμπληρωματικού του ισούται με το πλήθος του πλήρους γραφήματος με n κορυφές.

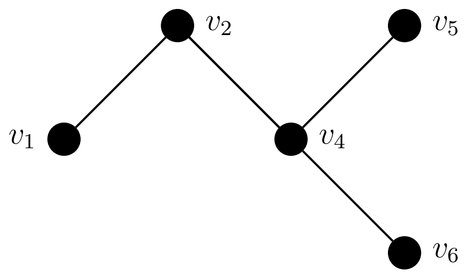
Ορισμός 6.17. Ένα γράφημα $G'(V', E')$ ονομάζεται **υπογράφημα** του γραφήματος $G(V, E)$, αν $V' \subseteq V$ και $E' \subseteq E$ υπό την προϋπόθεση ότι το E' περιέχει ακμές που συνδέουν κορυφές του V'.

Ορισμός 6.18. Επαγόμενο Υπογράφημα ενός γραφήματος $G(V, E)$, ονομάζεται ένα υπογράφημα του G με σύνολο κορυφών $V' \subseteq V$, το οποίο περιέχει όλες τις ακμές του E οι οποίες προσπίπτουν σε κορυφές του V'.

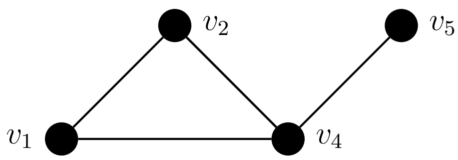
Παράδειγμα 6.19. Δίνονται τα γραφήματα



G_1



G_2



G_3

Τα G_2 και G_3 είναι υπογραφήματα του G_1. Ειδικότερα, το γράφημα G_3 είναι επαγόμενο υπογράφημα του G_1 ενώ το G_2 όχι. □

6.2 Παράσταση γραφημάτων με πίνακες

Ένας τρόπος περιγραφής ενός δεδομένου γραφήματος, είναι με τη χρήση κατάλληλων πινάκων οι οποίοι περιγράφουν τις κορυφές και τις ακμές του γραφήματος μέσω των στοιχείων τους. Οι δύο πιο συχνά χρησιμοποιούμενες μορφές πινάκων που εμφανίζονται στη σχετική βιβλιογραφία περιγράφονται παρακάτω.

Αν $G(V, E)$ είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα, με $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, τότε ένας **πίνακας γειτνίασης** (adjacency matrix) του G, είναι ένα τετράγωνος πίνακας $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, του οποίου το στοιχείο a_{ij} εκφράζει το πλήθος των κατευθυνόμενων ακμών από την κορυφή v_i προς την v_j. Στην περίπτωση που το γράφημα είναι μη κατευθυνόμενο, τότε το στοιχείο a_{ij}, εκφράζει το πλήθος των ακμών μεταξύ των v_i, v_j. Σημειώνεται ότι κάθε ανακύκλωση σε μη κατευθυνόμενο γράφημα συνεισφέρει δυο μονάδες στο αντίστοιχο στοιχείο της κύριας διαγωνίου του πίνακα γειτνίασης.

Στην περίπτωση του μη κατευθυνόμενου γραφήματος ο πίνακας γειτνίασης, A, είναι συμμετρικός, δηλαδή ισχύει $A^T = A$, αφού προφανώς $a_{ij} = a_{ji}$, για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Επιπλέον, είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι αν το γράφημα είναι απλό, τότε τα στοιχεία της κύρια διαγωνίου του είναι μηδενικά, δηλαδή $a_{ii} = 0$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, αφού δεν υπάρχουν ανακυκλώσεις, ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία εκτός της κύριας διαγωνίου παίρνουν τις τιμές 0 ή 1, αφού δεν υπάρχουν παράλληλες ακμές.

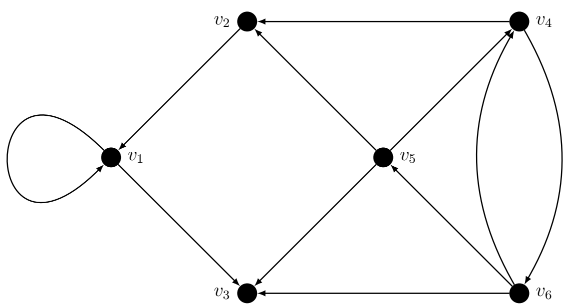
Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι ο πίνακας γειτνίασης ενός κατευθυνόμενου ή μη γραφήματος δεν είναι μοναδικός, καθώς η τοποθέτηση των στοιχείων εξαρτάται από τη θεωρούμενη σειρά των κορυφών του. Παρόλα αυτά, οι πίνακες γειτνίασης που προκύπτουν από τις $n!$ δυνατές διατάξεις των κορυφών του γραφήματος, είναι μεταξύ τους αντιμεταθετικά όμοιοι (permutation similar). Δηλαδή, αν A_1, A_2 είναι δύο πίνακες γειτνίασης που αντιστοιχούν στο ίδιο γράφημα, τότε υπάρχει ένας πίνακας αντιμετάθεσης P, έτσι ώστε

$$A_2 = PA_1P^{-1}.$$

Ο πίνακας αντιμετάθεσης P, είναι ένας πίνακας που προκύπτει από αντιμεταθέσεις γραμμών ή στηλών του αντίστοιχου μοναδιαίου πίνακα. Ο πολλαπλασιασμός από αριστερά ενός τυχαίου πίνακα A, με ένα πίνακα αντιμετάθεσης P που έχει προέλθει από συγκεκριμένες αντιμεταθέσεις των γραμμών του μοναδιαίου πίνακα, έχει ως αποτέλεσμα οι ίδιες αντιμεταθέσεις να εφαρμοστούν στις γραμμές του A. Με αντίστοιχο τρόπο προκύπτουν αντιμεταθέσεις των στηλών του A, όταν αυτός πολλαπλασιάζεται από αριστερά με ένα πίνακα αντιμετάθεσης P. Επιπλέον, εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι κάθε πίνακας αντιμετάθεσης P είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα ο αντίστροφος είναι ο ανάστροφος του, δηλαδή $P^{-1} = P^T$.

Οι βαθμοί των κορυφών προκύπτουν εύκολα από τον πίνακα γειτνίασης. Σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα ο προς τα έξω βαθμός μια κορυφής, προκύπτει από το άθροισμα των στοιχείων της αντίστοιχης γραμμής του πίνακα γειτνίασης, ενώ ο έσω βαθμός από το άθροισμα των στοιχείων της αντίστοιχης στήλης. Σε μη κατευθυνόμενα γραφήματα, ο βαθμός μιας κορυφής προκύπτει από το άθροισμα των στοιχείων είτε της γραμμής, είτε της στήλης που αντιστοιχεί στην κορυφή.

Παράδειγμα 6.20. Έστω το κατευθυνόμενο γράφημα του σχήματος



Θεωρώντας τη σειρά των κορυφών σύμφωνα με την αρίθμηση τους, δηλαδή $v_1, v_2, \ldots v_6$, ο πίνακας γειτνίασης που προκύπτει είναι

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Αθροίζοντας κατά γραμμές τα στοιχεία του παραπάνω πίνακα προκύπτουν οι προς τα έξω βαθμοί των κορυφών του γραφήματος, οι οποίοι είναι

$$\begin{array}{lll} \delta^+(v_1) = 2, & \delta^+(v_2) = 1, & \delta^+(v_3) = 0, \\ \delta^+(v_4) = 2, & \delta^+(v_5) = 3, & \delta^+(v_6) = 3. \end{array}$$

Αντίστοιχα οι προς τα έσω βαθμοί των κορυφών προκύπτουν από την κατά στήλες άθροιση των στοιχείων του πίνακα:

$$\begin{array}{lll} \delta^-(v_1) = 2, & \delta^-(v_2) = 2, & \delta^-(v_3) = 3, \\ \delta^-(v_4) = 2, & \delta^-(v_5) = 1, & \delta^-(v_6) = 1. \end{array}$$

Αν θεωρήσουμε μια διαφορετική σειρά κορυφών, όπως για παράδειγμα την $v_{2,}v_1, v_6, v_3, v_5, v_4$, ο πίνακας γειτνίασης που προκύπτει είναι

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Προφανώς, οι δύο παραπάνω πίνακες γειτνίασης δεν είναι ίσοι, είμαι όμως αντιμεταθετικά όμοιοι. Πράγματι, αν θεωρήσουμε τον πίνακα μετάθεσης

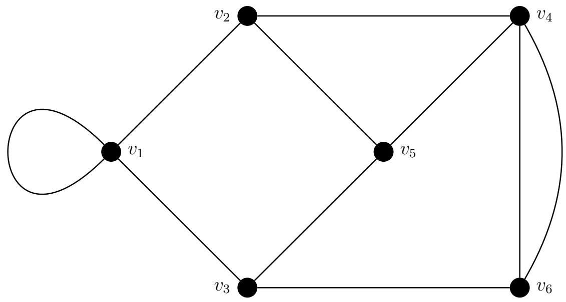
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ο οποίος προκύπτει από την αντιμετάθεση των γραμμών του μοναδιαίου πίνακα I_6, στην ακόλουθη σειρά 2η, 1η, 6η, 3η , 5η, 4η, τότε μπορεί να επιβεβαιωθεί ότι

$$A_2 = PA_1P^{-1}.$$

□

Παράδειγμα 6.21. Έστω το μη κατευθυνόμενο γράφημα του σχήματος



Θεωρώντας τη σειρά των κορυφών σύμφωνα με την αρίθμηση τους, δηλαδή $v_1, v_2, \ldots v_6$, ο πίνακας γειτνίασης που προκύπτει είναι

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

οπότε αθροίζοντας κατά γραμμές ή στήλες οι βαθμοί των κορυφών είναι

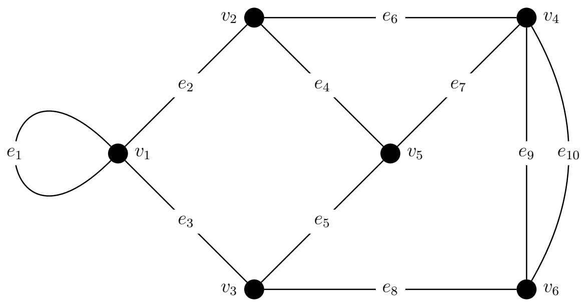
$$\begin{aligned} &\delta(v_1) = 4, && \delta(v_2) = 3, && \delta(v_3) = 3, \\ &\delta(v_4) = 4, && \delta(v_5) = 3, && \delta(v_6) = 3. \end{aligned}$$

Παρατηρείστε επίσης ότι εξαιτίας του ότι το γράφημα δεν είναι κατευθυνόμενο, ο πίνακας A είναι συμμετρικός, δηλαδή ισχύει $A^T = A$. □

Μια δεύτερη μορφή πίνακα που χρησιμοποιείται σε κάποιες εφαρμογές για την παράσταση γραφημάτων είναι ο **πίνακας πρόσπτωσης** (incidence matrix). Οι γραμμές του πίνακα πρόσπτωσης αντιστοιχούν στις κορυφές του γραφήματος, ενώ οι στήλες παριστάνουν τις ακμές του. Για την κατασκευή του πίνακα πρόσπτωσης σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα με n κορυφές και m ακμές, αφού επιλέξουμε μια διάταξη τους $v_1, v_2, \ldots, v_n$ και $e_1, e_2, \ldots, e_m$, κατασκευάζουμε έναν $n \times m$ πίνακα, $B = [b_{ij}]_{n\times m}$ και θέτουμε $b_{ij} = 1$, αν η ακμή e_j προσπίπτει στην κορυφή v_i. Διαφορετικά, θέτουμε $b_{ij} = 0$. Στα κατευθυνόμενα γραφήματα, η διαφοροποίηση που συνήθως εφαρμόζεται είναι ότι θέτουμε $b_{ij} = 1$, αν η ακμή e_j καταλήγει στην κορυφή v_i, ενώ θέτουμε $b_{ij} = -1$ όταν η e_j ξεκινάει από την v_i.

Από την παραπάνω περιγραφή, είναι προφανές ότι ο πίνακας πρόσπτωσης δεν είναι μοναδικός, αφού η ακριβής τοποθέτηση των μη μηδενικών του στοιχείων, εξαρτάται από τη θεωρούμενη διάταξη κορυφών και ακμών. Οι βαθμοί των κορυφών ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος προκύπτουν από την άθροιση των στοιχείων της αντίστοιχης γραμμής του πίνακα πρόσπτωσης. Στην περίπτωση των κατευθυνόμενων γραφημάτων, οι έσω και έξω βαθμοί των κορυφών προκύπτουν από την άθροιση των θετικών και αρνητικών στοιχείων της αντίστοιχης γραμμής.

Παράδειγμα 6.22. Δίνεται το μη κατευθυνόμενο γράφημα του σχήματος



Αν θεωρήσουμε ότι τόσο οι κορυφές όσο και οι ακμές του παραπάνω γραφήματος διατάσσονται σύμφωνα με την αρίθμηση τους, παίρνουμε τον παρακάτω πίνακα πρόσπτωσης

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
v_1	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0
v_2	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
v_3	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
v_4	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1
v_5	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
v_6	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1

οπότε ο πίνακας πρόσπτωσης είναι

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

6.3 Διαδρομές - Μονοπάτια - Κύκλοι

Πολύ σημαντικές είναι οι παρακάτω έννοιες που σχετίζονται με τη δυνατότητα να επισκεφτούμε μια σειρά από κορυφές, ξεκινώντας από κάποια αρχική κορυφή, ακολουθώντας μια ακολουθία διαδοχικών ακμών.

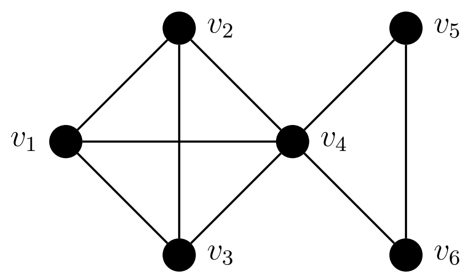
- **Διαδρομή μήκους** k, ονομάζεται μια ακολουθία $k+1$ κορυφών και k ακμών της μορφής

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k),$$

όπου $e_i = (v_{i-1}, v_i)$. Στην περίπτωση που το γράφημα είναι απλό, για την περιγραφή μιας διαδρομής, αρκεί να αναφέρουμε μόνο την ακολουθία των $k+1$ διαδοχικών κορυφών που την αποτελεί. Σημειώστε ότι ο ορισμός της διαδρομής δεν εμπεριέχει κανένα περιορισμό ως προς τη μη επανάληψη κορυφών ή ακμών. Το μήκος της διαδρομής ελάχιστου μήκους που ξεκινάει από την κορυφή v και καταλήγει στην κορυφή w, ονομάζεται **απόσταση** (distance) των κορυφών v, w και συμβολίζεται με $d(v, w)$. Σημειώστε ότι στα κατευθυνόμενα γραφήματα οι αποστάσεις $d(v, w)$ και $d(w, v)$, δεν είναι απαραίτητα ίσες.

- **Μονοκονδυλιά** ονομάζεται μια διαδρομή χωρίς επαναλαμβανόμενες ακμές (είναι όμως επιτρεπτή η επανάληψη κορυφών).
- **Μονοπάτι** είναι μια διαδρομή χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές (και φυσικά χωρίς επαναλαμβανόμενες ακμές).
- **Κλειστή διαδρομή** είναι μια διαδρομή της οποίας η πρώτη και η τελευταία κορυφή ταυτίζονται.
- **Κύκλος** ονομάζεται μια κλειστή μονοκονδυλιά, δηλαδή μια κλειστή διαδρομή χωρίς επαναλαμβανόμενες ακμές (επιτρέπεται επανάληψη κορυφών). Το πλήθος των ακμών που αποτελούν τον κύκλο ονομάζεται **μήκος του κύκλου**.
- **Απλός κύκλος** είναι μια κλειστή διαδρομή χωρίς επανάληψη κορυφών, εκτός της αρχικής και της τελικής που ταυτίζονται.

Παράδειγμα 6.23. Δίνεται το γράφημα



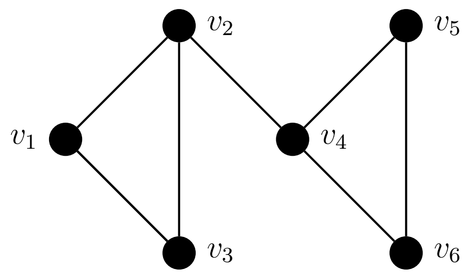
- Η ακολουθία κορυφών $(v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_4, v_2, v_3)$ είναι μια διαδρομή. Παρατηρείστε ότι επισκεφθήκαμε δύο φορές τις κορυφές v_2 και v_4, όπως επίσης ότι χρησιμοποιήσαμε την ακμή (v_2, v_4) δύο φορές. Άρα, η διαδρομή αυτή δεν είναι ούτε μονοκονδυλιά, ούτε μονοπάτι.
- Η ακολουθία $(v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_4, v_3)$ είναι μονοκονδυλιά, αφού δεν υπάρχουν επαναλήψεις ακμών, όμως δεν είναι μονοπάτι, αφού επισκεφθήκαμε την κορυφή v_4 δύο φορές.
- Η ακολουθία $(v_1, v_2, v_4, v_5, v_6)$ είναι μονοπάτι, αφού δεν υπάρχουν επαναλήψεις κορυφών.

- Η ακολουθία $(v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_4, v_3, v_1)$ είναι κύκλος, όμως δεν είναι απλός κύκλος εξαιτίας της επανάληψης της κορυφής v_4.
- Τέλος, η ακολουθία κορυφών $(v_1, v_2, v_4, v_3, v_1)$ είναι απλός κύκλος, αφού δεν υπάρχουν επαναλήψεις κορυφών.

$\square$

Τα στοιχεία των θετικών ακέραιων δυνάμεων του πίνακα γειτνίασης ενός κατευθυνόμενου ή μη γραφήματος, έχουν μια ενδιαφέρουσα ερμηνεία. Αν $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ είναι ένας πίνακας γειτνίασης του γραφήματος $G(V, E)$, τότε το στοιχείο στη θέση (i, j), $i \neq j$, του πίνακα A^k, για $k \in \mathbb{N}$ δίνει το πλήθος των διαδρομών μήκους k (κατευθυνόμενων ή μη), από την κορυφή v_i, προς την κορυφή v_j. Αν k είναι ο ελάχιστος μη αρνητικός ακέραιος, για τον οποίο το στοιχείο στη θέση (i, j) του A^k είναι μη μηδενικό, τότε το k είναι δίνει την απόσταση των κορυφών v_i, v_j.

Παράδειγμα 6.24. Έστω το μη κατευθυνόμενο γράφημα



του οποίου ο πίνακας γειτνίασης (θεωρώντας διάταξη κορυφών σύμφωνα με την αρίθμηση τους) είναι

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Υπολογίζοντας τη δεύτερη και τρίτη δύναμη του A, παίρνουμε

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Τα μη διαγώνια στοιχεία των πινάκων A^2 και A^3 δίνουν τα πλήθη των διαδρομών μήκους 2 και 3 αντίστοιχα μεταξύ δύο κορυφών. Για παράδειγμα, από το στοιχείο στη θέση $(2,5)$ του πίνακα A^2, προκύπτει ότι υπάρχει μόνο μια διαδρομή μήκους 2, από την κορυφή v_2, προς τη v_5, η οποία είναι η (v_2, v_4, v_5). Ομοίως, από το στοιχείο στη θέση $(1,2)$ του πίνακα A^3, φαίνεται ότι υπάρχουν τέσσερις διαδρομές μήκους 3, από την v_1 προς τη v_2. Πράγματι, οι τέσσερις αυτές διαδρομές είναι (v_1, v_2, v_3, v_2), (v_1, v_2, v_4, v_2), (v_1, v_2, v_1, v_2) και (v_1, v_3, v_1, v_2).

Επιπλέον, συγκρίνοντας τα αντίστοιχα στοιχεία των A, A^2, A^3, μπορούμε να συμπεράνουμε τις αποστάσεις μεταξύ των μη γειτονικών κορυφών του γραφήματος. Έτσι,

$$d(v_1, v_3) = d(v_2, v_5) = d(v_2, v_6) = d(v_3, v_4) = 2,$$

αφού τα στοιχεία στις θέσεις $(1,3)$, $(2,5)$, $(2,6)$ και $(3,4)$ είναι μηδενικά στον πίνακα A και μη μηδενικά στον πίνακα A^2. Αντίστοιχα,

$$d(v_1, v_5) = d(v_1, v_6) = d(v_3, v_5) = d(v_3, v_6) = 3,$$

επειδή τα στοιχεία στις θέσεις $(1,5)$, $(1,6)$, $(3,5)$ και $(3,6)$ είναι μηδενικά στον πίνακα A^2 και μη μηδενικά στον πίνακα A^3. □

Η ύπαρξη διαδρομής που συνδέει δύο οποιεσδήποτε κορυφές ενός γραφήματος, έχει άμεση σχέση με την έννοια της συνδεσιμότητας του γραφήματος.

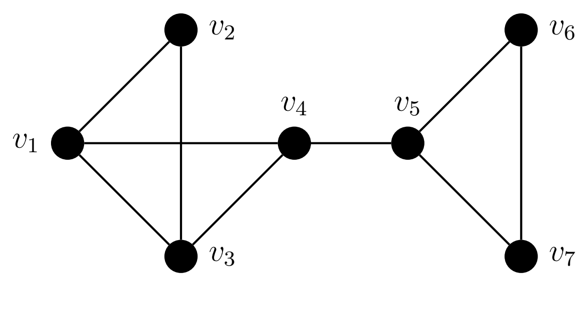
Ορισμός 6.25. Ένα γράφημα $G(V, E)$ λέγεται **συνδεδεμένο** ή **συνεκτικό**, αν για κάθε ζεύγος κορυφών $v, u \in V$ υπάρχει διαδρομή με άκρα τις κορυφές v και u. Επιπλέον, κάθε μη συνδεδεμένο γράφημα αποτελείται από δύο ή περισσότερα υπογραφήματα τα οποία είναι συνδεδεμένα και ονομάζονται **συνεκτικές συνιστώσες**.

Επίσης, ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι παρακάτω ορισμοί:

- Μια ακμή ονομάζεται **ακμή τομής** ή **γέφυρα** αν η αφαίρεση της αυξάνει το αριθμό των συνεκτικών συνιστωσών του γραφήματος. Μια ακμή είναι ακμή τομής αν και μονό αν δεν συμμετέχει σε κανένα κύκλο του γραφήματος.

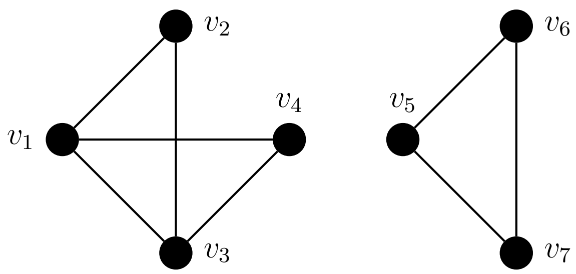
- Μια κορυφή ονομάζεται **κορυφή τομής** ή **σημείο άρθρωσης** αν η αφαίρεση της αυξάνει το αριθμό των συνεκτικών συνιστωσών του γραφήματος.

Παράδειγμα 6.26. Το γράφημα

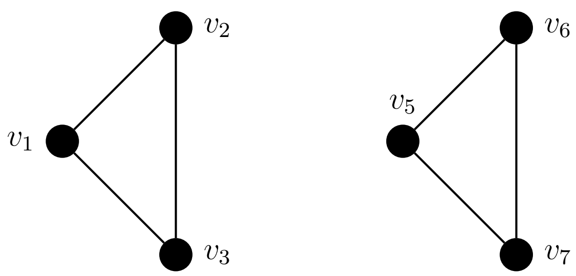


είναι συνδεδεμένο, αφού μπορούμε μεταξύ δύο οποιονδήποτε κορυφών του να βρούμε μια διαδρομή που τις συνδέει.

Η (v_4, v_5) είναι ακμή τομής, αφού η αφαίρεση της αυξάνει τον αριθμό των συνεκτικών συνιστωσών, από μια, σε δύο, καθιστώντας το γράφημα μη συνεκτικό. Το μη συνεκτικό γράφημα που προκύπτει μετά την αφαίρεση της ακμής (v_4, v_5) είναι



Αντίστοιχα, η κορυφή v_4 είναι κορυφή τομής. Μια πιθανή διαγραφή της κορυφής v_4, μαζί με τις ακμές που προσπίπτουν σε αυτή, δίνει το μη συνεκτικό γράφημα



□

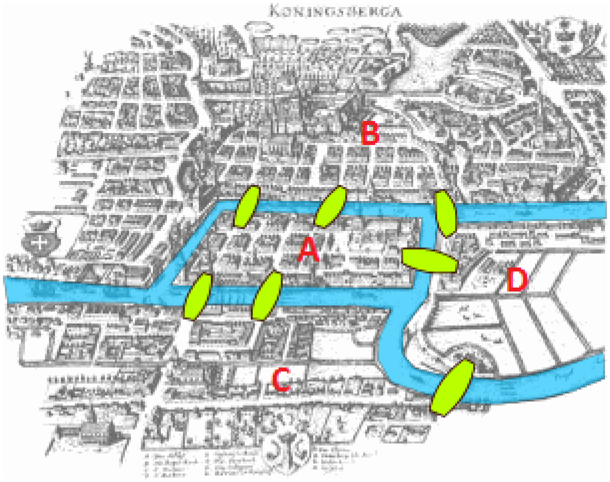
Αξίζει να αναφερθεί ότι τα διμερή ή διχοτομίσιμα γραφήματα που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα χαρακτηρίζονται από την παρακάτω ιδιότητα, η οποία σχετίζεται με την ύπαρξη μιας ειδικής κατηγορίας κύκλων. Συγκεκριμένα:

***Θεώρημα* 6.27.** *Ένα γράφημα $G(V, E)$, είναι διχοτομίσιμο αν και μόνο αν δεν περιέχει κύκλους περιττού μήκους.*

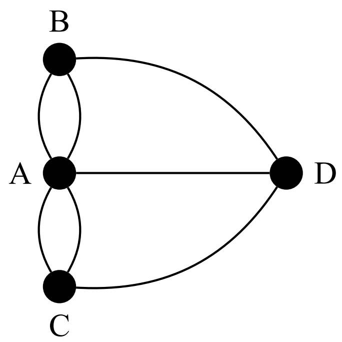
Το θεώρημα αυτό επιτρέπει την ανίχνευση της δυνατότητας διχοτόμησης ενός γραφήματος. Στο γράφημα του παραδείγματος 6.9 μπορεί να διαπιστωθεί αρκετά εύκολα ότι δεν υπάρχει κύκλος περιττού μήκους, άρα το γράφημα είναι διχοτομίσιμο. Αντίθετα, στο γράφημα του παραδείγματος 6.10, η παρουσία του τριγώνου EAF ή του ABE, αποκλείει τη δυνατότητα διχοτόμησης του γραφήματος. Άρα, ο χρωματικός αριθμός του γραφήματος στο παράδειγμα 6.10, είναι τουλάχιστον 3.

6.3.1 Κύκλοι Euler

Οι επτά γέφυρες του Königsberg είναι ένα γνωστό ιστορικό πρόβλημα στα μαθηματικά. Η αρνητική απάντηση στο πρόβλημα από τον Leonhard Euler το 1735, έθεσε τις βάσεις για τη θεωρία γραφημάτων. Το ερώτημα που τίθεται είναι κατά πόσο μπορεί κανείς ξεκινώντας από ένα σημείο στην όχθη του ποταμού, να περπατήσει κατά μήκος και των επτά γεφυρών ακριβώς μια φορά την κάθε μια και να επιστρέψει στο σημείο από όπου ξεκίνησε. Η απεικόνιση της πόλης του Königsberg εμφανίζεται στο παρακάτω σχήμα



Σε μια πιο αφηρημένη μορφή το πρόβλημα της διάσχισης των γεφυρών παριστάνεται από το παρακάτω γράφημα



Τα τέσσερα κομμάτια στεριάς παριστάνονται με κορυφές του γραφήματος, ενώ οι επτά γέφυρες αντιστοιχούν στις ακμές του γραφήματος. Το πρόβλημα της διάσχισης των επτά γεφυρών του Königsberg, αποτελεί ουσιαστικά ειδική περίπτωση του γενικότερου προβλήματος της ύπαρξης κύκλου Euler σε ένα δεδομένο γράφημα, ο οποίος ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 6.28. Ένας κύκλος **Euler** είναι ένας κύκλος που διατρέχει όλες τις ακμές του γραφήματος ακριβώς μια φόρα και όλες τις κορυφές του γραφήματος μια ή περισσότερες φορές.

Η ύπαρξη ή μη κύκλου Euler μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί χάρη στο παρακάτω θεώρημα:

***Θεώρημα* 6.29.** *Ένα συνδεδεμένο, μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$, περιέχει κύκλο Euler, αν και μόνο αν οι βαθμοί όλων των κορυφών είναι άρτιοι.*

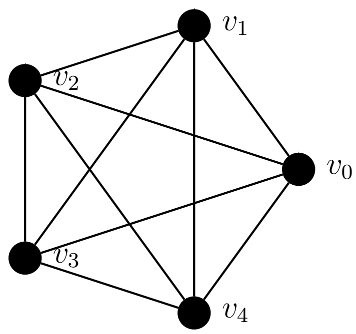
Για να ελέγξουμε κατά πόσο ένα γράφημα έχει κύκλο Euler ή όχι, αρκεί να εξετάσουμε τους βαθμούς όλων των κορυφών του. Αν όλοι οι βαθμοί κορυφών είναι άρτιοι, τότε το γράφημα έχει κύκλο Euler, τον οποίο μπορούμε συνήθως εύκολα να εντοπίσουμε. Αν στο γράφημα υπάρχει τουλάχιστον μια κορυφή περιττού βαθμού, τότε σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα δεν υπάρχει κύκλος Euler.

Παράδειγμα 6.30. Η απάντηση στο πρόβλημα της διάσχισης των επτά γεφυρών του Königsberg είναι αρνητική. Όπως μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί από το γράφημα που αντιστοιχεί στη δομή των γεφυρών, οι βαθμοί των κορυφών είναι

$$\delta(A) = 5, \delta(B) = \delta(C) = \delta(D) = 3$$

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα εφόσον οι βαθμοί των κορυφών δεν είναι άρτιοι, το γράφημα δεν έχει κύκλο Euler. □

Παράδειγμα 6.31. Στο γράφημα K_5



όλες οι κορυφές έχουν βαθμό 4, δηλαδή άρτιο, άρα στο γράφημα υπάρχει κύκλος Euler. Ένας τρόπος, να διασχίσει κανείς όλες τις ακμές του K_5, ξεκινώντας από την κορυφή v_0 και καταλήγοντας στην ίδια, είναι να επισκεφτούμε διαδοχικά τις κορυφές

$$(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_0, v_2, v_4, v_1, v_3, v_0)$$

Παρατηρείστε ότι ο παραπάνω κύκλος δεν είναι απλός και επιπλέον δεν είναι ο μοναδικός κύκλος Euler στο γράφημα. □

Γενικότερα, μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι:

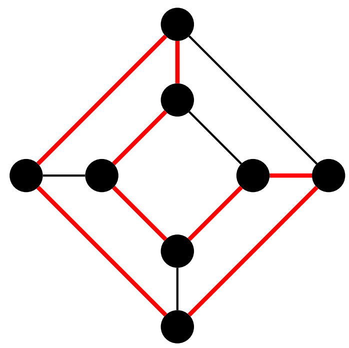
- Το πλήρες γράφημα K_n έχει κύκλο Euler, αν και μόνο αν το n είναι περιττό.
- Το πλήρες διμερές γράφημα $K_{m,n}$ έχει κύκλο Euler, αν και μόνο αν τα m, n είναι άρτια.

6.3.2 Κύκλοι Hamilton

Ένα δεύτερο σημαντικό είδος κύκλου που μπορεί να αναζητηθεί σε ένα συνδεδεμένο γράφημα και συνδέεται με πολλές πρακτικές εφαρμογές, είναι ο κύκλος Hamilton, ο οποίος ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 6.32. Ένας **κύκλος Hamilton** σε ένα γράφημα $G(V, E)$ είναι ένας απλός κύκλος που περιέχει όλες τις κορυφές του γραφήματος ακριβώς μια φορά.

Παράδειγμα 6.33. Το παρακάτω γράφημα έχει κύκλο Hamilton ο οποίος απεικονίζεται με κόκκινες ακμές:



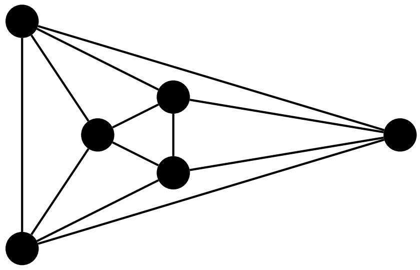
Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι ο παραπάνω κύκλος Hamilton δεν είναι μοναδικός. □

Προφανώς για να υπάρχει κύκλος Hamilton σε ένα δεδομένο γράφημα, πρέπει αυτό να είναι συνδεδεμένο. Επιπλέον, αν υπάρχει κύκλος Hamilton σε ένα γράφημα δεν είναι απαραίτητο ότι αυτός θα είναι μοναδικός.

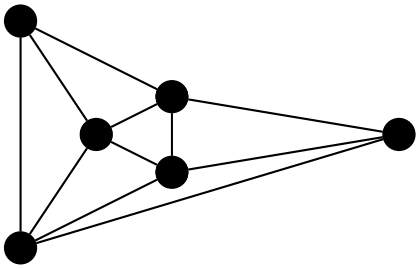
Γενικότερα, η διαπίστωση της ύπαρξης ή μη κύκλου Hamilton σε ένα γράφημα δεν είναι πάντα εύκολη υπόθεση. Αντίθετα με ότι συναντήσαμε στο αντίστοιχο ερώτημα για τους κύκλους Euler, δεν υπάρχει γνωστή ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ή μη κύκλου Hamilton. Παρόλα αυτά υπάρχουν κάποια αποτελέσματα που λειτουργούν ως ικανές συνθήκες για την ύπαρξη κύκλου Hamilton (βλέπε θεωρήματα Ore και Dirac παρακάτω). Η γενική ιδέα είναι ότι όσο πιο πολλές ακμές περιέχει ένα απλό γράφημα τόσο πιο εύκολο είναι να κατασκευαστεί ένα κύκλος Hamilton.

Για να δείξουμε ότι ένα γράφημα έχει κύκλο Hamilton, αρκεί να τον εντοπίσουμε ή να δείξουμε ότι κάποια από τις ικανές συνθήκες που δίνονται παρακάτω (θεωρήματα Ore και Dirac) ισχύουν. Μια τεχνική για να εντοπίσουμε ένα κύκλο Hamilton σε ένα δεδομένο γράφημα, είναι να δοκιμάσουμε να αφαιρέσουμε σταδιακά ακμές από το γράφημα, μέχρις ότου όλες οι κορυφές του γραφήματος να αποκτήσουν βαθμό 2, διατηρώντας παράλληλα την συνδεσιμότητα του γραφήματος. Αν αυτό είναι δυνατό, οι ακμές που απομένουν στο γράφημα σχηματίζουν ένα απλό κύκλο που διατρέχει όλες τις κορυφές του, άρα τον ζητούμενο κύκλο Hamilton. Η τεχνική αυτή επιδεικνύεται στο παράδειγμα που ακολουθεί:

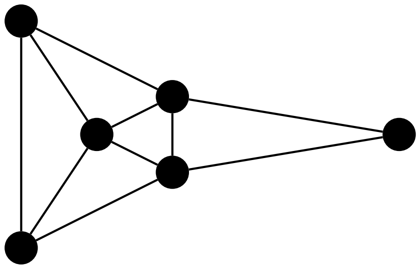
Παράδειγμα 6.34. Δίνεται το γράφημα



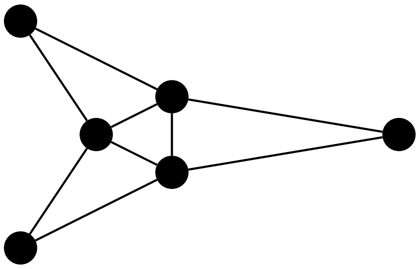
Αφαιρούμε σταδιακά ακμές έως ότου, εφόσον είναι δυνατόν, όλες οι κορυφές αποκτήσουν βαθμό 2.



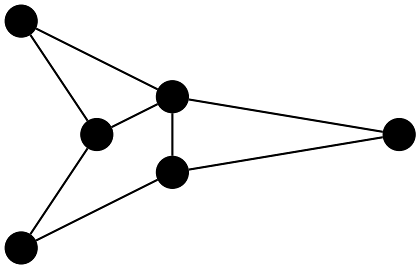
Βήμα 1



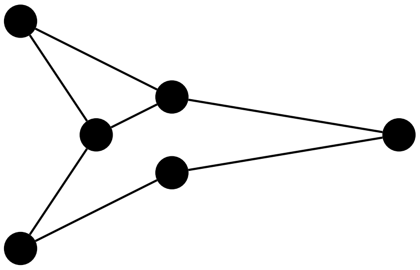
Βήμα 2



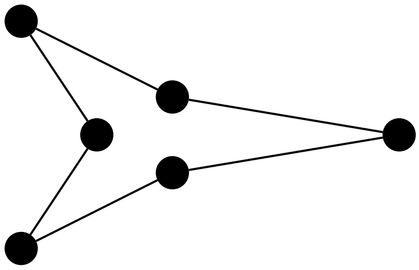
Βήμα 3



Βήμα 4

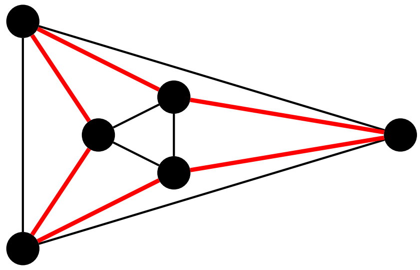


Βήμα 5



Βήμα 6

Αφού καταφέραμε με αφαίρεση ακμών όλες οι κορυφές να αποκτήσουν βαθμό 2, ο κύκλος Hamilton που προέκυψε είναι



□

Σημειώστε ότι η διαδικασία που περιγράφεται στο παραπάνω παράδειγμα, μπορεί να πραγματοποιηθεί με περισσότερους από ένα τρόπους χωρίς να υπάρχει κάποια συγκεκριμένη μεθοδολογία για την εκτέλεση της. Σε ορισμένες περιπτώσεις όπως αυτή του παραπάνω παραδείγματος, μπορούμε εναλλακτικά να εφαρμόσουμε κάποια γνωστά αποτελέσματα,τα οποία μας παρέχουν ικανές συνθήκες για την ύπαρξη κύκλου Hamilton. Τα πιο γνωστά από αυτά δίνονται στα παρακάτω δύο θεωρήματα:

***Θεώρημα* 6.35** (Ore). *Αν σε ένα απλό ένα απλό γράφημα $G(V, E)$ με $n \geq 3$ κορυφές, για κάθε ζεύγος μη γειτονικών κορυφών $v, u \in V$ ισχύει*

$$\delta(v) + \delta(u) \geq n,$$

τότε το γράφημα έχει κύκλο Hamilton.

***Θεώρημα* 6.36** (Dirac). *Αν σε ένα απλό γράφημα $G(V, E)$ με $n \geq 3$ κορυφές, για κάθε κορυφή $v \in V$ ισχύει*

$$\delta(v) \geq \frac{n}{2},$$

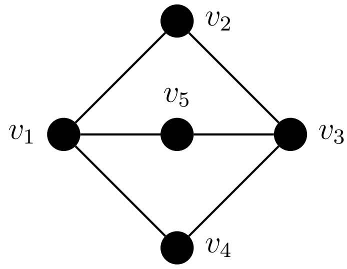
τότε το γράφημα έχει κύκλο Hamilton.

Το θεώρημα του Dirac, μπορεί να θεωρηθεί άμεση συνέπεια του θεωρήματος του Ore, αλλά είναι αρκετά ευκολότερο στην εφαρμογή του. Ιδιαίτερη προσοχή απαιτεί το γεγονός ότι τα δύο παραπάνω θεωρήματα αποτελούν μόνο ικανές και όχι αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη κύκλου Hamilton. Το γράφημα του παραδείγματος 6.33 έχει $n = 8$ κορυφές οι οποίες έχουν όλες τους βαθμό 3. Είναι προφανές ότι στο εν λόγω γράφημα δεν πληρούνται οι προϋποθέσεις κανενός από τα δύο παραπάνω θεωρήματα. Παρόλα αυτά, το γράφημα έχει κύκλο Hamilton.

Αντίθετα, στο γράφημα του παραδείγματος 6.34 που έχει $n = 6$ κορυφές βαθμού 4, είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι τόσο του θεώρημα του Ore, όσο και το θεώρημα του Dirac, εξασφαλίζουν την ύπαρξη κύκλου Hamilton. Άρα, δεν είναι αναγκαίο να μπούμε στην διαδικασία του εντοπισμού του με την τεχνική της αφαίρεσης ακμών.

Για να δείξουμε ότι ένα γράφημα δεν έχει κύκλο Hamilton, θα πρέπει με κάποιο πειστικό επιχείρημα να αποκλείσουμε την ύπαρξη του. Μια συνήθης πρακτική είναι να δείξουμε ότι η τεχνική αφαίρεσης ακμών που εφαρμόστηκε στο παράδειγμα 6.34, είναι αδύνατο να δημιουργήσει βαθμούς κορυφών ίσους με 2.

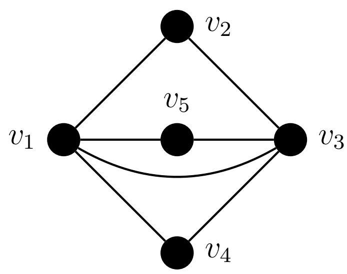
Παράδειγμα 6.37. Το γράφημα του σχήματος



δεν έχει κύκλο Hamilton, αφού για να εφαρμοστεί η τεχνική της αφαίρεσης ακμών με στόχο τη δημιουργία βαθμών 2 σε όλες τις κορυφές, θα έπρεπε να αφαιρέσουμε μια ακμή από την κορυφή v_1 και μια από την v_3. Όμως, η αφαίρεση οποιασδήποτε ακμής από τη v_1, θα άφηνε μια από τις κορυφές v_2, v_5 ή v_4 με βαθμό μόλις 1. Άρα, το γράφημα δεν έχει κύκλο Hamilton. □

Ολοκληρώνοντας την παρούσα ενότητα αξίζει να σημειώσουμε τα παρακάτω:

- Η ύπαρξη ή μη κύκλου Hamilton δεν σχετίζεται με την ύπαρξη ή μη κύκλου Euler. Μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε γράφημα που περιέχει κύκλο Hamilton, αλλά όχι κύκλο Euler (για παράδειγμα το γράφημα K_4). Αντίστοιχα, μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε γράφημα που περιέχει κύκλο Euler, αλλά όχι κύκλο Hamilton, όπως το παρακάτω



- Οποιοδήποτε πλήρες γράφημα K_n με $n > 2$, περιέχει κύκλο Hamilton. Για n περιττό το K_n περιέχει κύκλο Euler, ενώ για n άρτιο όχι.

- Το πλήρες διμερές γράφημα $K_{m,n}$ περιέχει κύκλο Hamilton αν και μόνο αν $m = n$.

6.3.3 Ελάχιστα μονοπάτια - Αλγόριθμος Dijkstra

Ένα πολύ γνωστό πρόβλημα στη θεωρία γραφημάτων είναι το πρόβλημα της εύρεσης ενός ελάχιστου μονοπατιού από μια δεδομένη αρχική κορυφή, σε μια τελική κορυφή ενός γραφήματος με βάρη. Ένα **γράφημα με βάρη**, είναι ένα γράφημα στις ακμές του οποίου αντιστοιχίζονται πραγματικοί αριθμοί, που ονομάζεται **βάρη** των ακμών. Τα βάρη των ακμών αντιπροσωπεύουν μεγέθη που σχετίζονται με το υπό μελέτη πρόβλημα που μοντελοποιείται μέσω του γραφήματος. Για παράδειγμα στο πρόβλημα της δρομολόγησης πακέτων σε ένα δίκτυο, τα βάρη των ακμών μπορεί αντιπροσωπεύουν το χρόνο που απαιτείται για τη μεταφορά ενός πακέτου από ένα κόμβο του δικτύου σε κάποιο γειτονικό του. Το ζητούμενο σε αυτή την περίπτωση είναι, δεδομένου ενός αρχικού κόμβου του δικτύου, να εντοπιστεί η συντομότερη διαδρομή προς κάποιο άλλο κόμβο του δικτύου.

Αντίστοιχο είναι το πρόβλημα της εύρεσης της βέλτιστης διαδρομής στους πλοηγούς οχημάτων με τη βοήθεια του συστήματος GPS[1]. Τα σημεία ενδιαφέροντος που μπορεί κανείς να επισκεφθεί σε μία γεωγραφική περιοχή (π.χ. αριθμοί οδών, διασταυρώσεις, πόλεις, χωριά, τοποθεσίες, κλπ.) αποτελούν τις κορυφές ενός γραφήματος, ενώ οι ακμές μεταξύ των κορυφών αποκτούν ένα βάρος, το οποίο μπορεί να εκφράζει την απόσταση ή την χρονική διάρκεια για τη μετάβαση από μια κορυφή στη γειτονική της μέσω του δρόμου που αντιστοιχεί στην ακμή. Όταν ο χρήστης της συσκευής ζητήσει να μεταβεί σε ένα σημείο ενδιαφέροντος στο χάρτη, το λογισμικό της συσκευής χρησιμοποιεί ένα κατάλληλο αλγόριθμο για τον υπολογισμό της συντομότερης σε χρόνο ή απόσταση διαδρομής, από την τρέχουσα θέση του χρήστη.

Ένας από τους πιο γνωστούς αλγορίθμους υπολογισμού ελάχιστης διαδρομής σε ένα γράφημα με βάρη είναι ο αλγόριθμος του Dijkstra. Ο αλγόριθμος του Dijkstra επιτρέπει τον υπολογισμό του ελάχιστου μονοπατιού από μια αρχική κορυφή, προς μια τελική κορυφή, με μόνο περιορισμό ότι τα βάρη των ακμών θα πρέπει να είναι θετικά. Ο ψευδοκώδικας του αλγορίθμου δίνεται στον αλγόριθμο 6.1. Συνοπτικά, η διαδικασία λειτουργεί ως εξής:

- Ο αλγόριθμος δέχεται ως είσοδο ένα γράφημα $G(V, E, w)$, όπου το V είναι το σύνολο των κορυφών, E είναι το σύνολο των ακμών του και w είναι η συνάρτηση βαρών των ακμών. Επιπλέον, η διαδικασία δέχεται ως είσοδο την αρχική κορυφή s και την τελική κορυφή t.

- Σε κάθε κορυφή του γραφήματος, αντιστοιχίζουμε δύο ετικέτες. Η ετικέτα **cost** δείχνει την ελάχιστη απόσταση της κορυφής στην οποία αναφέρεται από την αρχική κορυφή s, ενώ η ετικέτα **previous** είναι ένας δείκτης προς στην προηγούμενη κορυφή στο ελάχιστο μονοπάτι που οδηγεί από την s στην τρέχουσα.

- Στο πρώτο βήμα της αρχικοποίησης (γραμμή 6), ορίζουμε το σύνολο των κορυφών με προσωρινές ετικέτες, το οποίο συμβολίζουμε με Q. Καθώς ο αλγόριθμος προχωράει στην εκτέλεση του, οι κορυφές των οποίων η ελάχιστη απόσταση από την s έχει υπολογιστεί και συνεπώς οι ετικέτες τους γίνονται μόνιμες, αφαιρούνται από το σύνολο Q. Το Q αρχικά περιέχει όλες τις κορυφές του V.

[1]Global Positioning System: Σύστημα γεωγραφικού εντοπισμού που βασίζεται σε δορυφορικά σήματα.

Αλγόριθμος 6.1 Ο αλγόριθμος εύρεσης ελάχιστου μονοπατιού του Dijkstra

```
1  //Είσοδος: G(V,E,w) γράφημα με βάρη, s αρχική κορυφή, t τελική κορυφή
2
3  Procedure Dijkstra(G(V,E,w), s, t)
4
5  //Αρχικοποίηση
6  Q:= V;                        //Σύνολο κορυφών με προσωρινή ετικέτα
7
8  for each v ∈ Q do
9    cost[v]:= infinity;         //Οι ετικέτες cost γίνονται αρχικά +∞
10   previous[v]:= null;         //Οι ετικέτες previous είναι αρχικά κενές
11
12 cost[s]:= 0;                  //Η ετικέτα cost της αρχικής κορυφής γίνεται 0
13
14 //Κύριος βρόγχος
15 while t ∈ Q do                //Όσο η τελική κορυφή έχει προσωρινή ετικέτα
16   u:= κορυφή του Q με ελάχιστο cost[s];
17   Q:= Q − u;  // Η κορυφή u αποκτά οριστική ετικέτα, οπότε αφαιρείται από το Q
18
19   //Ενημέρωση των γειτονικών κορυφών της u με προσωρινή ετικέτα
20   for each v ∈ Q που γειτονεύουν με την u do
21     cost_via_u:=cost[u]+w[u,v];    //w[u,v] είναι το βάρος της ακμής (u,v)
22     if (cost_via_u<cost[v]) then   //Αν το κόστος μέσω της u είναι
23       cost[v]:= cost_via_u;        //μικρότερο της ετικέτας, ενημέρωσε
24       previous[v]:= u;             //τις ετικέτες cost και previous
```

- Στις γραμμές 8 - 10, αρχικοποιούνται όλες οι ετικέτες των κορυφών, θέτοντας ως πρώτη εκτίμηση της ελάχιστης απόστασης κάθε κορυφής από την s, στην ετικέτα cost, μια πολύ μεγάλη θετική τιμή ή θεωρητικά το άπειρο. Η ετικέτες **previous** αρχικοποιούνται στην τιμή null. Στην αρχική κορυφή s θέτουμε την ετικέτα **cost** ίση με 0 (γραμμή 12), αφού η κορυφή s απέχει μηδενική απόσταση από τον εαυτό της.

- Ο κύριος βρόγχος του αλγορίθμου (γραμμές 15 - 24) εκτελείται όσο η τελική κορυφή t ανήκει στο Q, που σημαίνει ότι η t δεν έχει αποκτήσει μόνιμες ετικέτες.

- Στη γραμμή 16, επιλέγεται ως κορυφή $\underline{u}$, η κορυφή του Q με την ελάχιστη ετικέτα **cost**, η οποία στη συνέχεια αποκτά μόνιμες ετικέτες, οπότε αφαιρείται από το Q (γραμμή 17).

- Στον εσωτερικό βρόγχο (γραμμές 20 - 24), ελέγχεται κατά πόσο οι γειτονικές κορυφές της u, που δεν έχουν μόνιμες ετικέτες, έχουν ετικέτα **cost**, η οποία θα μπορούσε να ελαττωθεί αν τις επισκεπτόμαστε μέσω της ακμής που τις συνδέει με τη u. Αν αυτό μπορεί να γίνει οι ετικέτες **cost** και **previous** ενημερώνονται κατάλληλα.

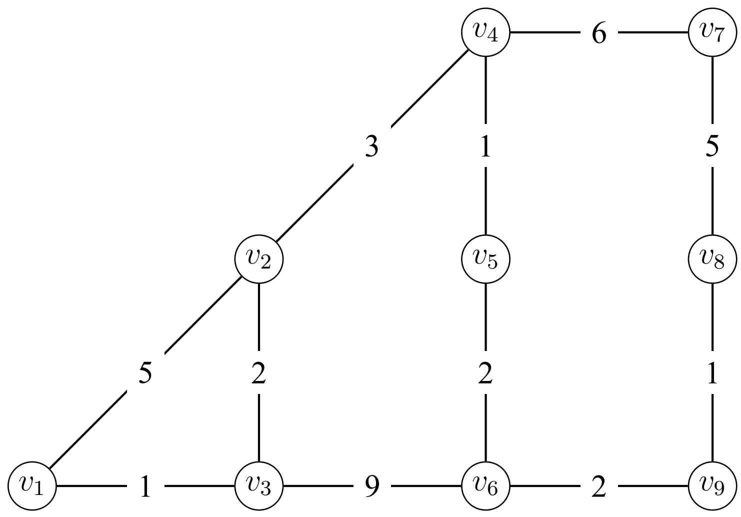
Όταν ο αλγόριθμος τερματίσει, για τις κορυφές που έχουν αποκτήσει μόνιμες ετικέτες, μεταξύ των οποίων σίγουρα θα βρίσκεται και η t, έχουμε βρει τόσο την ελάχιστη απόσταση τους από την s, που εκφράζεται από την ετικέτα **cost** της αντίστοιχης κορυφής, όσο και το ελάχιστο μονοπάτι. Για την εύρεση του ελάχιστου μονοπατιού από την s στην t, αρκεί να ξεκινήσουμε από την κορυφή t και να ακολουθήσουμε διαδοχικά του δείκτες των ετικετών **previous** μέχρι να οδηγηθούμε στην s.

Σημειώστε, ότι αν θέλουμε απλά να υπολογίσουμε την ελάχιστη απόσταση της κορυφής t από την s, χωρίς να μας ενδιαφέρει ο άμεσος υπολογισμός του ελάχιστου μονοπατιού, θα μπορούσαμε να μην χρησιμοποιήσουμε τις ετικέτες **previous** των κορυφών. (θα μπορούσαμε απλά να διαγράψουμε τις γραμμές 10 και 24 από τον ψευδοκώδικα του αλγορίθμου). Σε αυτή την περίπτωση, θα υπολογιζόταν μόνο οι ετικέτες **cost**, που δίνουν την ελάχιστη απόσταση από την s. Ακόμη και σε αυτή την περίπτωση, το ελάχιστο μονοπάτι θα μπορούσε να ανακατασκευαστεί σταδιακά, ξεκινώντας από την τελική κορυφή και ακολουθώντας σε κάθε βήμα την ακμή της οποίας το βάρος ισούται με τη διαφορά των ετικετών **cost** των δύο κορυφών που η ακμή συνδέει.

Τέλος, πολύ συχνά χρησιμοποιείται η παραλλαγή του αλγορίθμου του Dijkstra, η οποία υπολογίζει τις ελάχιστες διαδρομές από την αρχική κορυφή προς όλες τις υπόλοιπες κορυφές του γραφήματος, παράγοντας κατά αυτό τον τρόπο το δέντρο των ελάχιστων μονοπατιών (shortest path tree) με ρίζα την κορυφή s. Η μόνη διαφοροποίηση που απαιτείται για αυτή τη χρήση του αλγορίθμου εντοπίζεται στη γραμμή 15, όπου ο κύριος βρόγχος πρέπει να συνεχίσει να εκτελείται όσο το Q δεν είναι κενό.

Η εφαρμογή του αλγορίθμου του Dijkstra περιγράφεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 6.38. Να υπολογιστεί το ελάχιστο μονοπάτι από την κορυφή v_1 προς την κορυφή v_8.



Σε κάθε κορυφή αποδίδεται ένα ζεύγος ετικετών. Η πρώτη είναι η ετικέτα **cost**, ενώ η δεύτερη η ετικέτα **previous**. Οι χρωματισμοί των ετικετών ερμηνεύονται ως εξής:

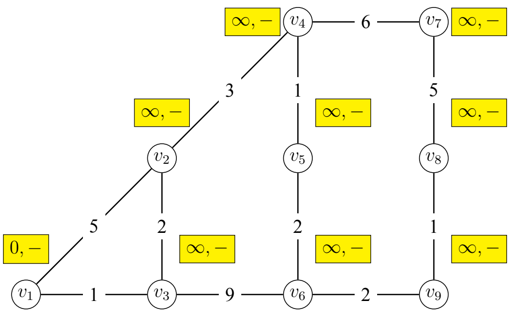
- Κίτρινες είναι οι ετικέτες που δεν έχουν γίνει μόνιμες.

- Οι πράσινες ετικέτες αντιστοιχούν σε κορυφές που πλέον έχουν μόνιμη ετικέτα.

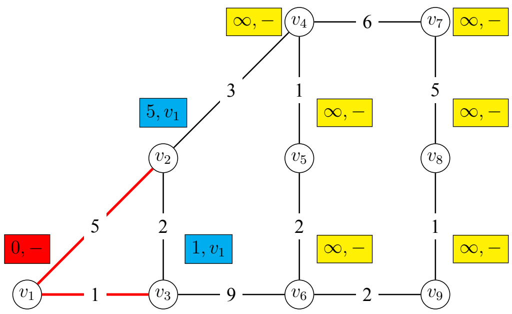
- Η κόκκινη ετικέτα αποδίδεται στην ενεργή κορυφή του κύριου βρόγχου. Είναι δηλαδή η κορυφή u της γραμμής 16.

- Οι γαλάζιες ετικέτες αντιστοιχούν σε κορυφές των οποίων η ετικέτα **cost** εξετάζεται για πιθανή αναθεώρηση. Οι κορυφές αυτές είναι ουσιαστικά οι κορυφές v στο βρόγχο των γραμμών 20 - 24.

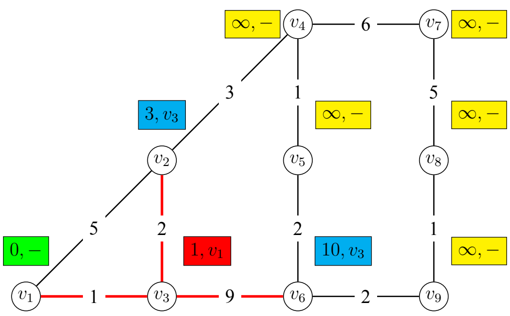
Τα βήματα εκτέλεσης του αλγορίθμου του Dijkstra για το συγκεκριμένο γράφημα, φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.



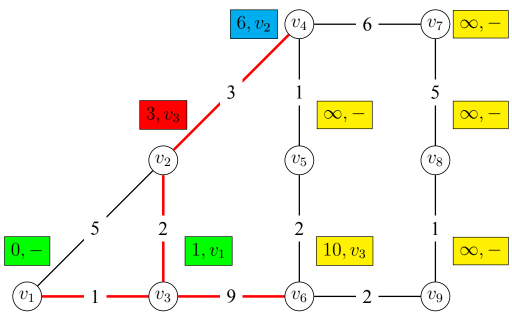
Αρχικοποίηση



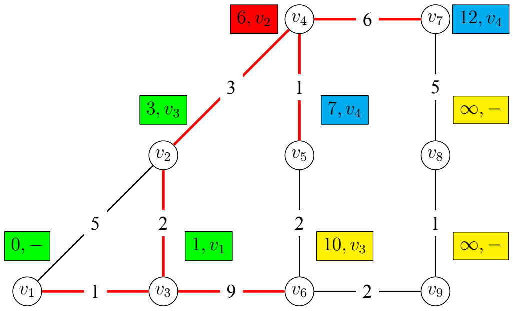
Βήμα 1



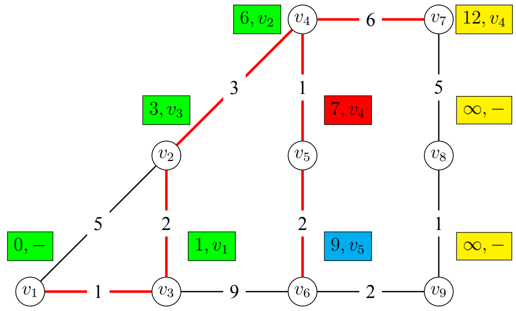
Βήμα 2



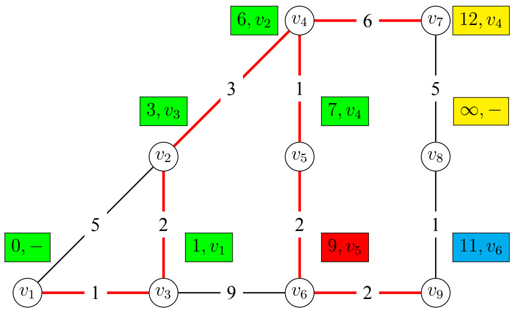
Βήμα 3



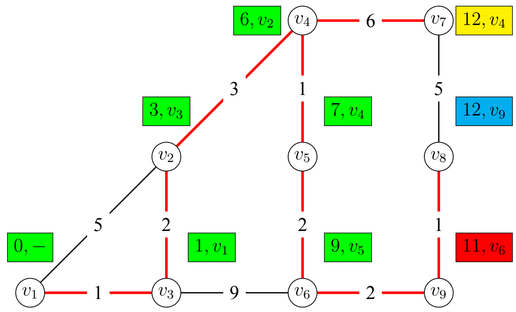
Βήμα 4



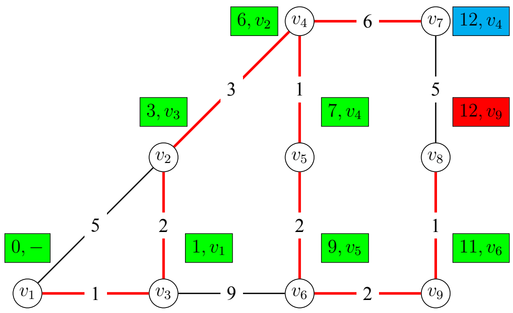
Βήμα 5



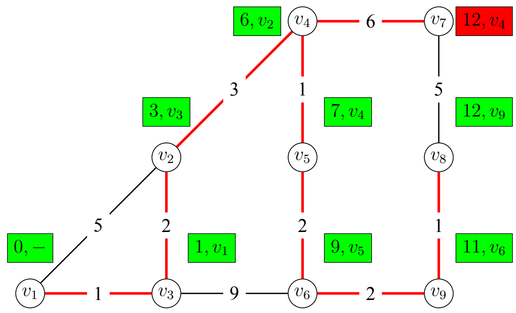
Βήμα 6



Βήμα 7



Βήμα 8



Βήμα 9

Η εξέλιξη των ετικετών κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου συνοψίζεται στον παρακάτω πίνακα:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
Αρχικοποίηση	$0, -$	$\infty, -$	$\infty, -$	$\infty, -$	$\infty, -$	$\infty, -$	$\infty, -$	$\infty, -$	$\infty, -$
Βήμα 1	$0, -$	$5, v_1$	$1, v_1$	$\infty, -$	$\infty, -$	$\infty, -$	$\infty, -$	$\infty, -$	$\infty, -$
Βήμα 2	$0, -$	$3, v_3$	$1, v_1$	$\infty, -$	$\infty, -$	$10, v_3$	$\infty, -$	$\infty, -$	$\infty, -$
Βήμα 3	$0, -$	$3, v_3$	$1, v_1$	$6, v_2$	$\infty, -$	$10, v_3$	$\infty, -$	$\infty, -$	$\infty, -$
Βήμα 4	$0, -$	$3, v_3$	$1, v_1$	$6, v_2$	$7, v_4$	$10, v_3$	$12, v_4$	$\infty, -$	$\infty, -$
Βήμα 5	$0, -$	$3, v_3$	$1, v_1$	$6, v_2$	$7, v_4$	$9, v_5$	$12, v_4$	$\infty, -$	$\infty, -$
Βήμα 6	$0, -$	$3, v_3$	$1, v_1$	$6, v_2$	$7, v_4$	$9, v_5$	$12, v_4$	$\infty, -$	$11, v_6$
Βήμα 7	$0, -$	$3, v_3$	$1, v_1$	$6, v_2$	$7, v_4$	$9, v_5$	$12, v_4$	$12, v_9$	$11, v_6$
Βήμα 8	$0, -$	$3, v_3$	$1, v_1$	$6, v_2$	$7, v_4$	$9, v_5$	$12, v_4$	$12, v_9$	$11, v_6$
Βήμα 9	$0, -$	$3, v_3$	$1, v_1$	$6, v_2$	$7, v_4$	$9, v_5$	$12, v_4$	$12, v_9$	$11, v_6$

Άρα, ξεκινώντας από την v_8, το ελάχιστο μονοπάτι από τη v_1 είναι $(v_8, v_9, v_6, v_5, v_4, v_2, v_3, v_1)$ με συνολικό μήκος 12. $\square$

6.4 Δέντρα

Τα **δέντρα** (trees) είναι μια πολύ σημαντική κατηγορία γραφημάτων, καθώς συναντώνται σε πάρα πολλές εφαρμογές. Συγκεκριμένα, δέντρο είναι ένα απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα G, με n κορυφές, που ικανοποιεί οποιαδήποτε από τις παρακάτω ισοδύναμες συνθήκες:

1. Το G είναι συνδεδεμένο και είναι ακυκλικό (δεν περιέχει κύκλους).

2. Το G είναι συνδεδεμένο και έχει ακριβώς $n-1$ ακμές.

3. Το G είναι συνδεδεμένο και η αφαίρεση οποιασδήποτε από τις υπάρχουσες ακμές το καθιστά μη συνδεδεμένο.

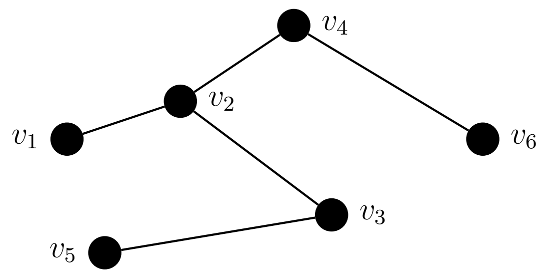
4. Το G είναι ακυκλικό και η προσθήκη μιας επιπλέον ακμής δημιουργεί κύκλο.

5. Το G είναι ακυκλικό και έχει ακριβώς $n-1$ ακμές.

6. Οποιεσδήποτε δύο κορυφές του G μπορούν να συνδεθούν με ένα μοναδικό απλό μονοπάτι.

Οι κορυφές βαθμού 1 σε ένα δέντρο ονομάζονται **τερματικές κορυφές** (terminal vertices) ή **φύλλα** (leaves), ενώ οι κορυφές με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του δύο ονομάζονται **εσωτερικές κορυφές** (internal vertices).

Παράδειγμα 6.39. Το παρακάτω γράφημα είναι δέντρο



Οι κορυφές v_1, v_5, v_6 είναι φύλλα, ενώ οι v_2, v_3, v_4 εσωτερικές κορυφές. $\square$

Ένα γράφημα G του οποίου οποιεσδήποτε δύο κορυφές μπορούν να συνδεθούν με το πολύ ένα απλό μονοπάτι ονομάζεται **δάσος** (forest). Πρακτικά, δάσος είναι ένα γράφημα του οποίου οι συνεκτικές συνιστώσες είναι δέντρα.

Τα δέντρα έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:

- Κάθε δέντρο, με $n \geq 2$ κορυφές, έχει τουλάχιστον δύο φύλλα.

- Κάθε δέντρο, με $n \geq 3$ κορυφές, έχει το πολύ $n-1$ φύλλα.

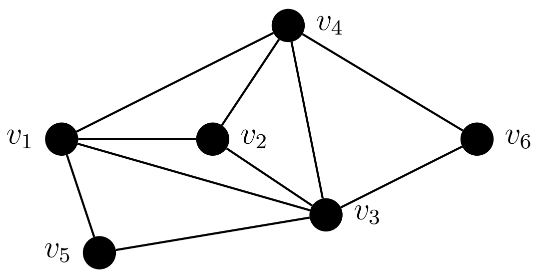
- Κάθε δέντρο, με $n \geq 3$ κορυφές, είναι διμερές γράφημα. Δηλαδή ο χρωματικός του αριθμός είναι 2.

- Για οποιαδήποτε τριάδα κορυφών σε ένα δέντρο, με $n \geq 3$ κορυφές, τα τρία μονοπάτια που τις συνδέουν ανά δύο, έχουν ακριβώς μια κοινή κορυφή.

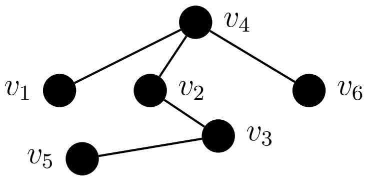
6.4.1 Συνδετικά δέντρα

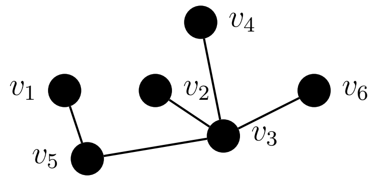
Ένα ενδιαφέρον ζητούμενο δεδομένου ενός συνδεδεμένου, μη κατευθυνόμενου, γραφήματος $G(V, E)$, είναι ο εντοπισμός ενός επαγόμενου υπογραφήματος όλων των κορυφών του, το οποίο να είναι δέντρο, δηλαδή ενός δέντρου που έχει ως σύνολο κορυφών το V και ως σύνολο ακμών ένα υποσύνολο των ακμών του E, τέτοιο που αφενός να διατηρεί τη συνεκτικότητα, αφετέρου να μην περιέχει κύκλους. Ένα τέτοιο δέντρο ονομάζεται **συνδετικό** ή **επικαλύπτον** δέντρο (spanning tree) του G. Αν το σύνολο κορυφών V περιέχει n κορυφές, τότε κάθε συνδετικό δέντρο του G, θα περιέχει $n-1$ ακμές. Όπως είναι εύκολο να διαπιστωθεί (βλέπε το επόμενο παράδειγμα), σε ένα συνδεδεμένο γράφημα μπορεί να υπάρχουν περισσότερα από ένα συνδετικά δέντρα.

Παράδειγμα 6.40. Δεδομένου του συνδεδεμένου γραφήματος



τα παρακάτω





είναι δύο διαφορετικά συνδετικά δέντρα του. □

Συνδετικά δέντρα μπορούν να κατασκευαστούν με διάφορους τρόπους. Δύο από αυτούς, οι οποίοι περιγράφονται παρακάτω, είναι οι αλγόριθμοι της **κατά βάθος** και **κατά πλάτος διάσχισης ή αναζήτησης** σε γραφήματα (Depth First Search - DFS και Breadth First Search - BFS).

Διάσχιση κατά βάθος (Depth First Search - DFS)

Ο αλγόριθμος της διάσχισης κατά βάθος δέχεται ως είσοδο ένα συνδεδεμένο γράφημα $G(V, E)$ και μια αρχική κορυφή εκκίνησης του αλγορίθμου. Επίσης, θεωρούμε ότι οι κορυφές του V είναι διατεταγμένες με κάποια προεπιλεγμένη σειρά, οπότε κατά η εξέταση των κορυφών γίνεται με συγκεκριμένη προτεραιότητα. Τέλος, υποθέτουμε ότι οι κορυφές του V είναι εφοδιασμένες με την ετικέτα *visited* η οποία αρχικά έχει την τιμή *FALSE* για κάθε κορυφή. Ο ψευδοκώδικας της διάσχισης κατά βάθος δίνεται παρακάτω:

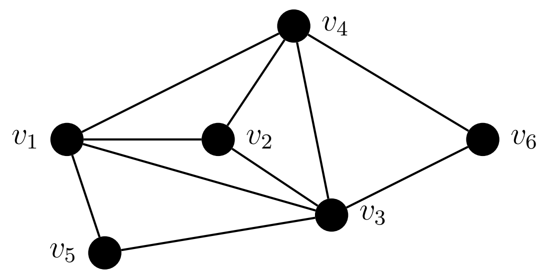
Αλγόριθμος 6.2 Ο αλγόριθμος διάσχισης κατά βάθος.

```
procedure DFS(G,v):
  v.visited = TRUE   //Σημειώνουμε ότι έχουμε επισκεφθεί τη v
  for all w such that (v,w) ∈ E      // Για όλους τους γείτονες της v
    if !(w.visited)  //Αν δεν έχουμε επισκεφθεί την w
      DFS(G,w)           //Αναδρομική κλήση της DFS
```

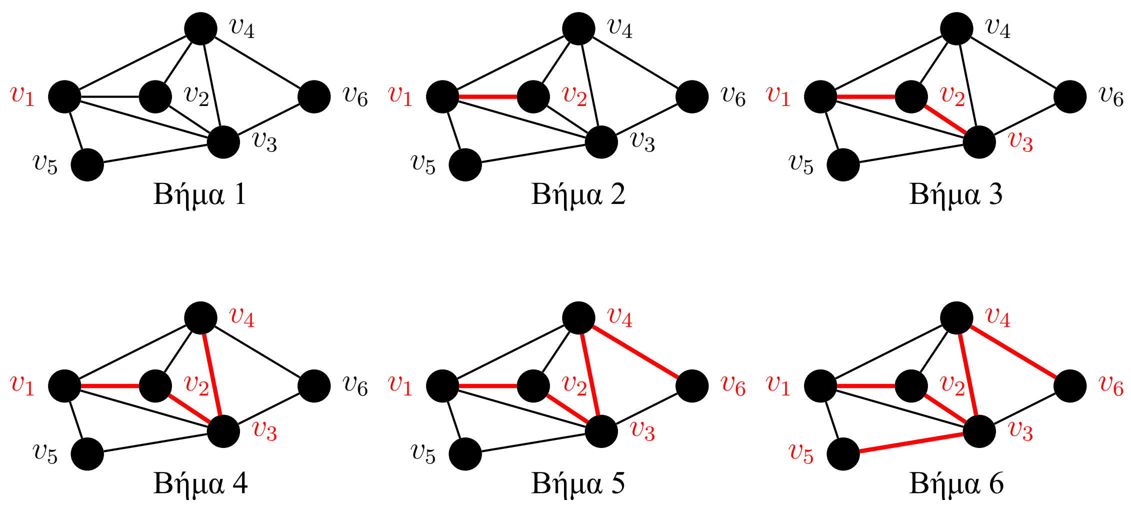
Η γενική ιδέα του αλγορίθμου της διάσχισης κατά βάθος είναι ότι ξεκινώντας από μια αρχική κορυφή v, επισκεπτόμαστε τον πρώτο (σύμφωνα με την προεπιλεγμένη διάταξη) γείτονα που δεν έχουμε ήδη επισκεφθεί. Η διαδικασία αυτή εφαρμόζεται αναδρομικά, μέχρι να μην υπάρχουν πλέον μη εξερευνημένοι γείτονες. Σε αυτή περίπτωση ο αλγόριθμος αναδιπλώνει και εφαρμόζει την ίδια αναζήτηση στις προηγούμενες κορυφές που εξερευνήθηκαν. Είναι σημαντικό να σημειωθεί η σειρά επίσκεψης των κορυφών που θα προκύψει από την εφαρμογή του αλγορίθμου, μπορεί να διαφέρει ανάλογα με την κορυφή εκκίνησης του αλγορίθμου, αλλά και την προεπιλεγμένη διάταξη των κορυφών.

Με μια μικρή προσθήκη ο αλγόριθμος 6.2, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση ενός συνδετικού δέντρου. Για να παρασταθεί το συνδετικό δέντρο που θα παραχθεί, αρκεί ο αλγόριθμος να τηρεί ένα σύνολο E' στο οποίο θα συμπεριληφθούν οι ακμές (v, w) για τις οποίες έγινε η αναδρομική κλήση στη γραμμή 5 του αλγορίθμου 6.2. Για την αρχικοποίηση του αλγορίθμου θέτουμε $E' = \{\}$, ενώ για την ενημέρωση του E' αρκεί να παρεμβάλουμε ανάμεσα στις γραμμές 4 και 5 του αλγορίθμου 6.2, τη εντολή $E' = E' \cup (v, w)$. Όταν ο αλγόριθμος τερματίσει, το σύνολο E' θα περιέχει τις ακμές του συνδετικού δέντρου.

Παράδειγμα 6.41. Εφαρμόζοντας διάσχιση κατά βάθος στο γράφημα του παρακάτω σχήματος

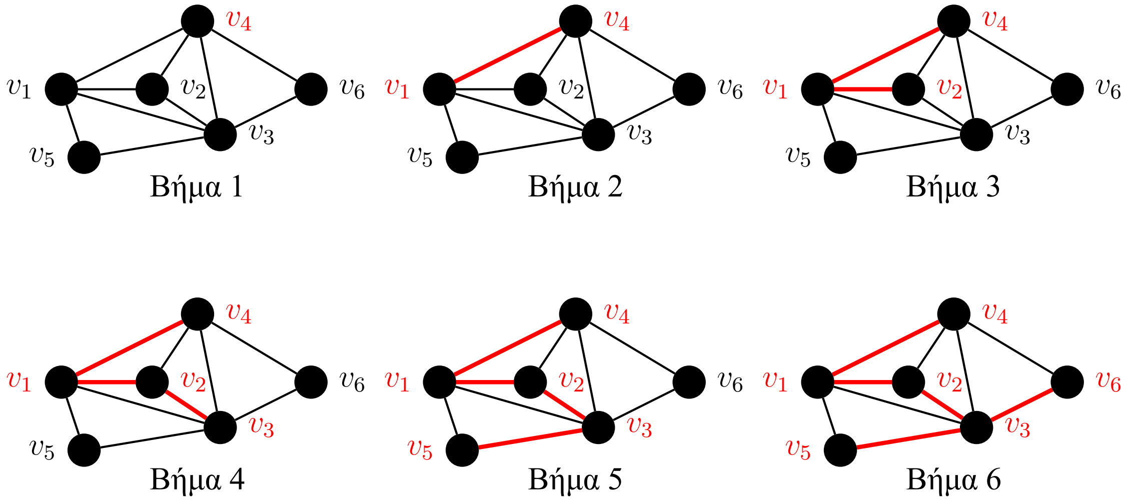


θεωρώντας ότι οι κορυφές είναι διατεταγμένες σύμφωνα με την αρίθμηση τους, δηλαδή $v_1.v_2, \ldots, v_6$ και εκκινώντας το αλγόριθμο από την κορυφή v_1, η διαδικασία θα εκτελεστεί όπως φαίνεται στα σχήματα που ακολουθούν



Οι κορυφές σε κόκκινο χρώμα είναι οι εκείνες που ο αλγόριθμος έχει επισκεφθεί μέχρι και το αντίστοιχο βήμα, ενώ επίσης με κόκκινο χρώμα σημειώνονται οι ακμές που συμμετέχουν στο παραγόμενο συνδετικό δέντρο.

Σε περίπτωση που αλγόριθμος κληθεί με κορυφή εκκίνησης την v_4, θεωρώντας την ίδια διάταξη των κορυφών, τα βήματα της εκτέλεσης εμφανίζονται στα παρακάτω σχήματα



Παρατηρείστε ότι τόσο η σειρά επίσκεψης των κορυφών, όσο και τα παραγόμενα συνδετικά δέντρα είναι διαφορετικά λόγω της διαφορετικής κορυφής εκκίνησης. □

Διάσχιση κατά πλάτος (Breadth First Search - BFS)

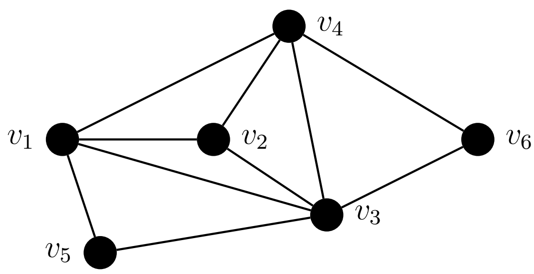
Αντίστοιχα με τον DFS, ο αλγόριθμος της διάσχισης κατά βάθος δέχεται ως είσοδο ένα συνδεδεμένο γράφημα $G(V, E)$ και μια αρχική κορυφή εκκίνησης του αλγορίθμου. Επίσης, θεωρούμε ότι οι κορυφές του V είναι διατεταγμένες βάσει κάποιες συγκεκριμένης προτεραιότητας. Κάθε κορυφή του V είναι εφοδιασμένη με την ετικέτα *visited* η οποία αρχικά έχει την τιμή *FALSE* και θεωρούμε ότι υπάρχει μια ουρά Q, στην οποία αποθηκεύονται οι προς επεξεργασία κορυφές, η οποία αρχικά είναι κενή. Ο ψευδοκώδικας της διάσχισης κατά πλάτος δίνεται παρακάτω:

Η στρατηγική του αλγορίθμου της κατά πλάτος διάσχισης είναι ότι ξεκινώντας από μια αρχική κορυφή επισκεπτόμαστε αρχικά την ίδια και στη συνέχεια διαδοχικά κάθε ένα από τους γείτονες της, αποθηκεύοντας τους παράλληλα σε μια ουρά η ίδια διαδικασία να επαναληφθεί στο επόμενο στάδιο, αποσπώντας την πρώτη κορυφή της ουράς προς επεξεργασία. Με μια παρέμβαση αντίστοιχη με αυτή που εφαρμόστηκε στη διάσχιση κατά πλάτος, δηλαδή με την τήρηση ενός, αρχικά κενού, συνόλου ακμών E', το οποίο ενημερώνεται με την προσθήκη της εντολής $E' = E' \cup (v, w)$ μετά την τελευταία γραμμή του αλγορίθμου 6.3, ο αλγόριθμος παράγει ένα συνδετικό δέντρο για το γράφημα G.

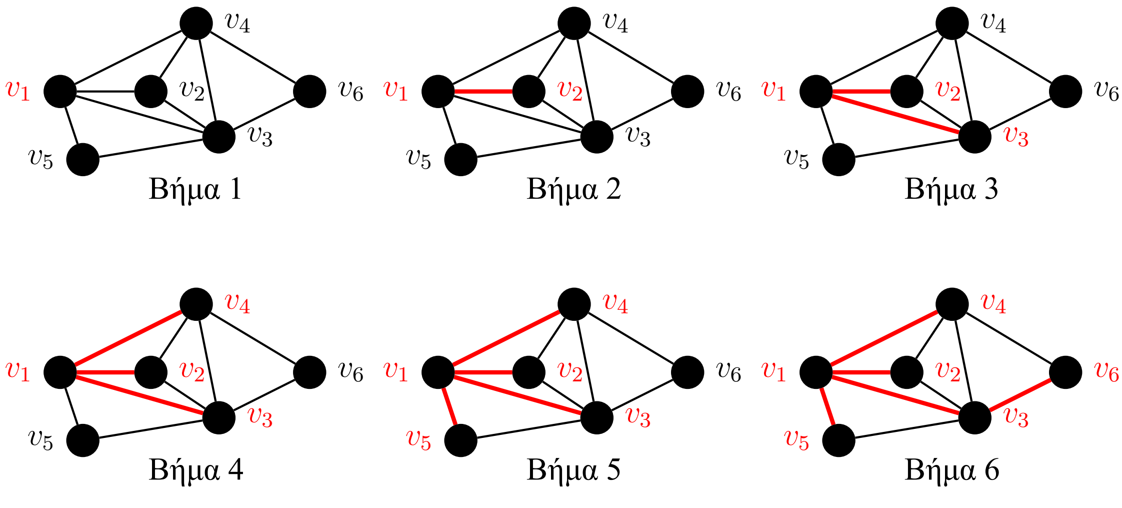
Παράδειγμα 6.42. Στο γράφημα του παρακάτω σχήματος

Αλγόριθμος 6.3 Ο αλγόριθμος διάσχισης κατά πλάτος.

```
procedure BFS(G,s):
  s.visited = TRUE        //Σημειώνουμε ότι έχουμε επισκφθεί την s
  Q.enqueue(s)            //Προσθέτουμε τη v στην ουρά
  while !(Q.empty)        //Όσο η ουρά περιέχει κορυφές
    v = Q.dequeue()       //Αφαιρούμε την κεφαλή της ουράς
    for all  w such that (v,w) ∈ E  // Για όλους τους γείτονες της v
      if !(w.visited)  //Αν δεν έχουμε επισκεφθεί τη w
        Q.enqueue(w)   //Αποθηκεύουμε την w στην ουρά Q για επεξεργασία
        w.visited = TRUE  //Σημειώνουμε ότι έχουμε επισκεφθεί την w
```



θεωρούμε ότι οι κορυφές είναι διατεταγμένες σύμφωνα με την αρίθμηση τους, δηλαδή $v_1.v_2, \ldots, v_6$ και εκτελούμε τον αλγόριθμο της κατά πλάτος διάσχισης από την κορυφή v_1. Το αποτέλεσμα της εκτέλεσης δίνεται στα σχήματα που ακολουθούν



□

Όπως και στον αλγόριθμο DFS, τόσο η κορυφή εκκίνησης όσο και η θεωρούμενη διάταξη των κορυφών είναι πιθανό να διαφοροποιήσει το παραγόμενο συνδετικό δέντρο.

6.4.2 Ελάχιστα συνδετικά δέντρα

Πέρα από τον απλό εντοπισμό ενός οποιουδήποτε συνδετικού δέντρου σε ένα γράφημα, πολύ μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση του υπολογισμού ενός **ελάχιστου συνδετικού δέντρου** (minimum spanning tree). Το πρόβλημα αφορά ένα συνδεδεμένο γράφημα με βάρη, όπως στην περίπτωση του προβλήματος υπολογισμού του ελάχιστου μονοπατιού με τον αλγόριθμο του Dijkstra, δηλαδή ένα γράφημα στου οποίου τις ακμές αντιστοιχίζουμε ένα πραγματικό αριθμό που ονομάζεται βάρος. Ένα ελάχιστο συνδετικό δέντρο (ΕΣΔ) σε ένα τέτοιο γράφημα, είναι ένα συνδετικό δέντρο του οποίου οι ακμές έχουν το ελάχιστο συνολικό βάρος.

Για τον υπολογισμό ενός ΕΣΔ σε ένα συνεκτικό γράφημα με βάρη, υπάρχουν αρκετοί αποτελεσματικοί αλγόριθμοι, μεταξύ των οποίων οι αλγόριθμοι των Kruskal και Prim που παρουσιάζονται παρακάτω.

Αλγόριθμος του Kruskal

Δεδομένου ενός συνεκτικού γραφήματος με βάρη $G(V, E)$, ο αλγόριθμος του Kruskal, θεωρεί αρχικά το δάσος που αποτελείται από τις κορυφές του γραφήματος, χωρίς καμία ακμή. Στη συνέχεια προσθέτει σε κάθε βήμα στο υπό κατασκευή ΕΣΔ, μια ακμή ελάχιστου βάρους η οποία δεν δημιουργεί κύκλους. Ο ψευδοκώδικας του αλγορίθμου εμφανίζεται παρακάτω:

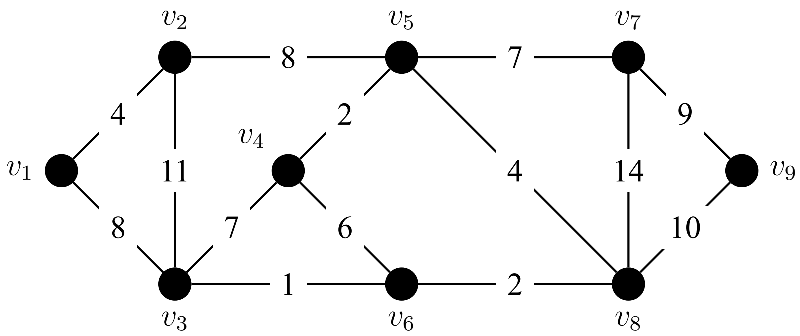
Αλγόριθμος 6.4 Ο αλγόριθμος του Kruskal.

```
1 procedure Kruskal(G):
2   T = ∅
3   for all v ∈ V:
4     MAKE-SET(v)
5   for all (u,v) ∈ E ordered by increasing weight(u, v)
6     if FIND-SET(u)!=FIND-SET(v)
7       T = T ∪ (u,v)
8       UNION(FIND-SET(u),FIND-SET(v))
9   return A
```

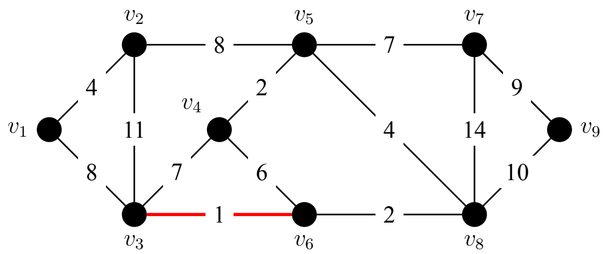
Η εντολή MAKE-SET(v) δημιουργεί ένα σύνολο με μοναδικό στοιχείο την κορυφή v, ενώ η FIND-SET(v) επιστρέφει το σύνολο κορυφών που βρίσκονται στο ίδιο δέντρο με την v. Η σύγκριση στη γραμμή 6 του αλγορίθμου 6.4, ουσιαστικά εξασφαλίζει ότι τα άκρα της ακμής που είναι υποψήφια να προστεθεί στο ΕΣΔ, ανήκουν σε δύο διαφορετικά δέντρα. Αν η συνθήκη αληθεύει, η προσθήκη της ακμής δεν θα δημιουργήσει κύκλο, οπότε τα δύο σύνολα κορυφών των δέντρων των u και v, ενώνονται σε ένα ενιαίο σύνολο με την εντολή UNION.

Η εφαρμογή του αλγορίθμου επιδεικνύεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

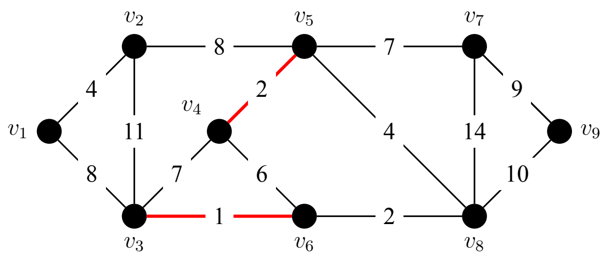
Παράδειγμα 6.43. Έστω το γράφημα με βάρη που δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



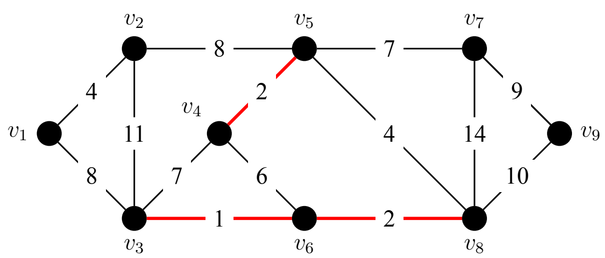
Τα βήματα της εκτέλεσης του αλγορίθμου του Kruskal εμφανίζονται στα σχήματα που ακολουθούν. Οι ακμές με κόκκινο χρώμα είναι εκείνες που συμμετέχουν στο σχηματισμό του ΕΣΔ.



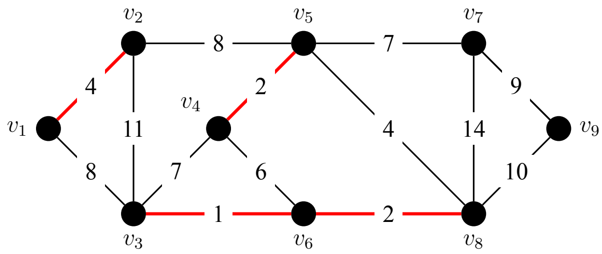
Βήμα 1



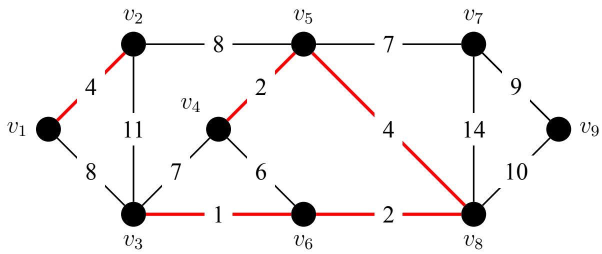
Βήμα 2



Βήμα 3

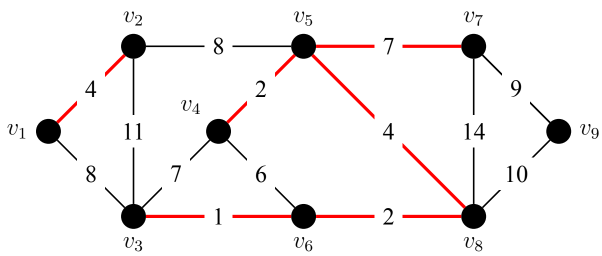


Βήμα 4

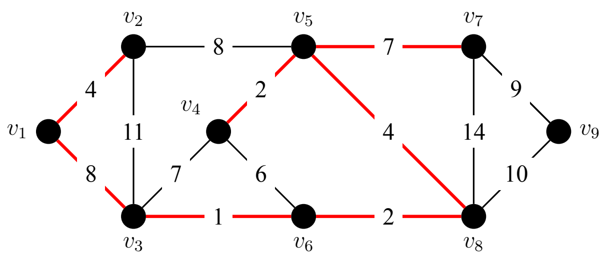


Βήμα 5

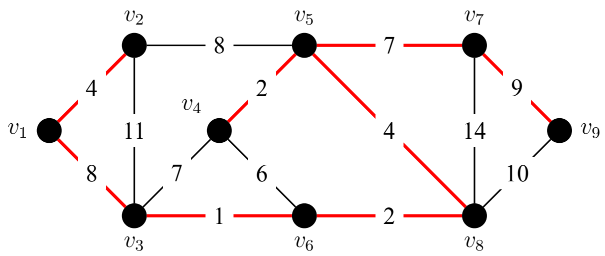
Στο σημείο αυτό πρέπει να παρατηρηθεί ότι η ακμή με το ελάχιστο βάρος, που δεν έχει χρησιμοποιηθεί είναι η (v_4, v_6), όμως επειδή και τα δύο άκρα της ανήκουν στο ίδιο δέντρο, αυτή παραλείπεται. Το ίδιο ισχύει και για την ακμή (v_3, v_4) η οποία είναι η αμέσως επόμενη υποψήφια προς προσθήκη στο δάσος. Κατά συνέπεια στο επόμενο βήμα εξετάζεται η ακμή (v_5, v_7), η προσθήκη της οποίας δεν δημιουργεί κύκλο και είναι αυτή που επιλέγεται



Βήμα 6



Βήμα 7



Βήμα 8

Άρα, το ελάχιστο συνδετικό δέντρο έχει συνολικό βάρος ακμών 37. □

Αλγόριθμος του Prim

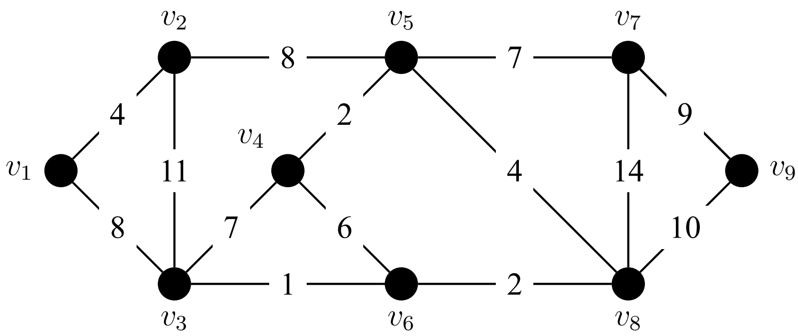
Ο αλγόριθμος τους Prim υπολογίζει ένα ΕΣΔ σε ένα συνδεδεμένο γράφημα με βάρη, ξεκινώντας από μια αρχική κορυφή s η οποία προστίθεται στο υπό κατασκευή ΕΣΔ. Σε κάθε βήμα το ήδη υπολογισμένο δέντρο επαυξάνεται κατά μια ακμή, προσθέτοντας εκείνη την ακμή ελαχίστου βάρους που έχει το ένα άκρο σε κορυφή του υφιστάμενου δέντρου και το άλλο άκρο εκτός αυτού. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να συμπεριληφθούν όλες οι κορυφές του γραφήματος στο δέντρο. Ο ψευδοκώδικας του αλγορίθμου δίνεται παρακάτω:

Αλγόριθμος 6.5 Ο αλγόριθμος του Prim.

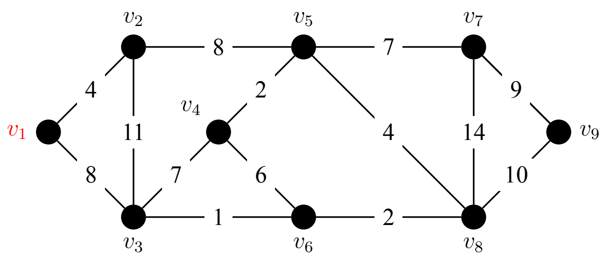
```
procedure Prim(G, s):
  T = ∅
  U = s
  while (U != V)
       (u, v) = min weight edge with u ∈ U and v ∉ U
       T = T ∪ (u, v)
       U = U ∪ v
  return T
```

Η εφαρμογή του αλγορίθμου του Prim επιδεικνύεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

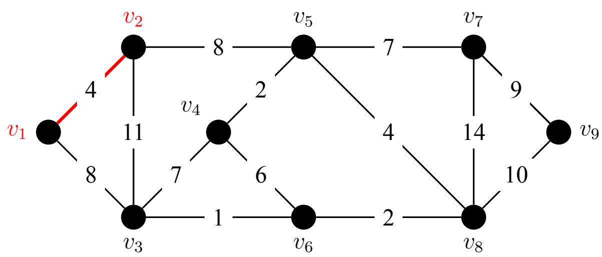
Παράδειγμα 6.44. Έστω το γράφημα με βάρη που δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



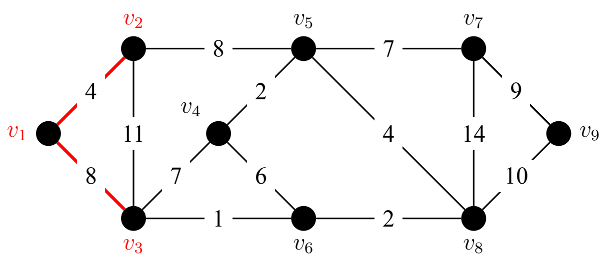
Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο του Prim με κορυφή εκκίνησης την v_1. Στα σχήματα που ακολουθούν, με κόκκινο χρώμα εμφανίζονται οι κορυφές και οι ακμές που συμμετέχουν στο σχηματισμό του ΕΣΔ.



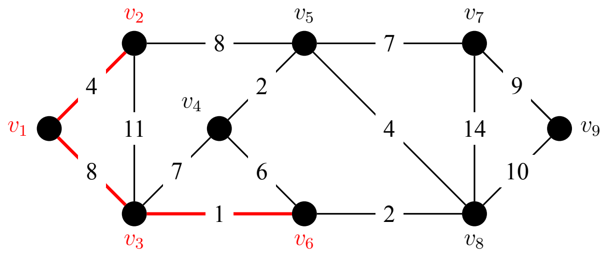
Βήμα 1



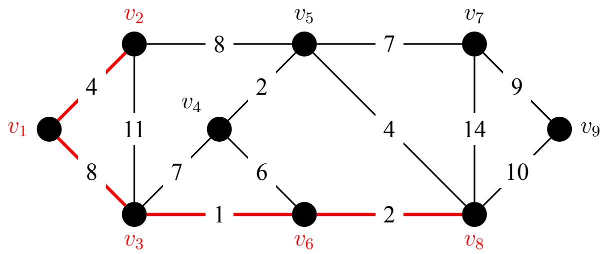
Βήμα 2



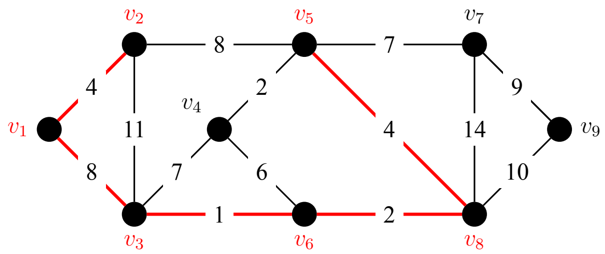
Βήμα 3



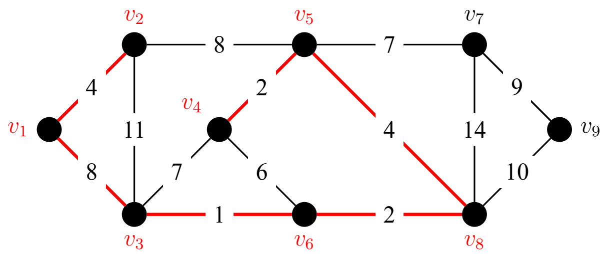
Βήμα 4



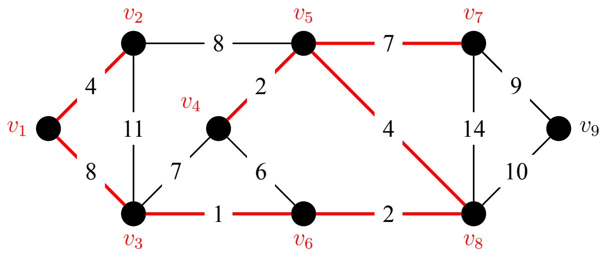
Βήμα 5



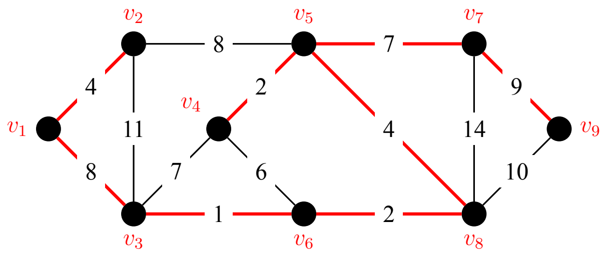
Βήμα 6



Βήμα 7



Βήμα 8



Βήμα 9

□

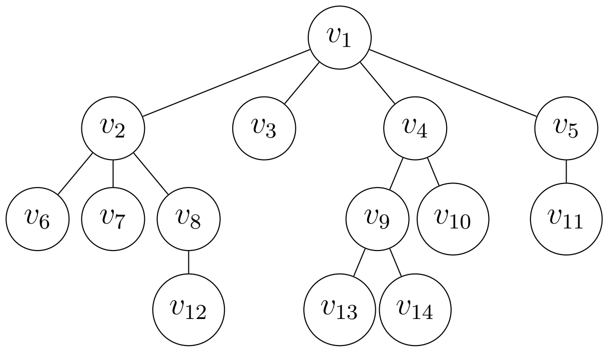
6.4.3 Δέντρα με ρίζα

Μια ειδική κατηγορία δέντρων με πολλές εφαρμογές είναι τα **δέντρα με ρίζα** ή **ριζωμένα δέντρα** (rooted trees). Στα δέντρα αυτά μια κορυφή ονομάζεται **ρίζα** του δέντρου, ενώ οι ακμές του δέντρου μπορεί να θεωρηθεί ότι αποκτούν κατεύθυνση είτε από της ρίζα προς τα φύλλα του δέντρου, είτε αντίστροφα.

Σε ένα δέντρο με ρίζα, κάθε κορυφή εκτός της ρίζας, έχει μια κορυφή **γονέα** (parent). Η κορυφή γονέας είναι η αμέσως προηγούμενη κορυφή στο (μοναδικό) μονοπάτι που συνδέει την κορυφή αυτή με τη ρίζα, ενώ όλες οι κορυφές στο μονοπάτι αυτό χαρακτηρίζονται ως **πρόγονοι** (ascendants) της. Οι κορυφές που έχουν ως γονέα μια δεδομένη κορυφή ονομάζονται παιδιά (children) της. Αντίστοιχα, οι κορυφές που έχουν ως πρόγονο μια δεδομένη κορυφή ονομάζονται απόγονοι (descendants) της. Το **υποδέντρο** της κορυφής v, είναι το επαγόμενο υπογράφημα του αρχικού δέντρου, που προκύπτει από τη v και τους απόγονους της, με ρίζα την την v.

Το **επίπεδο** (level) ή **βάθος** (depth) μιας κορυφής σε ένα δέντρο με ρίζα, είναι το μήκος του μοναδικού μονοπατιού που συνδέει την κορυφή αυτή με τη ρίζα. Το μέγιστο βάθος μεταξύ όλων των κορυφών του ριζωμένου δέντρου, ονομάζεται **ύψος** (height) του δέντρου.

Παράδειγμα 6.45. Στο σχήμα που ακολουθεί εμφανίζεται ένα δέντρο με ρίζα την κορυφή v_1.



Οι κορυφές v_2, v_3, v_4, v_5 έχουν βάθος 1, οι $v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}$ έχουν βάθος 2, ενώ οι v_{12}, v_{13}, v_{14} έχουν βάθος 3. Το ύψος του δέντρου είναι προφανώς 3. Η κορυφή v_4 έχει ως γονέα και μοναδικό πρόγονο την κορυφή v_1, ως παιδιά τις v_9, v_{10} και απογόνους τις $v_9, v_{10}, v_{13}, v_{14}$. Αντίστοιχα, η κορυφή v_8, έχει ως γονέα την v_2 και προγόνους τις v_2, v_1, ενώ μοναδικό παιδί και απόγονος της είναι η κορυφή v_{12}. □

6.4.4 Δυαδικά Δέντρα

Ένα δέντρο με ρίζα λέγεται στο οποίο κάθε κορυφή έχει το πολύ k παιδιά, ονομάζεται $k-$**αδικό** δέντρο. Ειδικότερα, ένα ριζωμένο δέντρο του οποίου κάθε κορυφή έχει το πολύ δύο παιδιά ονομάζεται **δυαδικό**. Αν h είναι το ύψος ενός δυαδικό δέντρου με n κορυφές, τότε ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες

$$h + 1 \leq n \leq 2^{h+1} - 1$$

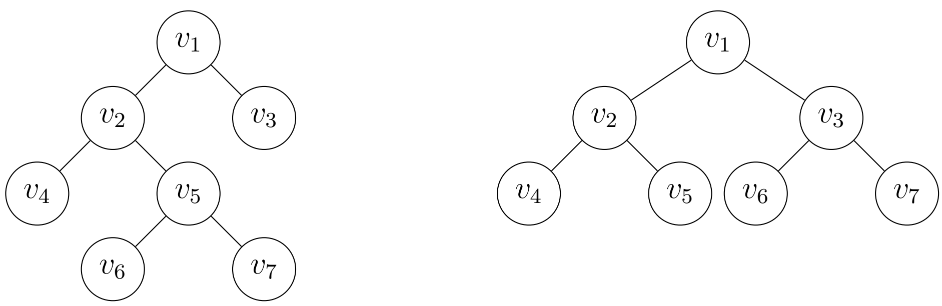
ή ισοδύναμα

$$\log_2(n+1) - 1 \leq h \leq n - 1.$$

Ένα δυαδικό δέντρο λέγεται **πλήρες** (full) αν κάθε κορυφή του έχει ακριβώς δύο ή κανένα παιδιά, ενώ λέγεται **τέλειο** (perfect) αν είναι πλήρες και όλα του τα φύλλα βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Σε κάθε τέλειο δυαδικό δέντρο με n κορυφές, ύψους h, ισχύει

$$n = 2^{h+1} - 1.$$

Παράδειγμα 6.46. Ένα πλήρες (αριστερά) και ένα τέλειο (δεξιά) δυαδικό δέντρο εμφανίζονται στο παρακάτω σχήμα.



□

Σε πολλές εφαρμογές των δυαδικών δέντρων διακρίνουμε τα παιδιά κάθε κορυφής σε αριστερό και δεξιό. Με βάση αυτό το χαρακτηριστικό ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι **αλγόριθμοι διάσχισης** των δυαδικών δέντρων (tree traversal). Έχοντας ως σημείο εκκίνησης τη ρίζα ενός δέντρου, οι αλγόριθμοι αυτοί επισκέπτονται με συστηματικό τρόπο όλες τις κορυφές ενός δέντρου, με διαφορετική προτεραιότητα κατά περίπτωση. Οι τρεις αλγόριθμοι διάσχισης που περιγράφονται παρακάτω μπορούν θεωρηθούν ειδικές περιπτώσεις εφαρμογής της διαδικασίας διάσχισης κατά βάθος.

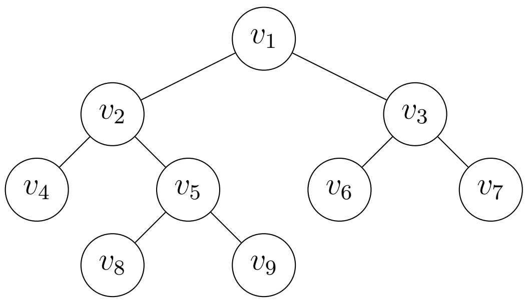
Προδιατεταγμένη διάσχιση (preorder traversal)

Δεδομένης της τρέχουσας κορυφής σε ένα δυαδικό δέντρο, ο αλγόριθμος της προδιατεταγμένης διάσχισης επισκέπτεται αρχικά την τρέχουσα κορυφή, στη συνέχεια αναδρομικά το αριστερό υποδέντρο της και τέλος το δεξιό υποδέντρο της. Η πρώτη κλήση του αλγορίθμου γίνεται θέτοντας ως τρέχουσα κορυφή τη ρίζα. Ο ψευδοκώδικας της προδιατεταγμένης διάσχισης εμφανίζεται παρακάτω:

Αλγόριθμος 6.6 Ο αλγόριθμος προδιατεταγμένης διάσχισης

```
Procedure preorder(node)
  if (node != NULL)
    visit(node) // Επίσκεψη της τρέχουσας κορυφής
    preorder(node.left) // Διάσχιση αριστερού υποδέντρου
    preorder(node.right) // Διάσχιση δεξιού υποδέντρου
```

Παράδειγμα 6.47. Εφαρμόζοντας προδιατεταγμένη διάσχιση στο δυαδικό δέντρο του παρακάτω σχήματος



Ο αλγόριθμος θα επισκεφθεί τις κορυφές του δέντρου με την παρακάτω σειρά:

$$v_1, v_2, v_4, v_5, v_8, v_9, v_3, v_6, v_7.$$

□

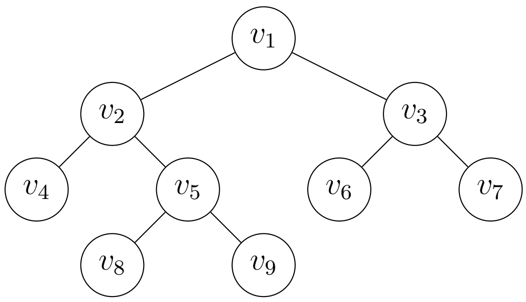
Ενδοδιατεταγμένη διάσχιση (inorder traversal)

Η διαφορά της ενδοδιατεταγμένης διάσχισης, σε σχέση την προδιατεταγμένη εντοπίζεται στη σειρά επίσκεψης της τρέχουσας κορυφής και της διάσχισης των δύο υποδέντρων της. Αρχικά, ο αλγόριθμος διασχίζει αναδρομικά το αριστερό υποδέντρο της τρέχουσας κορυφής, στη συνέχεια την επισκέπτεται την τρέχουσα κορυφή και τέλος διασχίζει δεξιό υποδέντρο της. Ο ψευδοκώδικας της ενδοδιατεταγμένης διάσχισης εμφανίζεται παρακάτω:

Αλγόριθμος 6.7 Ο αλγόριθμος ενδοδιατεταγμένης διάσχισης

```
Procedure inorder(node)
  if (node != NULL)
    inorder(node.left) // Διάσχιση αριστερού υποδέντρου
    visit(node) // Επίσκεψη της τρέχουσας κορυφής
    inorder(node.right) // Διάσχιση δεξιού υποδέντρου
```

Παράδειγμα 6.48. Εφαρμόζοντας ενδοδιατεταγμένη διάσχιση στο δυαδικό δέντρο του παρακάτω σχήματος



Ο αλγόριθμος επισκέπτεται τις κορυφές του δέντρου με την παρακάτω σειρά:

$$v_4, v_2, v_8, v_5, v_9, v_1, v_6, v_3, v_7.$$

□

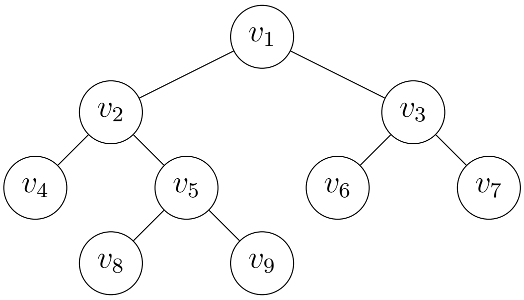
Μετάδιατεταγμένη διάσχιση (postorder traversal)

Ο αλγόριθμος της μεταδιατεταγμένης διάσχισης διασχίζει αναδρομικά το αριστερό υποδέντρο της τρέχουσας κορυφής, στη συνέχεια δεξιό υποδέντρο της και τελικά επισκέπτεται την τρέχουσα κορυφή. Ο ψευδοκώδικας της μεταδιατεταγμένης διάσχισης εμφανίζεται παρακάτω:

Παράδειγμα 6.49. Εφαρμόζοντας μεταδιατεταγμένη διάσχιση στο δυαδικό δέντρο του παρακάτω σχήματος

Αλγόριθμος 6.8 Ο αλγόριθμος μεταδιατεταγμένης διάσχισης

```
Procedure postorder(node)
  if (node != NULL)
    postorder(node.left) // Διάσχιση αριστερού υποδέντρου
    postorder(node.right) // Διάσχιση δεξιού υποδέντρου
    visit(node) // Επίσκεψη της τρέχουσας κορυφής
```



Ο αλγόριθμος επισκέπτεται τις κορυφές του δέντρου με την παρακάτω σειρά:

$$v_4, v_8, v_9, v_5, v_2, v_6, v_7, v_3, v_1.$$

□

7 Ακολουθίες – Γεννήτριες Συναρτήσεις

7.1 Ακολουθίες

Ακολουθία είναι μια απεικόνιση από το σύνολο των φυσικών, στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, δηλαδή

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

Συνήθως, αντί να γράφουμε $a(n)$ για να παραστήσουμε την τιμή της a στο n, όπως κάνουμε με τις συνήθεις πραγματικές συναρτήσεις, γράφουμε a_n. Οι τιμές μιας ακολουθίας για διαδοχικές φυσικών αριθμών $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, ονομάζονται **όροι της ακολουθίας**.

Μια ακολουθία μπορεί να περιγραφεί με διάφορους τρόπους. Ένας από αυτούς είναι μέσω του **κλειστού τύπου** της. Δηλαδή, μέσω ενός τύπου ο οποίος υπολογίζει την τιμή της ακολουθίας δεδομένης της τιμής του n. Για παράδειγμα, μια ακολουθία a περιγράφεται μέσω του κλειστού τύπου

$$a_n = 3n^2 - 5n + 2$$

Δεδομένου ενός n, μπορεί κανείς να υπολογίσει άμεσα την τιμή της ακολουθίας. Π.χ

$$a_{100} = 3 \cdot 100^2 - 5 \cdot 100 + 2 = 2999502$$

Ένας δεύτερος πολύ διαδεδομένος τρόπος περιγραφής μια ακολουθίας είναι η λεγόμενη **αναδρομική μορφή**. Σε πολλές εφαρμογές είναι ευκολότερο να εκφράσουμε τον $n-$οστό συναρτήσει του ή των προηγούμενων όρων της ίδιας της ακολουθίας. Χαρακτηριστικό είναι το πρόβλημα του ανατοκισμού, όπου δεδομένου ενός αρχικού κεφαλαίου, το οποίο συμβολίζουμε με a_0, ζητείται ο υπολογισμός του κεφαλαίου στο τέλος της $n-$οστής περιόδου. Στο τέλος κάθε περιόδου, το κεφάλαιο προσαυξάνεται κατά τον τόκο που προκύπτει από την εφαρμογή του επιτοκίου ε για την προηγούμενη χρονική περίοδο. Άρα, στο τέλος της $n-$οστής περιόδου ισχύει

$$a_n = a_{n-1} + \varepsilon a_{n-1} = (1 + \varepsilon) a_{n-1}$$

Η παραπάνω μορφή περιγραφής της ακολουθίας είναι αναδρομική. Εύκολα, μπορούμε να καταλάβουμε ότι ο υπολογισμός ενός τυχόντος όρου, π.χ. του a_{100}, δεν είναι πλέον το ίδιο εύκολος, αφού κάτι τέτοιο θα απαιτούσε διαδοχικά τον υπολογισμό των όρων $a_{99}, a_{98}, a_{97}, \dots, a_1$.

Ένα πολύ συνηθισμένο ζητούμενο όταν μια ακολουθία δίνεται σε αναδρομική μορφή, είναι η εύρεση ενός κλειστού τύπου που περιγράφει με ισοδύναμο τρόπο τη δεδομένη ακολουθία.

Στην περίπτωση του προβλήματος του ανατοκισμού, μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι ο κλειστός τύπος της ακολουθίας είναι

$$a_n = (1+\varepsilon)^n a_0$$

Ένας συστηματικός τρόπος αντιμετώπισης τέτοιου είδους προβλημάτων παρουσιάζεται στις επόμενες ενότητες.

7.1.1 Η αριθμητική πρόοδος

Μια πολύ γνωστή ακολουθία είναι η **αριθμητική πρόοδος**.

Ορισμός 7.1. Δεδομένου του πρώτου όρου a_0 και μιας σταθεράς β, που ονομάζεται **βήμα** της αριθμητική προόδου, η **αριθμητική πρόοδος** ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + \beta && \text{(αναδρομικός τύπος)} \\ a_n &= a_0 + n\beta && \text{(κλειστός τύπος)} \end{aligned}$$

Άθροισμα n πρώτων όρων:

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k &= a_0 + (a_0+\beta) + (a_0+2\beta) + \ldots + [a_0 + (n-1)\beta] \\ &= na_0 + [1+2+\ldots+(n-1)]\beta = na_0 + \frac{n(n-1)}{2}\beta \end{aligned}$$

7.1.2 Η γεωμετρική πρόοδος

Μια επίσης πολύ συχνά χρησιμοποιούμενη ακολουθία είναι η **γεωμετρική πρόοδος**.

Ορισμός 7.2. Δεδομένου του πρώτου όρου και μιας σταθεράς λ, που ονομάζεται **λόγος** της γεωμετρικής προόδου, η **γεωμετρική πρόοδος** ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} a_n &= \lambda a_{n-1} && \text{(αναδρομικός τύπος)} \\ a_n &= \lambda^n a_0 && \text{(κλειστός τύπος)} \end{aligned}$$

Άθροισμα n πρώτων όρων:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = (1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\ldots+\lambda^{n-1})a_0 = \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}a_0$$

Αν $|\lambda| < 1$, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα απείρων όρων της γεωμετρικής προόδου:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_0}{1-\lambda} \tag{7.1}$$

7.1.3 Πράξεις ακολουθιών

Αν a, b είναι δύο ακολουθίες ορίζουμε τις παρακάτω πράξεις:

- Πολλαπλασιασμός ακολουθίας με $\lambda \in \mathbb{R}$: $(\lambda a)_n = \lambda a_n$
- Άθροισμα ακολουθιών: $(a+b)_n = a_n + b_n$
- Γινόμενο ακολουθιών: $(ab)_n = a_n b_n$
- Συνέλιξη ακολουθιών: $(a * b)_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$

7.2 Διωνυμικό ανάπτυγμα

Το διωνυμικό ανάπτυγμα αποτελεί, μεταξύ των άλλων, ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για το χειρισμό των γεννητριών συναρτήσεων που θα συναντήσουμε παρακάτω.

- Αν n θετικός ακέραιος, τότε

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^r b^{n-r} \tag{7.2}$$

όπου

$$\binom{n}{r} = C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Η ποσότητα $\binom{n}{r}$ ονομάζεται **διωνυμικός συντελεστής**.

- Αν n είναι αρνητικός ακέραιος, τότε

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n}{r} a^r b^{n-r} \tag{7.3}$$

Για $n < 0$, ο διωνυμικός συντελεστής ορίζεται από τη σχέση

$$\binom{n}{r} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}^{r \text{ παράγοντες}}}{r!}$$

όμως επειδή

$$\begin{aligned} n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) &= (-1)^r(-n)(-n+1)(-n+2)\dots(-n+r-1) \\ &= (-1)^r \frac{(-n+r-1)!}{(-n-1)!} \end{aligned}$$

μπορούμε να γράφουμε

$$\binom{n}{r} = (-1)^r \frac{(-n+r-1)!}{(-n-1)!r!} = (-1)^r \binom{-n+r-1}{r}$$

οπότε η (7.3) γράφεται

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n+r-1}{r} (-1)^r a^r b^{n-r} \tag{7.4}$$

Η δεύτερη μορφή (7.4) είναι ευκολότερη στη χρήση της, καθώς για $n < 0$, ο διωνυμικός συντελεστής $\binom{-n+r-1}{r}$, εμπλέκει μόνο θετικές ποσότητες. Παρατηρείστε ότι όταν ο n είναι θετικός ακέραιος, το διωνυμικό ανάπτυγμα είναι ένα πολυώνυμο, ενώ όταν ο n είναι αρνητικός το διωνυμικό ανάπτυγμα είναι σειρά.

- Πολύ χρήσιμη επίσης, είναι ειδική περίπτωση της σχέσης (7.4), για $n > 0$, $a = -z$ και $b = 1$, δηλαδή

$$(1-z)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} z^r \tag{7.5}$$

Παράδειγμα 7.3. Να υπολογιστεί το ανάπτυγμα του $(x+y)^4$.

$$\begin{aligned}
(x+y)^4 &= \sum_{r=0}^{4} \binom{4}{r} x^r y^{4-r} \\
&= \binom{4}{0} x^0 y^4 + \binom{4}{1} x^1 y^3 + \binom{4}{2} x^2 y^2 + \binom{4}{3} x^3 y^1 + \binom{4}{4} x^4 y^0 \\
&= y^4 + 4xy^3 + 6x^2y^2 + 4x^3y + x^4
\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 7.4. Να δειχθεί ότι $\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n$.
Αρκεί να εφαρμόσουμε τον τύπο (7.2) για $a = b = 1$. Πράγματι, σύμφωνα με τον τύπο (7.2)

$$\begin{aligned}
(1+1)^n &= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} 1^r 1^{n-r} \\
2^n &= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}
\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 7.5. Να υπολογιστεί το διωνυμικό ανάπτυγμα του $\frac{1}{(x-2)^3}$.

$$\frac{1}{(x-2)^3} = (x-2)^{-3} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{3+r-1}{r} (-1)^r x^r (-2)^{-3-r}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+2}{r} (-1)^r x^r (-1)^{-3-r} 2^{-3-r} \\
&= -2^{-3} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r+1)(r+2)}{2} x^r 2^{-r} \\
&= -\frac{1}{16} \sum_{r=0}^{\infty} (r+1)(r+2) \left(\frac{x}{2}\right)^r \\
&= -\frac{1}{8} - \frac{3}{16}x - \frac{6}{32}x^2 - \frac{10}{64}x^3 + \dots
\end{aligned}
$$

□

Παράδειγμα 7.6. Να υπολογιστεί το διωνυμικό ανάπτυγμα του $\frac{1}{(1-z)^4}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1-z)^4} = (1-z)^{-4} &= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+3}{r} z^r \\
&= \binom{3}{0} z^0 + \binom{4}{1} z^1 + \binom{5}{2} z^2 + \binom{6}{3} z^3 + \dots \\
&= 1 + 4z + 10z^2 + 20z^3 + \dots
\end{aligned}
$$

□

7.3 Συνήθεις Γεννήτριες Συναρτήσεις

Έστω μια ακολουθία πραγματικών αριθμών με όρους $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$. Τότε η δυναμοσειρά

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

ονομάζεται **συνήθης γεννήτρια συνάρτηση** της ακολουθίας a. Ο χαρακτηρισμός «*συνήθης*» χρησιμοποιείται για να διαχωρίσουμε τις εν λόγω γεννήτριες από τις αντίστοιχες εκθετικές που παρουσιάζονται σε επόμενη ενότητα. Σε περίπτωση που αναφέρεται απλά ο όρος «γεννήτρια συνάρτηση», υπονοείται η συνήθης γεννήτρια συνάρτηση.

7.3.1 Ιδιότητες Γεννητριών Συναρτήσεων

Έστω τρεις ακολουθίες a, b, c και οι αντίστοιχες γεννήτριες συναρτήσεις $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$.

1. Αν $c_n = \lambda a_n + \mu b_n$, τότε $C(z) = \lambda A(z) + \mu B(z)$(γραμμικότητα)

2. Αν $b_n = \lambda^n a_n$, τότε $B(z) = A(\lambda z)$

3. Αν $b_n = na_n$, τότε $B(z) = z\frac{dA(z)}{dz}$

4. Αν $b_n = \begin{cases} a_{n-k}, & n \geq k \\ 0, & n < k \end{cases}$, (για $k > 0$), τότε $B(z) = z^k A(z)$

5. Αν $b_n = a_{n+k}$, (για $k > 0$), τότε

$$B(z) = z^{-k}[A(z) - a_0 - a_1 z - \ldots - a_{k-1}z^{k-1}]$$

6. Αν $c_n = (a * b)_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k$, τότε $C(z) = A(z)B(z)$.

Παράδειγμα 7.7. Να υπολογιστούν οι γεννήτριες συναρτήσεις των παρακάτω ακολουθιών: (α) $a_n = 1$, (β) $b_n = \lambda^n$, (γ) $c_n = n$, (δ) $d_n = n\lambda^n$, (ε) $e_n = n^2$.
(α) Σύμφωνα με τον ορισμό της γεννήτριας συνάρτησης και κάνοντας χρήση της σχέσης (7.1), έχουμε

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

για $|z| < 1$.
(β) Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 2 σε συνδυασμό με το (α), σκεπτόμενοι ότι $b_n = 1 \cdot \lambda^n$, παίρνουμε

$$B(z) = A(\lambda z) = \frac{1}{1-\lambda z}$$

(γ) Αξιοποιώντας την ιδιότητα 3, σε συνδυασμό με το (α), σκεπτόμενοι ότι $c_n = n \cdot 1$, έχουμε

$$C(z) = z\frac{dA(z)}{dz} = z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

(δ) Ομοίως με το (γ), εφαρμόζοντας την ιδιότητα 3, παίρνουμε

$$D(z) = z\frac{dB(z)}{dz} = z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-\lambda z}\right) = \frac{\lambda z}{(1-\lambda z)^2}$$

(ε) Εφαρμόζοντας την ιδιότητα3, σε συνδυασμό με το (α), σκεπτόμενοι ότι $c_n = n \cdot n$, έχουμε

$$E(z) = z\frac{dC(z)}{dz} = z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(1-z)^2}\right) = z\frac{(1-z)^2 + 2(1-z)z}{(1-z)^4} = \frac{z(z+1)}{(1-z)^3}$$

□

7.3.2 Αντιστροφή γεννητριών συναρτήσεων

Σε πολλές εφαρμογές, συναντάμε το πρόβλημα του προσδιορισμού της ακολουθίας που αντιστοιχεί σε μια δεδομένη γεννήτρια συνάρτηση. Στην παρούσα ενότητα εξετάζουμε την περίπτωση που η γεννήτρια είναι ρητή συνάρτηση.

Σε ορισμένες απλές περιπτώσεις μπορούμε να δουλέψουμε αξιοποιώντας τα διωνυμικά αναπτύγματα όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί

Παράδειγμα 7.8. Να υπολογιστεί η ακολουθία που αντιστοιχεί στη συνήθη γεννήτρια συνάρτηση

$$A(z) = \frac{z^2}{(1-z)^4}$$

Αφού όπως είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα είναι

$$\frac{1}{(1-z)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{n} z^n$$

θα έχουμε

$$\begin{aligned} A(z) = \frac{z^2}{(1-z)^4} &= z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{n} z^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} \binom{n+1}{n-2} z^n = \\ &= z^2 + 4z^3 + 10z^4 + 20z^5 + \ldots + \binom{n+1}{n-2} z^n + \ldots \end{aligned}$$

Άρα, η ακολουθία που αντιστοιχεί στην $A(z)$ είναι η

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 0, 1 \\ \binom{n+1}{n-2}, & n \geq 2 \end{cases}$$

□

Γενικά όμως, αν ο παρονομαστής της γεννήτριας συνάρτησης δεν είναι διώνυμο, δεν μπορούμε να δουλέψουμε με τον παραπάνω τρόπο. Για αυτό το λόγο απαιτείται μια γενικότερη μεθοδολογία που μπορεί να εφαρμοστεί σε περισσότερες περιπτώσεις.

Έστω μια ρητή συνάρτηση

$$A(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

όπου $N(z), D(z)$ πολυώνυμα του z με $degN(z) < degD(z)$. Υπολογίζοντας τις ρίζες του παρονομαστή $D(z)$, τον αναλύουμε σε γινόμενο παραγόντων της μορφής

$$D(z) = d_n(z-\rho_1)^{n_1}(z-\rho_2)^{n_2}\ldots(z-\rho_s)^{n_s}$$

όπου $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s$ είναι διακριτές ρίζες του $D(z)$ και $n_1, n_2, \ldots, n_s$ οι πολλαπλότητες τους και d_n είναι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του $D(z)$. Τότε, η ρητή συνάρτηση $A(z)$ μπορεί να αναλυθεί μοναδικά σε άθροισμα μερικών κλασμάτων της μορφής

$$\begin{aligned} A(z) = & \frac{c_{11}}{(z-\rho_1)} + \frac{c_{12}}{(z-\rho_1)^2} + \ldots + \frac{c_{1,n_1}}{(z-\rho_1)^{n_1}} + \\ & + \frac{c_{21}}{(z-\rho_2)} + \frac{c_{22}}{(z-\rho_2)^2} + \ldots + \frac{c_{2,n_2}}{(z-\rho_2)^{n_2}} + \\ & + \ldots \\ & + \frac{c_{s,1}}{(z-\rho_s)} + \frac{c_{s,2}}{(z-\rho_s)^2} + \ldots + \frac{c_{s,n_s}}{(z-\rho_s)^{n_s}} \end{aligned}$$

Οι σταθερές $c_{i,j}$ μπορούν να υπολογιστούν με διάφορες τεχνικές όπως αυτή που περιγράφεται στα παραδείγματα που ακολουθούν. Αφού η ρητή συνάρτηση $A(z)$ αναλυθεί όπως παραπάνω, για κάθε όρο του αθροίσματος η ακολουθία που του αντιστοιχεί μπορεί να υπολογιστεί χωριστά με την τεχνική του παραδείγματος 7.8.

Παράδειγμα 7.9. Έστω η συνάρτηση

$$A(z) = \frac{z+1}{z^2 - 3z + 2}$$

της οποίας ζητείται να προσδιοριστεί η αντίστοιχη ακολουθία. Υπολογίζουμε τις ρίζες του παρονομαστή και γράφουμε

$$z^2 - 3z + 2 = (z-1)(z-2)$$

Άρα, η ανάλυση σε μερικά κλάσματα θα είναι της μορφής

$$A(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z-2)} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z-2}$$

Μένει να υπολογίσουμε τις σταθερές c_1, c_2. Εφαρμόζουμε το ακόλουθο τέχνασμα. Πολλαπλασιάζουμε τις δύο εκφράσεις της $A(z)$ με $(z-1)$

$$(z-1)A(z) = c_1 + (z-1)\frac{c_2}{z-2}$$

οπότε

$$\frac{z+1}{z-2} = c_1 + (z-1)\frac{c_2}{z-2}$$

Εφαρμόζοντας όρια στην παραπάνω σχέση για $z \to 1$, παίρνουμε

$$c_1 = \lim_{z \to 1} \frac{z+1}{z-2} = -2$$

Ομοίως για να υπολογίσουμε το c_2, πολλαπλασιάζουμε την $A(z)$ με $(z–2)$, οπότε έχουμε

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{c_1}{z-1}(z-2) + c_2$$

Εφαρμόζοντας όρια στην παραπάνω σχέση για $z \to 2$, παίρνουμε

$$c_2 = \lim_{z\to 2} \frac{z+1}{z-1} = 3$$

Άρα, η ανάλυση σε μερικά κλάσματα δίνει

$$A(z) = \frac{-2}{z-1} + \frac{3}{z-2}$$

Λόγω της ιδιότητας 1, κάθε όρος του παραπάνω αθροίσματος αντιστοιχεί σε μια ακολουθία. Αρκεί να βρούμε τις ακολουθίες που αντιστοιχούν στα κλάσματα

$$\frac{1}{z-1}, \frac{1}{z-2}$$

Σκεπτόμενοι ότι

$$A(z) = 2 \cdot \frac{1}{1-z} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

και χρησιμοποιώντας το γενικευμένο διωνυμικό ανάπτυγμα (7.4), παίρνουμε:

$$\begin{aligned} A(z) &= 2\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{n} z^n - \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{n} (\frac{z}{2})^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \frac{3}{2}\frac{1}{2^n}) z^n \end{aligned}$$

Άρα η ζητούμενη ακολουθία είναι $a_n = 2 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2^n}$. □

Παράδειγμα 7.10. Ζητείται ακολουθία που αντιστοιχεί στη γεννήτρια συνάρτηση

$$A(z) = \frac{z+1}{z^2 - 2z + 1}$$

Η παραγοντοποίηση του παρονομαστή δίνει

$$z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2$$

Άρα, η ανάλυση σε μερικά κλάσματα θα είναι της μορφής

$$A(z) = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{(z-1)^2}$$

Σε αυτή την περίπτωση για τον υπολογισμό των σταθερών θα πολλαπλασιάσουμε αρχικά με $(z-1)^2$, οπότε έχουμε

$$(z-1)^2 A(z) = c_1(z-1) + c_2 \tag{7.6}$$

Εφαρμόζοντας όρια για $z \to 1$, παίρνουμε:

$$c_2 = \lim_{z\to 1} \frac{z+1}{(z-1)^2}(z-1)^2 = 2$$

Για να υπολογίσουμε το c_1, θα χρειαστεί να παραγωγίσουμε τη σχέση (7.6), οπότε παίρνουμε

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{z+1}{(z-1)^2}(z-1)^2\right) = \frac{d}{dz}\left(c_1(z-1) + c_2\right)$$

που δίνει

$$c_1 = 1$$

(σε πιο πολύπλοκες περιπτώσεις θα χρειαστεί να εφαρμόσουμε στην παραγωγισμένη σχέση όρια για $z \to 1$). Άρα,

$$\begin{aligned} A(z) &= \frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2} \\ &= -\frac{1}{1-z} + 2 \cdot \frac{1}{(1-z)^2} \end{aligned}$$

οπότε χρησιμοποιώντας το γενικευμένο διωνυμικό ανάπτυγμα (7.4), παίρνουμε

$$\begin{aligned} A(z) &= -\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{n} z^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{n} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [-1 + 2(n+1)] z^n \end{aligned}$$

Άρα, η ζητούμενη ακολουθία είναι

$$a_n = -1 + 2(n+1) = 2n+1$$

□

7.4 Γραμμικές Αναδρομικές Σχέσεις με σταθερούς συντελεστές

Μια **γραμμική αναδρομική σχέση με σταθερούς συντελεστές τάξης** p, είναι μια σχέση της μορφής:

$$c_p a_{n+p} + c_{p-1} a_{n+p-1} + \ldots + c_0 a_n = f_n \tag{7.7}$$

όπου $c_i, i = 0, 1, \ldots, p$, με $c_p \neq 0$, είναι γνωστές σταθερές, f_n είναι οι όροι μια γνωστής ακολουθίας και το ζητούμενο είναι να προσδιοριστούν οι όροι της a_n, ώστε η αναδρομική σχέση να ικανοποιείται για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Όταν η ακολουθία είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν, τότε η αναδρομική σχέση (7.7) λέγεται **ομογενής**. Σε διαφορετική περίπτωση, λέγεται **μη-ομογενής**.

Ένα παράδειγμα ομογενούς αναδρομικής σχέσης 2ης τάξης είναι το παρακάτω

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} - 3a_n = 0$$

Ένας απλοϊκός τρόπος για να προσδιορίσει κανείς τους όρους της ζητούμενης ακολουθίας, είναι φέρει την εξίσωση στη μορφή

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$$

Γνωρίζοντας του δύο πρώτους όρους μπορούμε να υπολογίσουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1 + 3a_0 \\ a_3 &= 2a_2 + 3a_1 \\ a_4 &= 2a_3 + 3a_2 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Επειδή προφανώς ο παραπάνω τρόπος δεν είναι αποτελεσματικός για τον υπολογισμό του γενικού όρου a_n, χρησιμοποιούμε την τεχνική που περιγράφεται στο παρακάτω παράδειγμα, η οποία κάνει χρήση γεννητριών συναρτήσεων.

Παράδειγμα 7.11. Δίνεται η (ομογενής) αναδρομική σχέση

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} - 3a_n = 0 \tag{7.8}$$

με αρχικούς όρους $a_0 = 1, a_1 = 2$.

Έστω $A(z)$ η γεννήτρια συνάρτηση της ζητούμενης ακολουθίας a_n. Υπολογίζοντας τις γεννήτριες συναρτήσεις των δύο μελών της εξίσωσης χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες 1 και 5 των γεννητριών συναρτήσεων, έχουμε

$$z^{-2}[A(z) - a_0 - a_1 z] - 2z^{-1}[A(z) - a_0] - 3A(z) = 0$$

Λύνουμε ως προς $A(z)$ και αντικαθιστούμε τις τιμές των αρχικών όρων $a_0 = 1, a_1 = 2$, οπότε παίρνουμε

$$A(z) = \frac{z(2a_0 - a_1) - a_0}{3z^2 + 2z - 1} = \frac{-1}{3z^2 + 2z - 1}$$

Αφού υπολογίσαμε τη γεννήτρια της ζητούμενης ακολουθίας μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε και τον κλειστό τύπο της. Αναλύουμε σε μερικά κλάσματα:

$$A(z) = \frac{1}{4}\frac{1}{1+z} + \frac{3}{4}\frac{1}{1-3z}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n - \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(3)^n z^n$$

Άρα η ζητούμενη ακολουθία είναι

$$a_n = \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{3}{4}\cdot 3^n$$

□

Παράδειγμα 7.12. Δίνεται η (μη ομογενής) αναδρομική σχέση

$$a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 2^n$$

με αρχικούς όρους $a_0 = a_1 = 0$.

Έστω $A(z)$ η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας a_n. Δουλεύοντας, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, υπολογίζουμε τις γεννήτριες των δύο μελών της αναδρομικής σχέσης, εφαρμόζοντας τις σχετικές ιδιότητες, οπότε έχουμε

$$z^{-2}[A(z) - a_0 - a_1 z] + 2z^{-1}[A(z) - a_0] + A(z) = \frac{1}{1-2z}$$

Λύνουμε ως προς $A(z)$ και αντικαθιστούμε τις τιμές των αρχικών όρων, οπότε παίρνουμε

$$A(z) = \frac{z^2}{(1-2z)(z^2+2z+1)} = \frac{z^2}{(1-2z)(1+z)^2}$$

Αναλύουμε σε μερικά κλάσματα

$$\begin{aligned} A(z) &= \frac{1}{9}\frac{1}{1-2z} - \frac{4}{9}\frac{1}{1+z} + \frac{1}{3}\frac{1}{(1+z)^2} \\ &= \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n - \frac{4}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{n}(-1)^n z^n \end{aligned}$$

Άρα, η ζητούμενη ακολουθία είναι

$$a_n = \frac{1}{9}2^n - \frac{4}{9}\cdot(-1)^n + \frac{n+1}{3}\cdot(-1)^n$$

□

Παράδειγμα 7.13. Έχοντας στην διάθεσή μας τα ψηφία 0 έως και 9 πόσους $n-$ψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε (με απεριόριστη επανάληψη των ψηφίων) οι οποίοι περιέχουν μία τουλάχιστον φορά το ψηφίο μηδέν (σε οποιαδήποτε θέση εκτός από την πρώτη αριστερά);

Θα λύσουμε το πρόβλημα με τη χρήση αναδρομικών ακολουθιών. Ονομάζουμε a_n το ζητούμενο πλήθος των αριθμών μήκους n που περιέχουν τουλάχιστον ένα μηδενικό. Προφανώς δεν υπάρχουν μονοψήφιοι αριθμοί που περιέχουν τουλάχιστον ένα μηδενικό, δηλαδή ισχύει:

$$a_1 = 0$$

Θα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε το πλήθος των ζητούμενων αριθμών μήκους $n+1$, σε σχέση με το πλήθος των ζητούμενων αριθμών μήκους n. Αρκεί να σκεφθούμε ως εξής:

Κάθε ζητούμενος αριθμός μήκους $n+1$ αποτελείται από ένα ψηφίο στην δεξιά του άκρη (τις μονάδες) και το υπόλοιπο μέρος που αποτελείται από n ψηφία, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\underbrace{D_n \quad D_{n-1} \quad \cdots \quad D_2 \quad D_1}_{n} \; D_0$$

- Αν το κομμάτι $D_n D_{n-1} \cdots D_2 D_1$ δεν περιέχει κανένα μηδενικό, τότε πρέπει αναγκαστικά στη θέση του D_0 να βάλουμε το 0, ώστε να ικανοποιείται ο περιορισμός του προβλήματος. Είναι εύκολα αντιληπτό ότι το πλήθος των δυνατών $D_n D_{n-1} \cdots D_2 D_1$ που δεν περιέχουν κανένα μηδενικό είναι 9^n.

- Αν το κομμάτι $D_n D_{n-1} \cdots D_2 D_1$ περιέχει τουλάχιστον ένα μηδενικό όπως ζητείται, τότε μπορούμε στη θέση του D_0 να βάλουμε οποιοδήποτε από τα 10 διαθέσιμα ψηφία. Άρα, έχουμε $10a_n$ τρόπους σχηματισμού, του ζητούμενου αριθμού μήκους $n+1$.

Συνολικά δηλαδή, εφόσον τα δύο παραπάνω ενδεχόμενα είναι αμοιβαία αποκλειόμενα, έχουμε

$$a_{n+1} = 10a_n + 9^n$$

Η παραπάνω έκφραση είναι η αναδρομική μορφή της ζητούμενης ακολουθίας. Για να βρούμε τον κλειστό τύπο της a_n, μπορούμε να εργαστούμε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα.

Έστω $A(z)$ η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας a_n. Υπολογίζοντας τις γεννήτριες συναρτήσεις των δύο μελών της εξίσωσης $a_{n+1} = 10a_n + 9^n$, έχουμε

$$\begin{aligned} z^{-1}[A(z) - a_0] &= 10A(z) - \frac{1}{1-9z} \\ A(z) &= \frac{a_0(1-9z)+z}{(1-10z)(1-9z)} \end{aligned}$$

ενώ η ανάλυση σε μερικά κλάσματα δίνει

$$A(z) = \frac{a_0+1}{1-10z} - \frac{1}{1-9z}$$

Άρα, η ζητούμενη ακολουθία είναι της μορφής

$$a_n = (a_0+1)10^n - 9^n \tag{7.9}$$

Σημειώστε ότι λόγω της φύσης του προβλήματος ο όρος a_0 δεν είναι γνωστός (για την ακρίβεια δεν έχει φυσικό νόημα). Όμως, πρέπει να είναι $a_1 = 0$. Εφαρμόζοντας τον κλειστό τύπο (7.9) για $n = 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} a_1 &= (a_0 + 1)10^1 - 9^1 \\ 0 &= 10a_0 + 1 \\ a_0 &= -\frac{1}{10} \end{aligned}$$

Άρα, η τελική μορφή της ζητούμενης ακολουθίας είναι

$$\begin{aligned} a_n &= (-\frac{1}{10} + 1)10^n - 9^n \\ a_n &= 9 \cdot 10^{n-1} - 9^n \end{aligned}$$

□

7.5 Συνήθεις γεννήτριες συναρτήσεις και συνδυαστικά προβλήματα

Οι συνήθεις γεννήτριες βρίσκουν μια πολύ σημαντική εφαρμογή σε συνδυαστικά προβλήματα. Ειδικότερα, με τη βοήθεια των γεννητριών συναρτήσεων αυτού του είδους μπορούμε να λύσουμε προβλήματα που αναφέρονται σε **τοποθετήσεις** r **όμοιων σφαιριδίων, σε** n **διακεκριμένες υποδοχές**. Σε αυτή την κατηγορία προβλημάτων, είναι ήδη γνωστές από τη στοιχειώδη συνδυαστική, δύο περιπτώσεις περιορισμών που αντιστοιχίζονται με τα δύο βασικά μοντέλα δειγματοληψίας που αναφέρονται παρακάτω, για τα οποία είναι γνωστό το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων. Συγκεκριμένα

Περιορισμός Ομοίων Σφαιριδίων σε υποδοχές	**Αντίστοιχο Μοντέλο Δειγματοληψίας**	**Πλήθος**
Το πολύ ένα σφαιρίδιο σε κάθε υποδοχή και $r \leq n$	Συνδυασμοί r από n χωρίς επανάληψη	$C(n, r)$
Χωρίς περιορισμό	Συνδυασμοί r από n με επανάληψη	$C(n + r - 1, r)$

Είναι αξιοσημείωτο ότι τα δύο παραπάνω προβλήματα τοποθέτησης σφαιριδίων σε υποδοχές, αλλά και πολλά άλλα που δεν συμπεριλαμβάνονται σε αυτά, μπορούν πολύ εύκολα να «κωδικοποιηθούν» και στη συνέχεια να λυθούν με τη βοήθεια γεννητριών συναρτήσεων. Η μεθοδολογία που ακολουθούμε είναι η παρακάτω

- Για κάθε μια από τις n υποδοχές σχηματίζουμε έναν απαριθμητή. Ένας απαριθμητής είναι ένα άθροισμα δυνάμεων της μεταβλητής z, στο οποίο συμμετέχουν εκείνες οι δυνάμεις του z, οι οποίες αντιστοιχούν σε επιτρεπτό πλήθος σφαιριδίων στην υποδοχή.
- Σχηματίζουμε τη γεννήτρια συνάρτηση $A(z)$, πολλαπλασιάζοντας τους απαριθμητές μεταξύ τους.
- Αναπτύσσουμε το γινόμενο που προέκυψε σε άθροισμα δυνάμεων του z.
- Εντοπίζουμε το συντελεστή του z^r στο ανάπτυγμα, ο οποίος δίνει και το ζητούμενο πλήθος τοποθετήσεων.

Για παράδειγμα στην περίπτωση της τοποθέτησης r όμοιων σφαιριδίων, σε n διακεκριμένες υποδοχές, όταν σε κάθε υποδοχή επιτρέπεται το πολύ ένα σφαιρίδιο και $r \leq n$, ο απαριθμητής κάθε υποδοχής θα αποτελείται μόνο από τις δυνάμεις z^0και z^1, αφού 0 και 1 είναι τα επιτρεπτά πλήθη σφαιριδίων σε κάθε υποδοχή. Δηλαδή

- Απαριθμητής υποδοχής 1: $(1+z)$
- Απαριθμητής υποδοχής 2: $(1+z)$
- ...
- Απαριθμητής υποδοχής n: $(1+z)$

Άρα, η ζητούμενη γεννήτρια είναι

$$\begin{aligned} A(z) &= (1+z)(1+z)\ldots(1+z) = (1+z)^n \\ &= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} z^r \end{aligned}$$

και ο ζητούμενος συντελεστής είναι ο συντελεστής του z^r, ο οποίος δεν είναι άλλος από τον $\binom{n}{r} = C(n,r)$ που προφανώς συμπίπτει με το πλήθος των συνδυασμών r από n χωρίς επανάληψη.

Αντίστοιχα μπορούμε να δουλέψουμε στην περίπτωση που δεν υπάρχει περιορισμός στο πλήθος των σφαιριδίων που τοποθετούνται σε κάθε κουτί. Αφού δεν υπάρχει περιορισμός στο πλήθος των σφαιριδίων σε κάθε κουτί, οι απαριθμητές είναι

- Απαριθμητής[1] υποδοχής 1: $(1+z+z^2+z^3+\ldots)$
- Απαριθμητής υποδοχής 2: $(1+z+z^2+z^3+\ldots)$

[1] Στην πραγματικότητα οι απαριθμητές θα έπρεπε να είναι $(1+z+z^2+\ldots+z^r)$, αφού υπάρχουν το πολύ r διαθέσιμα σφαιρίδια. Παρόλα αυτά, η επέκταση του πολυωνύμου $(1+z+z^2+\ldots+z^r)$ σε σειρά με άπειρους όρους, δεν επηρεάζει τον υπολογισμό του συντελεστή του z^r. Αυτό το τέχνασμα εφαρμόζεται αρκετά συχνά ώστε να απλοποιηθούν η πράξεις.

- ...
- Απαριθμητής υποδοχής n: $(1 + z + z^2 + z^3 + \ldots)$

Άρα, η ζητούμενη γεννήτρια είναι

$$\begin{aligned} A(z) &= (1 + z + z^2 + z^3 + \ldots)^n \\ &= \left(\frac{1}{1-z}\right)^n = (1-z)^{-n} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} z^r \end{aligned}$$

Ο ζητούμενος συντελεστής του z^r είναι $\binom{n+r-1}{r} = C(n+r-1, r)$ που συμπίπτει με το πλήθος των συνδυασμών r από n με επανάληψη όπως αναμένεται.

Όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα η τεχνική των γεννητριών συναρτήσεων μπορεί να εφαρμοστεί για την επίλυση πολυπλοκότερων προβλημάτων τοποθέτησης ομοίων σφαιριδίων σε κουτιά, τα οποία θα ήταν πολύ δύσκολο, αν όχι αδύνατο, να λυθούν με στοιχειώδη συνδυαστική.

Παράδειγμα 7.14. Χρησιμοποιώντας γεννήτριες συναρτήσεις να βρεθεί ο αριθμός των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $x + y + z = 10$, για

(α) $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$,

(β) $x > 0, y, > 0, z > 0$

(γ) $x \geq 0, y \geq 0$ και z άρτιο.

(α) Κάθε άγνωστος μπορεί να πάρει οποιαδήποτε ακέραια τιμή από 0 έως 10. Άρα, στον απαριθμητή κάθε αγνώστου θα συμμετέχουν όλες οι δυνάμεις της μεταβλητής[2] w, από το 0 ως το 10, δηλαδή

- Για το x: $1 + w + w^2 + \ldots + w^9 + w^{10}$
- Για το y: $1 + w + w^2 + \ldots + w^9 + w^{10}$
- Για το z: $1 + w + w^2 + \ldots + w^9 + w^{10}$

Η γεννήτρια συνάρτηση θα είναι

$$\begin{aligned} A(w) &= \left(1 + w + w^2 + \ldots + w^9 + w^{10}\right)^3 \\ &= \left(\frac{1-w^{11}}{1-w}\right)^3 = (1-w^{11})^3(1-w)^{-3} \end{aligned}$$

[2]Χρησιμοποιούμε το σύμβολο w, ώστε να αποφύγουμε τη σύγχυση με τους τρεις αγνώστους x, y, z του προβλήματος

$$= (1 - 3w^{11} + 3w^{22} - w^{33}) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{n} w^n$$

Η απάντηση στο ερώτημα μας δίνεται από το συντελεστή του w^{10}, ο οποίος είναι

$$\binom{10+2}{10} = \frac{12!}{10!2!} = 66$$

και προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τον πρώτο όρο της παράστασης $(1 - 3w^{11} + 3w^{22} - w^{33})$ με τον συντελεστή του w^{10} στο διωνυμικό ανάπτυγμα. Σημειώστε ότι οι υπόλοιποι όροι της παράστασης $(1 - 3w^{11} + 3w^{22} - w^{33})$, δεν είναι δυνατό να δώσουν w^{10}.
(β) Αντίστοιχα με το (α) οι απαριθμητές τώρα θα είναι:

- Για το x: $w + w^2 + \ldots + w^9 + w^{10}$
- Για το y: $w + w^2 + \ldots + w^9 + w^{10}$
- Για το z: $w + w^2 + \ldots + w^9 + w^{10}$

Η γεννήτρια συνάρτηση θα είναι

$$\begin{aligned} A(w) &= \left(w + w^2 + \ldots + w^9 + w^{10}\right)^3 \\ &= w^3 \left(1 + w + w^2 + \ldots + w^9\right)^3 \\ &= w^3 \left(\frac{1 - w^{10}}{1 - w}\right)^3 = w^3(1 - w^{10})^3(1 - w)^{-3} \\ &= w^3(1 - 3w^{10} + 3w^{20} - w^{30}) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{n} w^n \end{aligned}$$

Η απάντηση στο ερώτημα μας δίνεται από το συντελεστή του w^{10}, ο οποίος είναι

$$\binom{7+2}{7} = \frac{9!}{7!2!} = 36$$

και προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τον πρώτο όρο της παράστασης $(1 - 3w^{10} + 3w^{20} - w^{30})$ με τον συντελεστή του w^7 στο διωνυμικό ανάπτυγμα, καθώς ο όρος w^3 που προηγείται συνεισφέρει στο σχηματισμό όλων των όρων.
(γ) Οι τρεις απαριθμητές που «κωδικοποιούν» τους αντίστοιχους περιορισμούς του προβλήματος είναι

- Για το x: $1 + w + w^2 + \ldots + w^9 + w^{10}$
- Για το y: $1 + w + w^2 + \ldots + w^9 + w^{10}$
- Για το z: $1 + w^2 + w^4 + w^6 + w^8 + w^{10}$

Η γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$\begin{aligned} A(w) &= (1 + w + \ldots + w^9 + w^{10})^2(1 + w^2 + w^4 + w^6 + w^8 + w^{10}) \\ &= \left(\frac{1 - w^{11}}{1 - w}\right)^2 (1 + w^2 + w^4 + w^6 + w^8 + w^{10}) \\ &= (1 - 2w^{11} + w^{22}) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{n} w^n\right] (1 + w^2 + w^4 + w^6 + w^8 + w^{10}) \end{aligned}$$

Για το σχηματισμό του συντελεστή w^{10}, θα πρέπει να περιοριστούμε μόνο στον πρώτο όρο της παράστασης $(1 - 2w^{11} + w^{22})$, αφού οι υπόλοιποι δύο έχουν εκθέτη μεγαλύτερο του 10. Άρα ο ζητούμενος συντελεστής του w^{10} προκύπτει συνδυάζοντας κάθε ένα από τους όρους της παράστασης $(1 + w^2 + w^4 + w^6 + w^8 + w^{10})$, με κατάλληλους όρους από το ανάπτυγμα $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{n} w^n$, έτσι ώστε το άθροισμα το εκθετών να είναι πάντοτε 10. Συνολικά ο ζητούμενος συντελεστής είναι

$$\binom{11}{10} + \binom{9}{8} + \binom{7}{6} + \binom{5}{4} + \binom{3}{2} + \binom{1}{0} = 36$$

□

Παράδειγμα 7.15. Διαθέτουμε χαρτονομίσματα των 5, 10 και 20 ευρώ.

(α) Με πόσους δυνατούς τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε 5 από αυτά αν έχουμε συνολικά 10 των 5 ευρώ, 3 των 10 ευρώ και απεριόριστο αριθμό των 20 ευρώ;

(β) Με πόσους τρόπους μπορούμε να πάρουμε το ποσό των 100 ευρώ αν διαθέτουμε 10 χαρτονομίσματα από το κάθε είδος και πρέπει υποχρεωτικά να πάρουμε ζυγό αριθμό από χαρτονομίσματα των 10 ευρώ;

(α) Θα πρέπει να προσέξουμε ότι μας ενδιαφέρει να επιλέξουμε 5 αντικείμενα έχοντας στη διάθεση μας τρεις διαφορετικούς τύπους αντικειμένων. Η αξία λοιπόν των χαρτονομισμάτων δεν παίζει κανένα ρόλο και η απάντηση στο ερώτημα θα ήταν ακριβώς η ίδια αν στη θέση των χαρτονομισμάτων υπήρχαν μπάλες 3 διαφορετικών χρωματισμών. Οι απαριθμητές λοιπόν για τα χαρτονομίσματα των 5, 10 και 20 ευρώ είναι αντίστοιχα

- Για τα χαρτονομίσματα των 5 ευρώ: $1 + x + \ldots + x^9 + x^{10}$
- Για τα χαρτονομίσματα των 10 ευρώ: $1 + x + x^2 + x^3$
- Για τα χαρτονομίσματα των 20 ευρώ: $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

και η γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$A(x) = (1 + x + \ldots + x^{10})(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2 + \ldots)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1-x^{11}}{1-x}\frac{1-x^4}{1-x}\frac{1}{1-x} \\
&= (1-x^{11})(1-x^4)(1-x)^{-3} \\
&= (1-x^4-x^{11}+x^{15})\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{n}x^n
\end{aligned}$$

της οποίας πρέπει να υπολογιστεί ο συντελεστής του όρου x^5, είναι

$$\binom{7}{5}-\binom{3}{1}=21-3=18$$

(β) Αντίθετα με το προηγούμενο ερώτημα, η αξία των χαρτονομισμάτων εδώ έχει σημασία, καθώς επιλογή ενός χαρτονομίσματος 5 ευρώ, συνεισφέρει διαφορετικό ποσό σε σχέση με την επιλογή ενός χαρτονομίσματος 10 ευρώ. Για αυτό το λόγο θα σχηματίσουμε απαριθμητές στους οποίους οι δυνάμεις του x που θα εμφανίζονται, θα εκφράζουν την αξία που συνεισφέρει η επιλογή αντίστοιχου πλήθους χαρτονομισμάτων από το συγκεκριμένο είδος. Οι απαριθμητές είναι

- Για τα χαρτονομίσματα των 5 ευρώ: $x^{5\cdot 0}+x^{5\cdot 1}+\ldots+x^{5\cdot 9}+x^{5\cdot 10}$
- Για τα χαρτονομίσματα των 10 ευρώ: $x^{10\cdot 0}+x^{10\cdot 2}+\ldots+x^{10\cdot 8}+x^{10\cdot 10}$
- Για τα χαρτονομίσματα των 20 ευρώ: $x^{20\cdot 0}+x^{20\cdot 1}+\ldots+x^{20\cdot 9}+x^{20\cdot 10}$

Για να απλοποιήσουμε τις πράξεις που ακολουθούν θα επεκτείνουμε τους απαριθμητές των 10 και 20 ευρώ, θεωρώντας ότι διαθέτουμε απεριόριστα από αυτά. Μπορούμε να κάνουμε την επέκταση αυτή γιατί ο ζητούμενος συντελεστής του όρου x^{100} δεν επηρεάζεται από την μεταβολή των δύο απαριθμητών. Άρα, πρακτικά οι απαριθμητές των 10 και 20 ευρώ γίνονται

$$(1+x^{20}+x^{40}+x^{60}\ldots)$$

Παρατηρείστε ότι δεν μπορούμε να κάνουμε το ίδιο και για τον απαριθμητή των 5 ευρώ, καθώς η προσθήκη όρων της μορφής $x^{55}, x^{60}, \ldots$ επηρεάζει σαφώς τον συντελεστή του x^{100}. Έτσι, η γεννήτρια συνάρτηση γίνεται

$$\begin{aligned}
A(x) &= (1+x^5+\ldots+x^{45}+x^{50})(1+x^{20}+x^{40}+x^{60}+\ldots)^2 \\
&= \frac{1-x^{55}}{1-x^5}\left(\frac{1}{1-x^{20}}\right)^2 \\
&= (1-x^{55})(1-x^5)^{-1}(1-x^{20})^{-2} \\
&= (1-x^{55})\left[\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{n}x^{5n}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{n}x^{20n}\right] \\
&= (1-x^{55})\left[\sum_{n=0}^{\infty}x^{5n}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{20n}\right]
\end{aligned}$$

Ο συντελεστής του x^{100} στην παραπάνω γεννήτρια προκύπτει ως εξής:

- Αν επιλέξουμε από το πολυώνυμο $(1-x^{55})$ τον σταθερό όρο, αναζητούμε τους πιθανούς τρόπους δημιουργίας της δύναμης x^{100}, από το γινόμενο των δύο διωνυμικών αναπτυγμάτων που ακολουθούν. Η συνεισφορά στο συντελεστή του x^{100} είναι

$$1+2+3+4+5+6$$

- Αν αντίστοιχα επιλέξουμε τον όρο $-x^{55}$ από το πολυώνυμο $(1-x^{55})$, η συνεισφορά στο ζητούμενο συντελεστή είναι

$$-1-2-3$$

Συνολικά δηλαδή ο ζητούμενος συντελεστής είναι

$$1+2+3+4+5+6-1-2-3=15$$

□

7.6 Εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις

Ένα δεύτερο είδος γεννήτριας που χρησιμοποιείται σε κάποιες κατηγορίες προβλημάτων είναι η **εκθετική γεννήτρια συνάρτηση**. Έστω μια ακολουθία πραγματικών αριθμών, με όρους $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$. Τότε η δυναμοσειρά

$$A(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}$$

ονομάζεται **εκθετική γεννήτρια συνάρτηση** της ακολουθίας a. Ακολουθούν μερικά παραδείγματα υπολογισμού εκθετικών γεννητριών ορισμένων απλών ακολουθιών.

Παράδειγμα 7.16. Η εκθετική γεννήτρια της ακολουθίας $a_n = 1$ είναι

$$A(z)=\sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot \frac{z^n}{n!} = e^z$$

Θυμίζουμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ είναι το ανάπτυγμα Taylor της εκθετικής συνάρτησης e^z γύρω από το σημείο $z=0$. □

Παράδειγμα 7.17. Η εκθετική γεννήτρια της ακολουθίας $a_n = \lambda^n$ είναι

$$A(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^n}{n!} = e^{\lambda z}$$

□

Παράδειγμα 7.18. Η εκθετική γεννήτρια της ακολουθίας $a_n = n!$ είναι

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

□

Παράδειγμα 7.19. Να υπολογιστεί η εκθετική γεννήτρια της ακολουθίας $a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ άρτιος} \\ 0, & n \text{ περιττός} \end{cases}$.

Η εκθετική γεννήτρια θα αποτελείται μόνο από τις άρτιες δυνάμεις του z, δηλαδή

$$A(z) = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} + \dots$$

Μπορούμε να βρούμε μια πιο συμπαγή μορφή της παραπάνω δυναμοσειράς, σκεπτόμενοι ότι

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \dots$$

ενώ

$$e^{-z} = 1 - \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \dots$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω ισότητες παίρνουμε

$$e^z + e^{-z} = 2 \cdot \left(1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} + \dots\right)$$

Άρα η ζητούμενη εκθετική γεννήτρια της ακολουθίας που δόθηκε είναι

$$A(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$$

□

Παράδειγμα 7.20. Εργαζόμενοι αντίστοιχα με το προηγούμενο παράδειγμα η εκθετική γεννήτρια της ακολουθίας

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ άρτιος} \\ 1, & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

είναι

$$A(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$

□

7.6.1 Χρήση εκθετικών γεννητριών σε συνδυαστικά προβλήματα

Οι εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση προβλημάτων **τοποθέτησης r διακεκριμένων σφαιριδίων, σε n διακεκριμένες υποδοχές**. Οι κατηγορίες προβλημάτων που μας είναι γνωστές από τη στοιχειώδη συνδυαστική, καθώς και τα ισοδύναμα τους μοντέλα δειγματοληψίας, εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα

Περιορισμός Διακεκριμένων Σφαιριδίων σε υποδοχές	**Αντίστοιχο Μοντέλο Δειγματοληψίας**	**Πλήθος**
Το πολύ ένα σφαιρίδιο σε κάθε υποδοχή και $r \leq n$	Διατάξεις r από n χωρίς επανάληψη	$P(n, r)$
Δεν ενδιαφέρει η σειρά τοποθέτησης των σφαιριδίων σε κάθε υποδοχή	Διατάξεις r από n με επανάληψη	n^r
Έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης των σφαιριδίων σε κάθε υποδοχή	Διατάξεις r από $n+r-1$ χωρίς επανάληψη	$P(n+r-1, r)$

Η μεθοδολογία που ακολουθείται για τις δύο πρώτες περιπτώσεις του πίνακα είναι εντελώς αντίστοιχη με αυτή των προβλημάτων τοποθέτησης ομοίως σφαιριδίων σε υποδοχές, με τη διαφορά ότι εδώ χρησιμοποιούνται εκθετικές αντί για συνήθεις γεννήτριες. Η τρίτη περίπτωση του πίνακα μπορεί να αντιμετωπιστεί με μεθοδολογία εκθετικών γεννητριών με μια ιδιαίτερη τεχνική που παρουσιάζεται στο Παράδειγμα 7.23. Προς το παρόν θα επικεντρωθούμε στις δύο πρώτες περιπτώσεις του πίνακα. Η μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων με εκθετικές γεννήτριες είναι η παρακάτω

- Για κάθε μια από τις n υποδοχές σχηματίζουμε έναν απαριθμητή. Κάθε απαριθμητής είναι ένα άθροισμα όρων της μορφής $\frac{z^k}{k!}$, στο οποίο συμμετέχουν εκείνες οι δυνάμεις του z, οι οποίες αντιστοιχούν σε επιτρεπτό πλήθος σφαιριδίων στην υποδοχή.

- Σχηματίζουμε την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση $A(z)$, πολλαπλασιάζοντας τους απαριθμητές μεταξύ τους.

- Αναπτύσσουμε το γινόμενο που προέκυψε σε άθροισμα δυνάμεων του z.

- Εντοπίζουμε το συντελεστή του $\frac{z^r}{r!}$ στο ανάπτυγμα, ο οποίος δίνει και το ζητούμενο πλήθος τοποθετήσεων.

Για την πρώτη περίπτωση του παραπάνω πίνακα, όπου σε κάθε υποδοχή επιτρέπεται το πολύ ένα σφαιρίδιο και $r \leq n$, ο απαριθμητής κάθε υποδοχής θα αποτελείται μόνο από τους όρους $\frac{z^0}{0!}$και $\frac{z^1}{1!}$, αφού 0 και 1 είναι τα επιτρεπτά πλήθη σφαιριδίων σε κάθε υποδοχή. Δηλαδή

- Απαριθμητής υποδοχής 1: $(1 + \frac{z}{1!})$
- Απαριθμητής υποδοχής 2: $(1 + \frac{z}{1!})$
- ...
- Απαριθμητής υποδοχής n: $(1 + \frac{z}{1!})$

Άρα, η ζητούμενη γεννήτρια είναι

$$
\begin{aligned}
A(z) &= (1 + \frac{z}{1!})(1 + \frac{z}{1!}) \dots (1 + \frac{z}{1!}) = (1 + z)^n \\
&= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} z^r = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{(n-r)!r!} z^r
\end{aligned}
$$

και ο ζητούμενος συντελεστής είναι ο συντελεστής του $\frac{z^r}{r!}$, ο οποίος είναι $\frac{n!}{(n-r)!} = P(n, r)$ που συμπίπτει με το πλήθος των διατάξεων r από n χωρίς επανάληψη.

Αντίστοιχα μπορούμε να δουλέψουμε για τη δεύτερη περίπτωση του πίνακα, όπου δεν υπάρχει περιορισμός στο πλήθος των σφαιριδίων που τοποθετούνται σε κάθε κουτί και δεν έχει σημασία η σειρά εμφάνισης των σφαιριδίων σε κάθε κουτί. Αφού δεν υπάρχει περιορισμός στο πλήθος των σφαιριδίων σε κάθε κουτί, οι απαριθμητές είναι

- Απαριθμητής[3] υποδοχής 1: $(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots)$
- Απαριθμητής υποδοχής 2: $(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots)$
- ...
- Απαριθμητής υποδοχής n: $(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots)$

Άρα, η ζητούμενη γεννήτρια είναι

$$
\begin{aligned}
A(z) &= (1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots)^n = (e^z)^n = e^{nz} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(nz)^r}{r!} = \sum_{r=0}^{\infty} n^r \frac{z^r}{r!}
\end{aligned}
$$

Ο ζητούμενος συντελεστής του $\frac{z^r}{r!}$ είναι n^r που συμπίπτει με το πλήθος των διατάξεων r από n με επανάληψη όπως αναμένεται.

Στα παραδείγματα που ακολουθούν παρουσιάζεται η τεχνική των εκθετικών γεννητριών συναρτήσεων, η οποία μπορεί να εφαρμοστεί σε προβλήματα τοποθέτησης διακεκριμένων σφαιριδίων σε κουτιά με πιο σύνθετους περιορισμούς.

[3] Όπως και στην αντίστοιχη περίπτωση των συνήθων γεννητριών, οι απαριθμητές θα έπρεπε να είναι $(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^r}{r!})$, αφού υπάρχουν το πολύ r διαθέσιμα σφαιρίδια. Παρόλα αυτά, η επέκταση του πολυωνύμου σε σειρά με άπειρους όρους, δεν επηρεάζει τον υπολογισμό του συντελεστή του $\frac{z^r}{r!}$. Το τέχνασμα επιτρέπει να απλοποιηθούν η πράξεις.

Παράδειγμα 7.21. Πόσες συμβολοσειρές μήκους 12 μπορούμε να σχηματίσουμε, χρησιμοποιώντας τα γράμματα Α,Β,Γ, χωρίς περιορισμό στις επαναλήψεις τους

(α) Χωρίς κανένα άλλο περιορισμό;

(β) Παίρνοντας τουλάχιστον ένα Α, τουλάχιστον ένα Β και περιττό αριθμό από Γ;

(α) Αφού μας ενδιαφέρουν οι διατάξεις (η σειρά των γραμμάτων) θα χρησιμοποιήσουμε εκθετική γεννήτρια συνάρτηση. Πρόκειται για ένα πρόβλημα δημιουργίας ενός διατεταγμένου δείγματος μήκους $r = 12$, από $n = 3$ διαθέσιμα, με επανάληψη. Οι απαριθμητές για τα Α,Β,Γ είναι

- Για το Α: $1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$
- Για το Β: $1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$
- Για το Γ: $1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$

και η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση διαμορφώνεται ως εξής

$$\begin{aligned} A(z) &= (1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots)^3 = (e^z)^3 = e^{3z} \\ &= 1 + \frac{(3z)}{1!} + \frac{(3z)^2}{2!} + \frac{(3z)^3}{3!} + \ldots + \frac{(3z)^n}{n!} + \ldots \end{aligned}$$

όπου θέλουμε να υπολογίσουμε το συντελεστή του $\frac{z^{12}}{12!}$. Εύκολα προκύπτει ότι ο ζητούμενος συντελεστής είναι

$$3^{12}$$

(β) Όπως και στο (α) θα χρησιμοποιήσουμε εκθετική γεννήτρια συνάρτηση, αφού το πρόβλημα διαφοροποιείται σε σχέση με το (α) μόνο στους περιορισμούς. Οι απαριθμητές για τα Α,Β,Γ είναι

- Για το Α: $\frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots = e^z - 1$
- Για το Β: $\frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots = e^z - 1$
- Για το Γ: $\frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \ldots = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$

οπότε η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση διαμορφώνεται ως εξής

$$\begin{aligned} A(z) &= (e^z - 1)^2 \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{2z} - 2e^z + 1)(e^z - e^{-z}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{3z} - 2e^{2z} + 2 - e^{-z}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(3z)^r}{r!} - 2\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2z)^r}{r!} + 2 - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^r}{r!}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[2 + \sum_{r=0}^{\infty}(3^r - 2\cdot 2^r - (-1)^r)\frac{z^r}{r!}\right]$$

Εύκολα προκύπτει ότι ο συντελεστής του $\frac{z^{12}}{12!}$ είναι

$$\frac{1}{2}\left[3^{12} - 2\cdot 2^{12} - (-1)^{12}\right]$$

□

Παράδειγμα 7.22. Έχοντας στην διάθεσή μας τα ψηφία 0 έως και 9 πόσους $n-$ψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε (με απεριόριστη επανάληψη των ψηφίων) οι οποίοι περιέχουν μία τουλάχιστον φορά το ψηφίο μηδέν (σε οποιαδήποτε θέση εκτός από την πρώτη αριστερά);

Επειδή το πρώτο αριστερά ψηφίο του αριθμού του $n-$ψήφιου αριθμού υπακούει σε διαφορετικούς περιορισμούς από τα υπόλοιπα θα σχηματίσουμε την εκθετική γεννήτρια για τη διάταξη των $n-1$ ψηφίων. Δουλεύοντας αντίστοιχα με το προηγούμενο παράδειγμα, σχηματίζουμε τους απαριθμητές για κάθε ένα από τα δέκα ψηφία $0, 1, 2, \ldots, 9$

- Για το 0: $\frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots = e^z - 1$
- Για τους $1-9$: $1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots = e^z$

Άρα, η εκθετική γεννήτρια για τα $n-1$ πρώτα ψηφία του αριθμού είναι

$$\begin{aligned} A(z) &= (e^z - 1)(e^z)^9 = e^{10z} - e^{9z} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(10z)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(9z)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(10^n - 9^n)\frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

όπου το πλήθος των $(n-1)-$ψήφιων αριθμών δίνεται από τον συντελεστή του $\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$. Δηλαδή είναι

$$10^{n-1} - 9^{n-1}$$

Λαμβάνοντας, υπόψη ότι για να κατασκευάσουμε $n-$ψήφιους αριθμούς με τουλάχιστον ένα μηδενικό μπορούμε να επιλέξουμε με 9 τρόπους το πρώτο αριστερά ψηφίο (οποιοδήποτε ψηφίο εκτός του 0) και με $10^{n-1} - 9^{n-1}$ τα υπόλοιπα $n-1$ ψηφία έχουμε συνολικά

$$9(10^{n-1} - 9^{n-1}) = 9\cdot 10^{n-1} - 9^n$$

τρόπους. □

Παράδειγμα 7.23. Ένας δρομολογητής δικτύου δρομολογεί εισερχόμενα πακέτα δεδομένων που το καθένα φέρει μια διακεκριμένη επικεφαλίδα, προς τέσσερα διακεκριμένα κανάλια. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η δρομολόγηση 60 τέτοιων πακέτων σε ένα δευτερόλεπτο αν τα κανάλια μπορούν να δεχθούν μέχρι 50 πακέτα ανά δευτερόλεπτο και μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία θα περάσουν από το κάθε κανάλι;
Η κύρια διαφορά του παρόντος παραδείγματος σε σχέση με τα προηγούμενα είναι πως πρέπει να λάβουμε υπόψη τη σειρά με την οποία δρομολογούνται τα διακεκριμένα πακέτα σε κάθε κανάλι. Το πρόβλημα είναι αντίστοιχο με την τοποθέτηση $r = 60$ διακεκριμένων σφαιριδίων (πακέτων) σε $n = 4$ διακεκριμένες υποδοχές (κανάλια), όπου μας ενδιαφέρει η σειρά τοποθέτησης των σφαιριδίων σε κάθε υποδοχή (κανάλι).
Α' τρόπος: Αν είχαμε το αντίστοιχο πρόβλημα χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά των πακέτων σε κάθε κανάλι, τότε οι απαριθμητές της εκθετικής γεννήτριας θα ήταν

- Κανάλια 1-4: $1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^{50}}{50!}$

Κάθε όρος της μορφής $\frac{z^r}{r!}$ έχει (νοητά) συντελεστή 1, που σημαίνει ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος να περάσουν r διακεκριμένα πακέτα από το αντίστοιχο κανάλι όταν δεν λαμβάνεται η σειρά δρομολόγησης των πακέτων. Αν όμως λάβουμε υπόψη τη σειρά με την οποία θα περάσουν από το κανάλι, τότε υπάρχουν $r!$ τρόποι να δρομολογηθούν r διακεκριμένα πακέτα από το αντίστοιχο κανάλι (ο αριθμός των διαφορετικών μεταθέσεων των πακέτων). Άρα υπάρχουν 1!, 2!, 3!, ... τρόποι να δρομολογηθούν 1, 2, 3, … διακεκριμένα πακέτα αντίστοιχα από κάποιο κανάλι. Αυτοί θα πρέπει να είναι και οι συντελεστές των όρων του απαριθμητή για κάθε κανάλι στη νέα γεννήτρια συνάρτηση. Έτσι, οι απαριθμητές διαμορφώνονται ως εξής:

- Κανάλια 1-4: $0! \cdot 1 + 1!\frac{z}{1!} + 2!\frac{z^2}{2!} + 3!\frac{z^3}{3!} + \ldots + 50!\frac{z^{50}}{50!} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{50}$

Η γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$\begin{aligned} A(z) &= (1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{50})^4 \\ &= \left(\frac{1 - z^{51}}{1 - z}\right)^4 \\ &= (1 - z^{51})^4 (1 - z)^{-4} \\ &= (z^{204} - 4z^{153} + 6z^{102} - 4z^{51} + 1) \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+3}{r} z^r \end{aligned}$$

και σε αυτή αναζητούμε το συντελεστή του όρου $\frac{z^{60}}{60!}$, ο οποίος είναι

$$\left[\binom{63}{60} - 4 \times \binom{12}{9}\right] \times 60!$$

Σημειώστε ότι παρά το γεγονός ότι οπτικά η $A(z)$ μοιάζει με συνήθη γεννήτρια συνάρτηση, στην πραγματικότητα είναι εκθετική.

Β' τρόπος: Μια εναλλακτική αντιμετώπιση είναι να θεωρήσουμε ότι τα πακέτα είναι όμοια, οπότε οι απαριθμητές της συνήθους γεννήτριας θα ήταν

- Κανάλια 1-4: $1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{50}$

οπότε η αντίστοιχη γεννήτρια θα ήταν

$$A(z) = (1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{50})^4$$

η οποία ταυτίζεται με αυτή που βρήκαμε με τον Α’ τρόπο. Ο συντελεστής που δίνει το πλήθος των τρόπων κατανομής 60 όμοιων πακέτων είναι αυτός του z^{60}, ο οποίος σύμφωνα με τα παραπάνω είναι

$$\binom{63}{60} - 4 \times \binom{12}{9}$$

Για να απαντήσουμε στο αρχικό ερώτημα, αρκεί να σκεφτούμε ότι για κάθε κατανομή των ομοίων πακέτων, υπάρχουν $60!$ διατάξεις των διακεκριμένων πακέτων στα τέσσερα κανάλια, άρα τελικά το ζητούμενο πλήθος είναι

$$\left[\binom{63}{60} - 4 \times \binom{12}{9}\right] \times 60!$$

□

Συνολικά, οι αντιστοιχίες κατανομών σφαιριδίων σε υποδοχές, μοντέλων δειγματοληψίας και γεννητριών εμφανίζονται στον πίνακα 7.1.

<table>
<tr><th colspan="2">Τοποθέτηση r σφαιριδίων σε n διακεκριμένες υποδοχές</th><th>Μοντέλο Δειγματοληψίας</th><th>Είδος Γεννήτριας</th><th>Μορφή Γεννήτριας</th><th>Ζητούμενος συντελεστής</th><th>Πλήθος</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Όμοια σφαιρίδια</td><td>Το πολύ ένα σφαιρίδιο σε κάθε υποδοχή και $r \leq n$</td><td>Συνδυασμοί r από n χωρίς επανάληψη</td><td rowspan="2">Συνήθης γεννήτρια</td><td>$(1+z)^n$</td><td rowspan="2">z^r</td><td>$C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$</td></tr>
<tr><td>Χωρίς περιορισμό</td><td>Συνδυασμοί r από n με επανάληψη</td><td>$(1+z+z^2+z^3+\ldots)^n$</td><td>$C(n+r-1,r) = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Διακεκριμένα σφαιρίδια</td><td>Το πολύ ένα σφαιρίδιο σε κάθε υποδοχή και $r \leq n$</td><td>Διατάξεις r από n χωρίς επανάληψη</td><td rowspan="3">Εκθετική γεννήτρια</td><td>$(1+\frac{z}{1!})^n$</td><td rowspan="3">$\frac{z^r}{r!}$</td><td>$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)}$</td></tr>
<tr><td>Δεν ενδιαφέρει η σειρά τοποθέτησης των σφαιριδίων σε κάθε υποδοχή</td><td>Διατάξεις r από n με επανάληψη</td><td>$(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots)^n$</td><td>$n^r$</td></tr>
<tr><td>Έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης των σφαιριδίων σε κάθε υποδοχή</td><td>Διατάξεις r από $n+r-1$ χωρίς επανάληψη</td><td>$(1+z+z^2+z^3+\ldots)^n$</td><td>$P(n+r-1,r) = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}$</td></tr>
</table>

Πίνακας 7.1: Συνοπτική παρουσίαση των συνδυαστικών μοντέλων και των αντίστοιχων γεννητριών

Βιβλιογραφία

[1] Lipschutz Seymour, Lipson Marc Lars, *Διακριτά Μαθηματικά*, 2η έκδοση, 2003, εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960-8050-92-8.

[2] Rosen Kenneth H., *Διακριτά Μαθηματικά και Εφαρμογές τους*, 5η έκδοση, 2008, εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 978-960-418-144-5.

[3] Sussana S. Epp, *Διακριτά Μαθηματικά με Εφαρμογές*, 3η έκδοση, 2010, εκδόσεις Κλειδάριθμος, ISBN 978-960-461-325-0.

[4] C.L. Liu, *Στοιχεία Διακριτών Μαθηματικών*, 1η έκδοση, 2009, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, ISBN 978-960-524-072-1.

[5] Ελευθέριος Σ. Αγγελής, Γεώργιος Λ. Μπλέρης, *Διακριτά μαθηματικά*, 1η έκδοση, 2003, εκδόσεις Τζιόλα, ISBN: 960-538-009-6.

[6] Γ. Σταματίου, *Αρχές Συνδυαστικής*, Πάτρα 2004, Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο.

[7] Κ. Δημητρακόπουλος, *Μαθηματική Λογική*, Πάτρα 2003, Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, ISBN 960-538-206-7.

[8] Μ. Μαυρονικόλας, *Θεωρία Γράφων*, Πάτρα 2002, Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, ISBN 960-538-461-2.

[9] Γ. Βούρος, *Διακριτά Μαθηματικά*, Πάτρα 2002, Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, ISBN 960-538-373-X.